Bureau des Longitudes

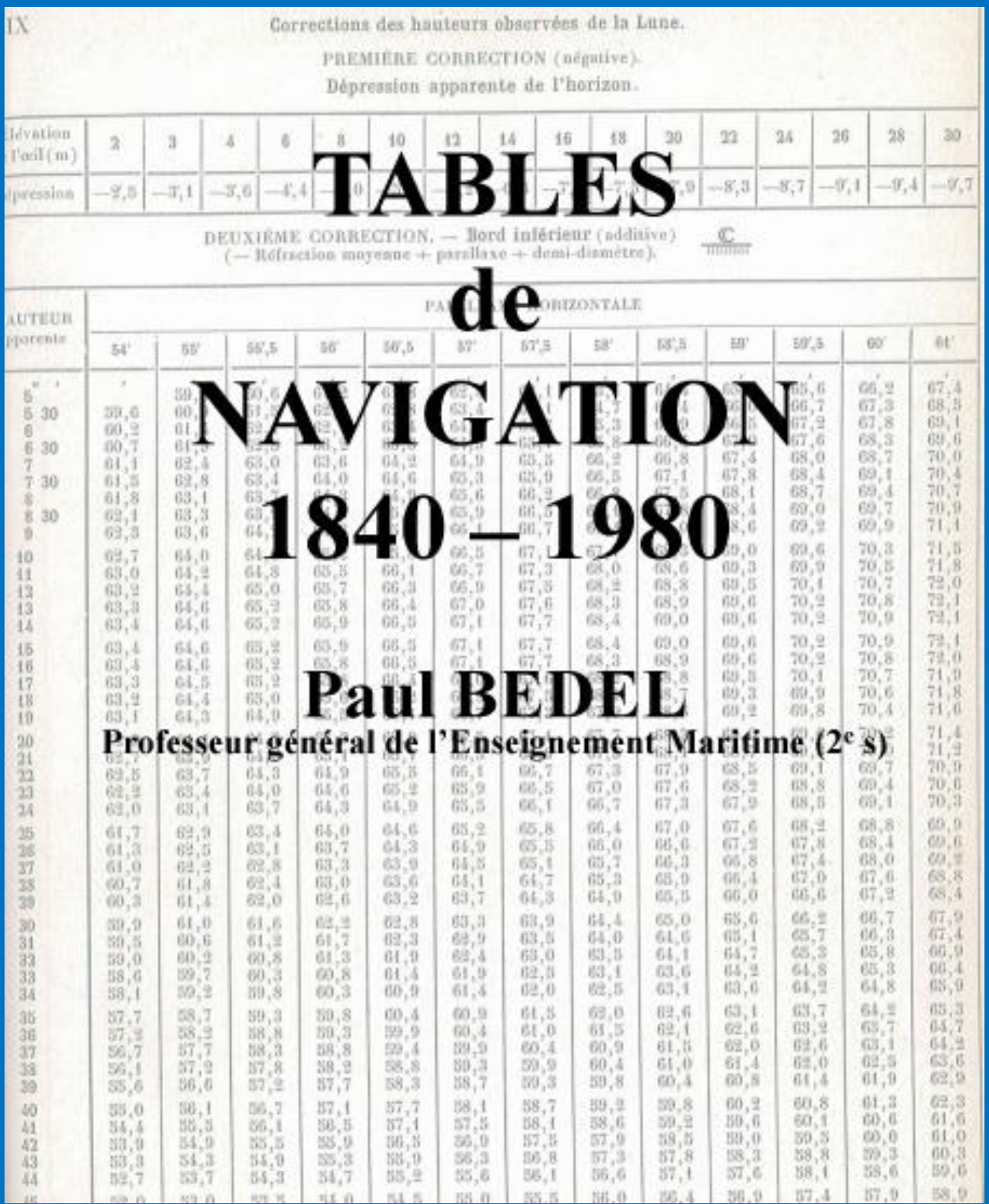
Collection du Bureau des longitudes

Volume 5

TABLES de NAVIGATION 1840–1980

Paul BEDEL

Professeur général de l'Enseignement Maritime (2e s)



IX

Corrections des hauteurs observées de la Lune.

PREMIÈRE CORRECTION (négative).

Dépression apparente de l'horizon.

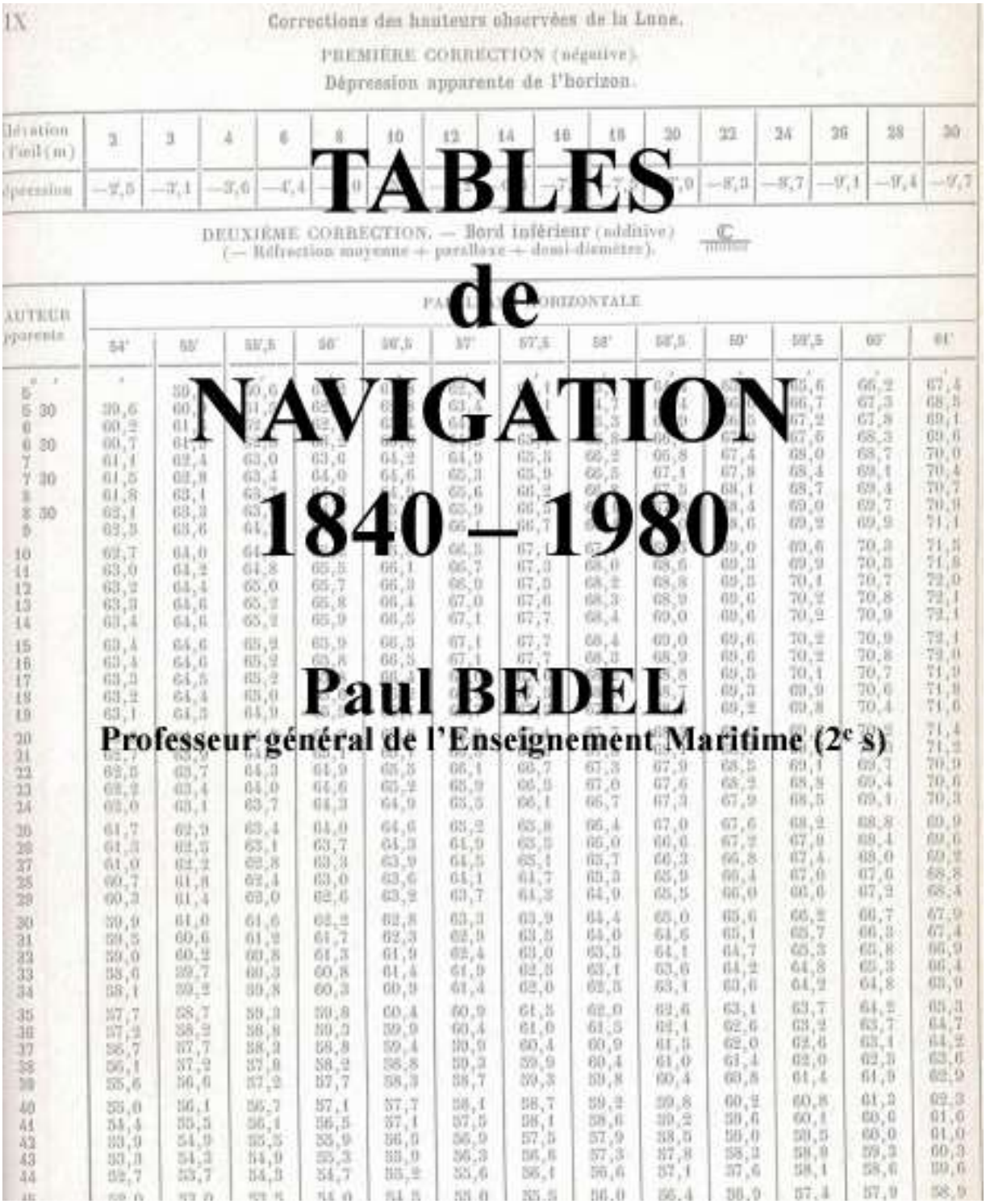
Élévation de l'œil (m)	2	3	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
Dépression	−2,5	−3,1	−3,6	−4,4	−5,0							−8,3	−8,7	−9,1	−9,4	−9,7

DEUXIÈME CORRECTION. — Bord inférieur (additive) $\frac{C}{\text{millièmes}}$

(— Réfraction moyenne + parallaxe + demi-diamètre).

HAUTEUR apparente	PARALLAXE HORIZONTALE												
	54'	55'	55',5	56'	56',5	57'	57',5	58'	58',5	59'	59',5	60'	61'
° '	'	'	'	'	'	'	'	'	'	'	'	'	'
5		59,0	60,6	62,2	63,8	65,4	67,1	68,7	70,3	71,9	73,5	75,2	78,4
5 30	59,6	60,2	61,8	63,4	65,0	66,6	68,3	69,9	71,5	73,1	74,8	76,4	79,6
6	60,2	61,8	63,4	65,0	66,6	68,2	69,8	71,5	73,1	74,7	76,4	78,0	81,2
6 30	60,7	62,3	63,9	65,5	67,1	68,7	70,4	72,0	73,6	75,3	76,9	78,6	81,8
7	61,1	62,4	63,0	63,6	64,2	64,9	65,5	66,2	66,8	67,4	68,0	68,7	70,0
7 30	61,5	62,8	63,4	64,0	64,6	65,3	65,9	66,5	67,1	67,8	68,4	69,1	70,4
8	61,8	63,1	63,7	64,3	64,9	65,6	66,2	66,8	67,5	68,1	68,7	69,4	70,7
8 30	62,1	63,3	63,9	64,5	65,2	65,9	66,5	67,1	67,8	68,4	69,0	69,7	70,9
9	62,3	63,6	64,2	64,8	65,4	66,1	66,7	67,4	68,0	68,6	69,2	69,9	71,1
10	62,7	64,0	64,6	65,2	65,8	66,5	67,1	67,7	68,4	69,0	69,6	70,3	71,5
11	63,0	64,2	64,8	65,5	66,1	66,7	67,3	68,0	68,6	69,3	69,9	70,5	71,8
12	63,2	64,4	65,0	65,7	66,3	66,9	67,5	68,2	68,8	69,5	70,1	70,7	72,0
13	63,3	64,6	65,2	65,8	66,4	67,0	67,6	68,3	68,9	69,6	70,2	70,8	72,1
14	63,4	64,6	65,2	65,9	66,5	67,1	67,7	68,4	69,0	69,6	70,2	70,9	72,1
15	63,4	64,6	65,2	65,9	66,5	67,1	67,7	68,4	69,0	69,6	70,2	70,9	72,1
16	63,4	64,6	65,2	65,8	66,5	67,1	67,7	68,3	68,9	69,6	70,2	70,8	72,0
17	63,3	64,5	65,2	65,8	66,4	67,0	67,6	68,2	68,8	69,5	70,1	70,7	71,9
18	63,2	64,4	65,0	65,7	66,3	66,9	67,5	68,1	68,7	69,3	69,9	70,6	71,8
19	63,1	64,3	64,9	65,6	66,2	66,8	67,4	68,0	68,6	69,2	69,8	70,4	71,6
20	62,9	64,1	64,7	65,4	66,0	66,6	67,2	67,8	68,4	69,0	69,6	70,2	71,4
21	62,7	63,9	64,5	65,1	65,7	66,3	66,9	67,5	68,1	68,7	69,3	69,9	71,2
22	62,5	63,7	64,3	64,9	65,5	66,1	66,7	67,3	67,9	68,5	69,1	69,7	70,9
23	62,2	63,4	64,0	64,6	65,2	65,9	66,5	67,0	67,6	68,2	68,8	69,4	70,6
24	62,0	63,1	63,7	64,3	64,9	65,5	66,1	66,7	67,3	67,9	68,5	69,1	70,3
25	61,7	62,9	63,4	64,0	64,6	65,2	65,8	66,4	67,0	67,6	68,2	68,8	69,9
26	61,3	62,5	63,1	63,7	64,3	64,9	65,5	66,0	66,6	67,2	67,8	68,4	69,6
27	61,0	62,2	62,8	63,3	63,9	64,5	65,1	65,7	66,3	66,8	67,4	68,0	69,2
28	60,7	61,8	62,4	63,0	63,6	64,1	64,7	65,3	65,9	66,4	67,0	67,6	68,8
29	60,3	61,4	62,0	62,6	63,2	63,7	64,3	64,9	65,5	66,0	66,6	67,2	68,4
30	59,9	61,0	61,6	62,2	62,8	63,3	63,9	64,4	65,0	65,6	66,2	66,7	67,9
31	59,5	60,6	61,2	61,7	62,3	62,9	63,5	64,0	64,6	65,1	65,7	66,3	67,4
32	59,0	60,2	60,8	61,3	61,9	62,4	63,0	63,5	64,1	64,7	65,3	65,8	66,9
33	58,6	59,7	60,3	60,8	61,4	61,9	62,5	63,1	63,6	64,2	64,8	65,3	66,4
34	58,1	59,2	59,8	60,3	60,9	61,4	62,0	62,5	63,1	63,6	64,2	64,8	65,9
35	57,7	58,7	59,3	59,8	60,4	60,9	61,5	62,0	62,6	63,1	63,7	64,2	65,3
36	57,2	58,2	58,8	59,3	59,9	60,4	61,0	61,5	62,1	62,6	63,2	63,7	64,7
37	56,7	57,7	58,3	58,8	59,4	59,9	60,4	60,9	61,5	62,0	62,6	63,1	64,2
38	56,1	57,2	57,8	58,2	58,8	59,3	59,9	60,4	61,0	61,4	62,0	62,5	63,6
39	55,6	56,6	57,2	57,7	58,3	58,7	59,3	59,8	60,4	60,8	61,4	61,9	62,9
40	55,0	56,1	56,7	57,1	57,7	58,1	58,7	59,2	59,8	60,2	60,8	61,3	62,3
41	54,4	55,5	56,1	56,5	57,1	57,5	58,1	58,6	59,2	59,6	60,1	60,6	61,6
42	53,9	54,9	55,5	55,9	56,5	56,9	57,5	57,9	58,5	59,0	59,5	60,0	61,0
43	53,3	54,3	54,9	55,3	55,9	56,3	56,8	57,3	57,8	58,3	58,8	59,3	60,3
44	52,7	53,7	54,3	54,7	55,2	55,6	56,1	56,6	57,1	57,6	58,1	58,6	59,6
45	52,0	53,0	53,5	54,0	54,5	55,0	55,5	56,0	56,4	56,9	57,4	57,9	58,9

Collection du Bureau des longitudes - Volume 5



TABLES de NAVIGATION 1840 – 1980

Paul BEDEL
Professeur général de l'Enseignement Maritime (2e s)

Bureau des longitudes

© Bureau des longitudes, 2020

ISBN : 978-2-491688-02-8
ISSN : 2724-8372

La navigation astronomique bien que basée sur des principes relativement élémentaires, n'est pas exempte de calculs importants. Si les officiers des marines royales (certains, pour s'en tenir aux français, comme Fleurieu, Bougainville, Borda étaient de véritables mathématiciens) étaient plutôt bien formés et rodés à ces calculs, il en allait fort différemment dans la navigation marchande et encore plus dans la pêche au large, assurée par des artisans formés sur le terrain et non dans les prestigieuses écoles d'hydrographie.

Ainsi les méthodes de navigation devaient être avant tout systématiques et routinières afin d'être réalisées rapidement, avec justesse, dans des conditions souvent difficiles et par un personnel qui ne comprenait pas nécessairement le déroulement des calculs. Les tables étaient indispensables et n'étaient rien d'autre que des intermédiaires pré-calculés, afin de lire un résultat plutôt que de le calculer à partir de formules ou de tables plus fondamentales. C'est toujours un compromis entre deux labeurs qui dépend aussi des compétences et des outils à disposition du calculateur. Rien de bien surprenant pour des astronomes qui eux-mêmes ont été de grands utilisateurs de tables en tout genre.

En mathématique on utilise des tables assez simples, généralement à une dimension, avec une entrée, la quantité connue, et un résultat, la quantité inconnue. Les tables trigonométriques ou logarithmiques en sont les représentants les plus connus. Ce type de table était également fréquent en navigation, mais est loin d'en épuiser la variété comme le montre si bien l'ouvrage de P. Bedel. Outre les éphémérides et les tables mathématiques classiques, on trouvera ici une description de tables destinées à effectuer une multitude de corrections, des tables pour des combinaisons trigonométriques ou algébriques spécifiques. Des tables a deux, voire trois entrées n'étaient pas rares, et étaient donc volumineuses et plus difficile à utiliser. Une interpolation à plusieurs dimensions conduisait alors à saisir deux entrées pour chaque valeur de la dimension supérieure et des consultations de plusieurs sections de la table à reporter dans la feuille de calcul. La complexité du calcul, même pour une seule valeur, croissait très vite et imposait un déroulé rigoureux et quasi-mécanique, codifié dans des formulaires que l'usager suivait pas à pas.

L'ouvrage de P. Bedel, professeur de l'enseignement maritime, est à ma connaissance unique en son genre. Comme l'auteur l'indique dans son introduction, c'est un ouvrage austère par nature, et, après la lecture de quelques pages, il est difficile de le contredire sur ce point. Cette synthèse publiée en 2020 a l'avantage de concerner un sujet qui est clos, un bonheur pour l'historien. La production de tables pour la navigation, en dehors des éphémérides, n'a plus lieu d'être et un regard historique peut en embrasser toute l'étendue, au moins sur la période visée par l'auteur qui s'étend de 1840 à 1980. La première limite marque la fin de l'usage des distances lunaires et la découverte du principe des droites de hauteur de façon fortuite par T.H. Sumner en 1837. Les Éphémérides Nautiques et le Nautical Almanach cessent de publier les distances lunaires respectivement en 1905 et 1907. Le milieu du XIXe siècle est aussi le moment où les chronomètres de marine deviennent abordables pour la marine de commerce et donc disponibles sur tous les navires, résolvant de fait la question de la longitude.

L'autre borne est imposée par l'apparition des calculatrices électroniques et des ordinateurs individuels, suivie peu après par la géolocalisation par satellites. Les premières ont rendu obsolètes les tables de calcul et les formules logarithmiques et la seconde a remisé la technique même de mesure sur les étagères de l'histoire. Enfin presque !

C'est une histoire technique et humaine que nous donne P. Bedel. Technique, car les tables ne font qu'accompagner une méthode de mesure et un algorithme particulier pour mener les calculs. Le même ensemble de mesures pouvant être associé à différentes procédures de calculs selon le formulaire employé. Les trois mesures nécessaires dans la méthode des distances lunaires (deux hauteurs, une longueur d'arc) ont généré des dizaines de procédés de calculs pour obtenir l'heure du méridien de référence. Par exemple L'annexe 7.1 liste 30 façons d'écrire la formule fondamentale du triangle de position, qui ont été associées à environ autant de tables pour faciliter les calculs.

Histoire humaine également car chaque concepteur d'une méthode était persuadé qu'elle présentait une avancée réelle par rapport à celles de ces prédécesseurs, plus précise ou plus expéditive, d'où naquirent des échanges aussi vifs que passionnés entre spécialistes. Ainsi la nature humaine n'est pas absente d'un sujet à priori uniquement technique et ceci sans compter sur les rivalités nationales qui ne favorisaient pas l'objectivité des arguments.

L'ouvrage que nous publions aujourd'hui est une somme, résultat d'un travail qui a dû s'étendre sur de nombreuses années.

C'est un ouvrage volumineux, mais bien agencé entre la présentation générale et une série d'annexes comportant le détail des formules mathématiques et de nombreux exemples traités dans le détail pour chaque type de table.

Le Bureau des Longitudes est heureux de pouvoir en assurer la diffusion au sein de sa collection d'ouvrages et de rester ainsi en ligne avec la vocation de ses fondateurs.

François Mignard

Président du Bureau des longitudes

TABLES

de

NAVIGATION

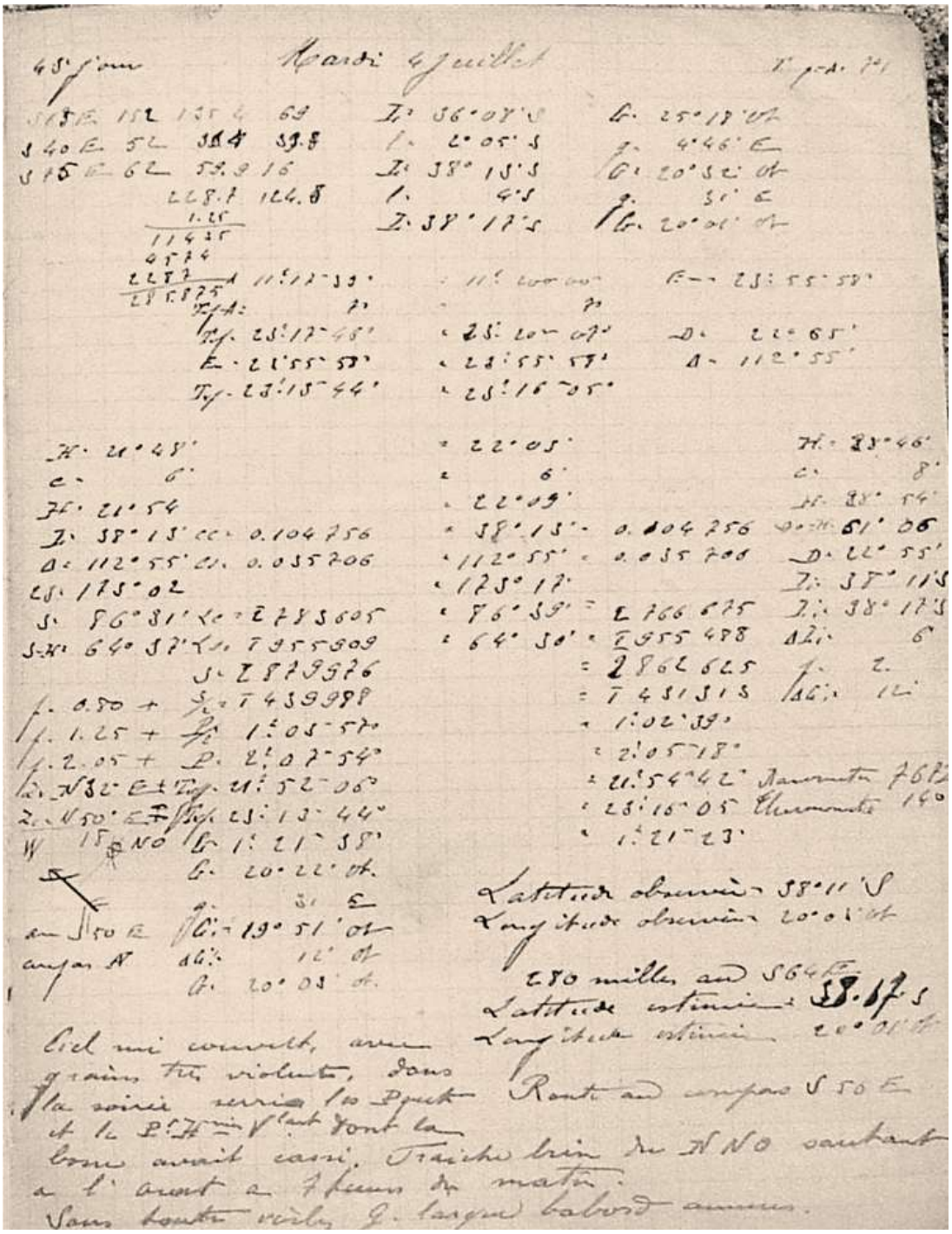
1840 – 1980

Paul BEDEL

Professeur général de l'Enseignement Maritime (2e s)

AVANT-PROPOS

Le trois-mâts barque *Buffon* a appareillé de Nantes le 22 mai 1905, à destination de Hobart en Tasmanie qu'il atteindra le 5 août, après 75 jours de mer. Le mardi 4 juillet 1905, alors qu'il est dans l'Atlantique Sud, son capitaine, Georges Ledru, fait ses observations astronomiques habituelles et calcule le point de midi dont le détail figure ci-dessous[1] et dont une transcription annotée est donnée en annexe 0.



[1] Une copie des cahiers de point de G. Ledru m'avait été confiée pour analyse par son petit-fils Jean-Pierre Ledru qui travaillait alors à la rédaction de son livre « Les enfants du Cap Horn » paru en 2013 aux éditions Cheminances.

À l'analyse, on peut reconnaître deux calculs d'angle horaire conduisant à la longitude et celui de l'observation méridienne donnant la latitude, le tout précédé d'un calcul de point estimé depuis midi la veille. Pour parvenir aux résultats, Georges Ledru utilise une table de logarithmes à six décimales ainsi qu'une table d'azimut, probablement celle conçue par le futur amiral Perrin. L'exercice est routinier et, malgré son apparente complexité, le calcul est facile à descendre pour ces capitaines au long cours dont l'essentiel de la formation était justement tournée vers la pratique des calculs nautiques qui faisaient l'objet d'un véritable « traitement de choc » par leurs professeurs. Outre la parfaite connaissance des tables utilisées et des règles de signes à appliquer, la maîtrise du calcul repose sur un entrainement intensif se traduisant par une descente sûre et régulière des lignes de chiffres sans jamais avoir à revenir en arrière ; ainsi était acquise la sûreté du calcul qui doit conduire au bon résultat dans un minimum de temps. Pour des raisons évidentes, il faut calculer juste et vite, les deux qualificatifs étant, dans une certaine mesure, contradictoires car c'est en allant – trop – vite que les risques d'erreurs augmentent.

Georges Ledru employait les méthodes classiques de l'époque et ses outils de calcul étaient ceux d'usage réglementaire dans les écoles d'hydrographie, c'est-à-dire la table de logarithmes et de navigation, outil généraliste, et une petite table auxiliaire dévolue au calcul d'azimut. On pouvait naturellement se satisfaire de ce minimum qui, néanmoins, permettait de faire face à tous les problèmes de navigation, quels qu'ils soient. La question de la sûreté de calcul et de sa rapidité restait cependant au centre des préoccupations et de nombreux chercheurs – officiers de marine, professeurs, capitaines au long cours, astronomes, scientifiques et ingénieurs – se sont affairés à tenter de simplifier le calcul autant que faire se pouvait : les solutions trouvées furent nombreuses, principalement sous forme de tables mais aussi d'abaques et, plus rarement, de machines.

C'est la saga de ces tables et abaques, génératrice de tant d'échanges passionnés entre praticiens et théoriciens de l'art de naviguer, qui a attiré ma curiosité. Sur la période que je me suis fixée, soit, approximativement, de 1840 à 1980, les recherches ont été soutenues et aboutirent à la mise au point d'une multitude de réalisations. Mon objectif a été d'essayer d'en reconstituer un inventaire – qui sera fatalement incomplet – et d'analyser les principales techniques opératoires employées. Les bornes de l'intervalle d'étude mentionnées ci-dessus correspondent d'un côté à la découverte de la notion de lieu de position astronomique par Thomas H. Sumner en 1837 et, de l'autre côté, à l'introduction des calculatrices électroniques dans l'enseignement et l'exécution des calculs nautiques au début des années 1980[2]. Ces dates constituent des limites perméables et je serai amené à faire quelques incursions dans un passé plus lointain mais aussi plus proche. Outre ces bornes dans le temps, je me suis exclusivement consacré à la détermination des éléments permettant de construire une droite de hauteur sur la carte marine dans des conditions ordinaires : les cas du traitement des grandes hauteurs – supérieures à 80° – et de la navigation polaire ne seront donc pas envisagés de même que les procédés de calcul du point par une méthode numérique directe (résolution du problème dit de C. Douwes).

Le sujet étant assez austère, il faut bien le reconnaître, j'ai choisi de le présenter en deux parties : un texte principal qui propose un classement et une présentation des principaux types d'outils de calcul de navigation suivi d'un recueil d'annexes. Afin que ce texte principal reste accessible, j'y ai limité au maximum les développements mathématiques, renvoyant le lecteur intéressé aux annexes qui présentent en détail l'architecture des réalisations les plus marquantes ou les plus originales ainsi que leurs modes opératoires. J'ai aussi évité volontairement le recours à un lourd appareil de notes de bas de page et de références, l'ensemble de mes sources étant répertorié dans l'index des tables et la bibliographie figurant en fin de première partie. L'histoire du point astronomique en mer a été écrite par plusieurs auteurs, et non des moindres, et il ne m'appartient pas de la réécrire. Le texte qui suit n'est donc pas un travail d'historien mais plutôt une recherche visant à exhumer des pratiques de navigation maritime relativement récentes puisqu'elles sont nées sensiblement au milieu du XIXe siècle mais tomberont en désuétude, et dans l'oubli qui suivra, 150 ans plus tard. C'est aussi une forme d'hommage à tous ceux qui ont apporté, en leur temps, un concours visant à faciliter la pratique de l'art de la navigation.

Annexe 0 : Transcription du calcul de point de midi du capitaine Ledru.

[2] L'usage des calculatrices a été officialisé par un arrêté du ministre de la Mer daté du 04/08/1981 ; du fait de l'existence de mesures transitoires, l'utilisation des tables de logarithmes a perduré de façon marginale pendant encore au moins une année.

Chapitre 1er

DROITE DE HAUTEUR

Présentation générale :

Le lieu pratique de position d'un navire, résultant de la mesure de la hauteur d'un astre à un instant donné, fut mis en évidence pour la première fois par l'américain Thomas Hubbard Sumner (1807-1873), capitaine du *Cabot*, petit navire de commerce, lors de son atterrissage sur la côte du Pays de Galles le 17 décembre 1837. Th. H. Sumner formalisa sa découverte, et son application pratique, dans un opuscule qui fut publié à Boston en 1843 sous le titre de « A New and Accurate Method of Finding a Ship's Position at Sea » ; ce petit ouvrage fut traduit en langue française et adapté par Joseph Barthet, qui se présente comme « ancien navigateur », et qui le publia en 1847 dans les « Annales Maritimes et Coloniales » sous le titre de « Méthode graphique pour faire le point en mer ». La découverte de Sumner s'est rapidement vulgarisée en Grande-Bretagne, où elle a fait l'objet de nombreux commentaires et analyses, à commencer par la note de H. Raper parue dans le Nautical Magazine en 1844, qui préfigure déjà les avancées ultérieures, notamment celles de Sir W. Thomson et de Marcq de Saint-Hilaire. L'utilisation de la découverte de Sumner, sous sa forme initiale, à bord des navires britanniques s'est progressivement généralisée et imposée au point d'occulter les perfectionnements qui y seront apportés ultérieurement. En France, la méthode semble avoir trouvé difficilement sa place : elle est simplement mentionnée dans la 2e édition du Traité de Navigation de V. M. Caillet, en 1857 ; curieusement, la mention disparaît ensuite des 3e et 4e éditions en 1861 et 1868 ; elle ne figure pas dans le Cours de Navigation et d'Hydrographie d'E. Dubois (2e édition en 1869), pas plus que dans le Cours de Navigation de L. Pagel (1878), ceci malgré la publication des travaux de Marcq de Saint-Hilaire en 1875 et des traités relatifs à la « Nouvelle Navigation » d'A. Ledieu et d'A. Yvon-Villarceau et H. Aved de Magnac en 1877. Cependant, ce serait à partir de 1868 que l'on aurait commencé à enseigner dans la Marine française la notion de lieu de position obtenu suite à la mesure d'une hauteur d'astre à un instant donné.

Un lieu de position est un ensemble de positions possibles, à un instant donné, d'un observateur effectuant une mesure destinée à le situer à la surface de la Terre. En navigation côtière, il peut s'agir d'une mesure de la distance d'un amer remarquable ou d'une mesure de son azimut. Dans le premier cas, le lieu de position est assimilable à un arc de cercle centré sur l'amer et dont le rayon est égal à la distance mesurée, dans le second cas, on peut l'assimiler à la demi-droite issue de l'amer formant avec le méridien un angle égal à l'azimut observé. Si on a pris soin d'effectuer les deux observations au même instant, la position de l'observateur, mobile ou non, se situe à l'intersection des deux lieux. Ces lieux pratiques sont faciles à construire sur la carte marine : les effets de courbure de la Terre sont négligeables en navigation côtière, le plan de la carte s'assimilant directement à la surface de la zone de navigation.

En navigation astronomique, l'ensemble de positions mis en évidence par Th. H. Sumner se définit comme suit : à partir de la mesure de la hauteur H d'un astre au-dessus de l'horizon à un instant donné, le lieu de position de l'observateur est le petit cercle (C) de la sphère terrestre, centré sur la projection A de l'astre à cet instant, dont le rayon est égal à la distance zénithale de l'astre ou complément de la hauteur. Sumner a appelé le cercle ainsi défini « parallèle d'égale hauteur » ; en France, on a rapidement parlé de « cercle de hauteur » (figure 1-1). Ce cercle de la sphère a pour image sur la carte marine une courbe, la « courbe de hauteur ». D'une manière générale, le cercle de hauteur embrasse une zone de très grande étendue et, pratiquement, on n'en considèrera qu'un arc relativement court situé au voisinage de la position estimée du navire Z_e. Sous certaines conditions, que l'on précisera, on peut admettre que l'arc de courbe de hauteur, correspondant à l'arc utile du cercle de hauteur est assimilable à un segment de droite. Ce segment, repéré (DH) sur la figure 1-2, constitue le lieu pratique de position du navire sur la carte et est appelé, en France, « droite de hauteur », les américains et les britanniques ayant conservé l'appellation de « Sumner's Line ».

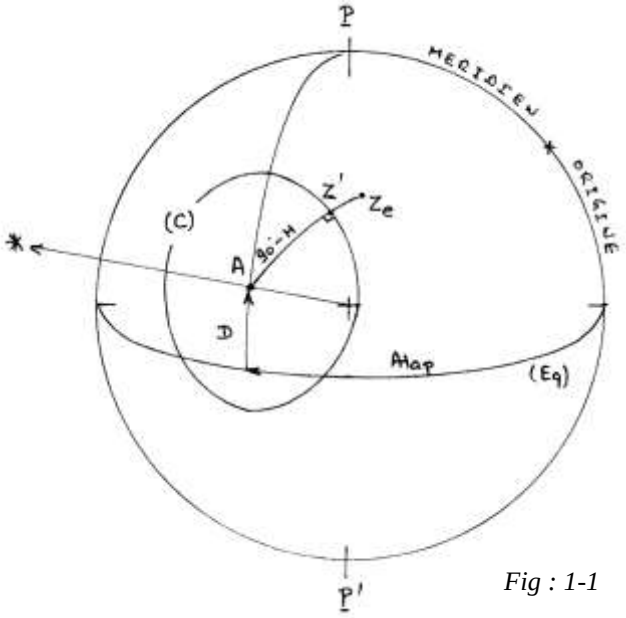


Fig : 1-1

Plusieurs procédés sont utilisables pour construire ce lieu pratique de position du navire sur la carte marine. Tous sont basés sur la connaissance d'une position approchée du navire, qui peut être la position estimée ou une position voisine – le point auxiliaire – dont les coordonnées sont judicieusement choisies pour simplifier les opérations, à partir de laquelle on calcule les « éléments de la droite de hauteur » c'est-à-dire :

- deux points du lieu position qui définiront une sécante (ou corde) à la courbe de hauteur, ou,
- un point unique, le point déterminatif, et la direction du lieu de position qui définiront une tangente à la courbe de hauteur.

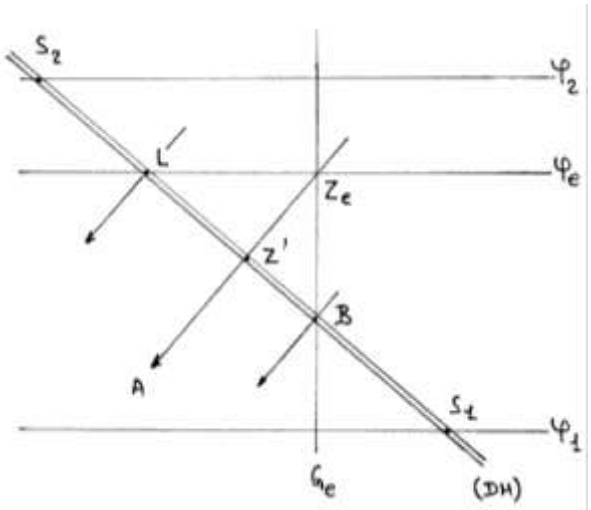


Fig : 1-2

La premier procédé est celui utilisé par Th. H. Sumner qui, en multipliant les points de calcul, l'amena à constater et formaliser sa découverte. On détermine alors deux points arbitraires de la courbe, S_1 et S_2 dont, généralement, on fixe les latitudes φ_1 et φ_2 qui peuvent être les deux valeurs entières encadrant la latitude estimée φ_e, et dont on calcule les longitudes correspondantes. Le lieu pratique est le segment de droite (DH) qui joint les deux points (figure 1-2). On peut aussi fixer les longitudes des deux points et calculer les latitudes correspondantes ; cette seconde façon de faire n'est pas employée en pratique.

La détermination de la droite par point déterminatif et direction, plus commode, pressentie dès 1844 par H. Raper, fut mise au point à la fin des années 1860 en Grande Bretagne par Alfred Challice Johnson, Naval Instructor de la

Royal Navy, et, en France, sensiblement à la même époque et, indépendamment semble-t-il, par André Fasci, professeur d'hydrographie à Nice. Le point déterminatif peut résulter :

- de l'intersection du parallèle estimé (latitude φ_e) et du cercle de hauteur ; sa longitude est calculée et simultanément on détermine l'azimut de l'astre ; la droite de hauteur (DH) passe par ce point et est orientée perpendiculairement à la direction de l'astre ; le point porte traditionnellement le nom de « point déterminatif Lalande » et est repéré par la lettre L sur la figure 1-2 ;
- de l'intersection du méridien estimé (longitude G_e) et du cercle de hauteur ; sa latitude est calculée et on détermine de même l'azimut de l'astre puis on construit la droite (DH) selon un procédé identique ; ce point porte traditionnellement le nom de « point déterminatif Borda » et est repéré par la lettre B sur la figure 1-2.

Les références à l'astronome Jérôme Lalande et au savant Jean-Charles de Borda trouvent leur origine dans les méthodes de calculs indirectes de latitude par utilisation de « fausses positions » imaginées à la fin du XVIIIe siècle : Lalande calculait des angles horaires (d'où l'on déduit des longitudes) à partir de latitudes arbitraires et Borda avait introduit le calcul de latitudes à partir d'angles horaires arbitraires.

On remarquera que ces deux méthodes de calcul sont complémentaires l'une de l'autre et qu'un choix entre les deux s'impose selon la valeur de l'azimut de l'astre : il conviendra d'utiliser le point Lalande si l'astre est proche du premier vertical (c'est-à-dire dans l'Est ou dans l'Ouest) et le point Borda lorsque l'astre est proche du méridien. La première méthode est qualifiée de « chronometer method » par les britanniques, la seconde de « ex-meridian method ». Le Révérend William Hall, aumônier et Naval Instructor de la Royal Navy qualifie, en 1913, la première de « *good on large bearings, fails near the meridian* » et la seconde de « *good near the meridian, fails on large bearings* ».

En 1875, le français Adolphe Marcq de Blond de Saint-Hilaire (1832-1889), alors capitaine de frégate, mit au point une méthode simple de construction de la droite de hauteur, toujours par point déterminatif et azimut, qui consiste à fixer le point déterminatif à l'intersection du vertical estimé de l'astre (Z_eA sur la figure 1-1) et du cercle de hauteur. Outre la détermination de l'azimut, le calcul revient à évaluer la distance Z_eZ' (figure 1-2). Z' est le point déterminatif Marcq de Saint-Hilaire (ou plus simplement Marcq). Cette distance Z_eZ' n'a pas été caractérisée par un nom en France ; les britanniques l'ont baptisée « intercept » qui n'a donc pas son équivalent en langue française. Par commodité, nous emploierons ce mot dans la suite du texte.

On constatera que les calculs à effectuer ne sont pas plus compliqués (bien au contraire) que pour obtenir les points déterminatifs Lalande ou Borda et que la méthode possède le précieux avantage d'être applicable dans tous les cas de figure puisque le point déterminatif résulte de l'intersection de deux courbes orthogonales. En outre, le point déterminatif Marcq possède la caractéristique d'être toujours plus proche du point réel du navire que le point estimé (qualité que n'ont pas systématiquement les points déterminatifs Lalande et Borda). W. Hall qualifie la méthode de « *good on all bearings, fails in no case* ». Compte tenu de ces avantages, ce dernier processus de calcul va progressivement devenir d'utilisation universelle ; néanmoins, s'il fut adopté sans retard dans les marines militaires qui en virent rapidement les avantages, sa mise en application sera beaucoup plus laborieuse à bord des navires de commerce où il faudra attendre le tournant de la seconde guerre mondiale pour constater la généralisation de son emploi sous quasiment tous les pavillons.

Pour terminer cette rapide présentation du concept de droite de hauteur, indiquons, les limites de validité de ce lieu de position pratique :

- droite et courbe de hauteur sont pratiquement confondues jusqu'à 30 milles de part et d'autre du point déterminatif tant que la latitude et la hauteur sont respectivement inférieures à 60° et 80° ; cette distance augmente dès lors que latitude et hauteur diminuent en valeur absolue ;
- dans le cas de l'application de la méthode Marcq, l'intercept ne doit pas excéder 30 milles ; si tel est le cas, il est conseillé de reprendre les calculs à partir du point déterminatif trouvé ;

- dans le cas de l'utilisation de la méthode de Sumner (sécante), la droite trouvée sera d'autant plus proche de la courbe que la distance entre les deux points de calcul sera faible ; une différence de latitude de 1° entre ces deux points est un repère commode mais constitue un maximum.

Ces limites doivent rester présentes à l'esprit du navigateur, notamment lorsqu'il utilise des tables de calcul basées sur l'emploi d'un point auxiliaire qui peuvent conduire à trouver des intercepts de grande valeur.

Observation d'un astre en vue de l'obtention d'un lieu de position :

Les astres observables dans ce but sont le Soleil, la Lune, les quatre planètes dites de navigation, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne, et environ 80 étoiles répertoriées dans les almanachs nautiques courants ; sur ce total, seule une petite moitié, parmi les plus brillantes, sont couramment utilisées.

La phase d'observation d'un astre fait appel aux deux instruments fondamentaux suivants :

- un sextant (ou un octant) pour mesurer la hauteur de l'astre au-dessus de l'horizon visuel avec une précision au moins égale à la minute d'arc,
- un chronomètre permettant de connaître à tout instant l'heure d'un méridien de référence à la seconde d'heure près.

La hauteur mesurée au sextant sera corrigée de l'erreur instrumentale et des effets de la réfraction astronomique, de la dépression apparente de l'horizon et le cas échéant du demi-diamètre et de la parallaxe pour ramener l'observation au centre de l'astre et au centre de la terre ; la hauteur ainsi corrigée est la hauteur vraie qui intervient dans les différents calculs. Elle sera dans le texte notée H_v ou simplement H lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté à redouter.

Un chronomètre ne se remet jamais à l'heure. Son état absolu, c'est-à-dire la différence entre l'heure du méridien de référence et l'heure indiquée par le chronomètre est évalué et contrôlé aussi souvent que possible : cette évaluation était l'une des préoccupations majeures des capitaines. L'apparition des récepteurs embarqués et des radiosignaux horaires, au début du XXe siècle (1905 aux États-Unis et 1910 en France, depuis l'émetteur de la Tour Eiffel), simplifia grandement le problème mais ce genre d'équipement ne se généralisera à bord des navires de commerce qu'après le premier conflit mondial. Sans récepteur radio, l'état absolu du chronomètre pouvait se déterminer au port, par comparaison avec le signal d'un observatoire (time-ball), par comparaison avec les instruments d'un horloger portuaire, par diverses observations et calculs connaissant les coordonnées géographiques précises de la position du navire (hauteurs correspondantes par exemple) ; d'autres méthodes étaient également applicables à la mer, en vue de terre. De ces différentes observations, on déduisait la marche diurne du chronomètre, c'est-à-dire la variation moyenne de l'état absolu en 24 heures. La marche diurne permettait ainsi d'estimer l'état absolu à la mer jusqu'au prochain recalage en vue de terre. Ce recalage est en effet nécessaire car la marche diurne est variable en fonction, notamment, de la température et de la viscosité des huiles qui augmente avec leur vieillissement ; les mouvements, parfois brutaux, du navire peuvent également provoquer des variations aléatoires de la marche. Afin de réduire les risques liés à ces variations plus ou moins prévisibles de la marche, les navires étaient équipés d'au moins deux chronomètres permettant ainsi un contrôle mutuel. Précisons ici que la fiabilité de fonctionnement d'un chronomètre courant ne sera complètement acquise qu'après 1850. L'équipement en chronomètres se généralisera au cours de la première moitié du XIXe siècle à bord des navires de guerre ; cet équipement, en quantité comme en qualité, sera plus lent à bord des navires de commerce.

À l'instant où on mesure la hauteur de l'astre au sextant, on note l'heure indiquée par le chronomètre ; connaissant son état absolu à cet instant, on détermine l'heure correspondante au méridien de référence. Cette heure, que l'on note Tcp, soit temps civil au premier méridien – aujourd'hui, il s'agit de l'heure UTC, temps universel coordonné –, servira d'argument d'entrée dans un almanach nautique (par exemple les Éphémérides nautiques ou le Nautical Almanac) donnant accès aux coordonnées de la projection terrestre de l'astre observé.

Principe du calcul des éléments d'une droite de hauteur :

Les éléments fondamentaux de calcul et les différentes formulations utilisées sont explicités en annexe 1-1.

Quelle que soit la méthode qui sera utilisée pour construire la droite de hauteur sur la carte, la phase de calcul commence toujours par la détermination des coordonnées de la projection terrestre de l'astre observé A à l'instant de l'observation Tcp. Un almanach nautique permet de trouver (figure 1-1) :

- l'angle horaire de l'astre au méridien origine (ou premier méridien), noté AHap, qui est la longitude de A,
- la déclinaison D qui est la latitude de A.

On a également pris soin de relever les coordonnées de la position estimée Z_e à l'instant de l'observation dont la latitude est φ_e et la longitude G_e.

La suite des calculs consiste à rechercher les éléments inconnus d'un triangle sphérique particulier construit sur la sphère terrestre, le triangle de position de l'astre. Considérons, à un instant donné, un observateur situé en Z sur la sphère terrestre, P le pôle de l'hémisphère, Nord ou Sud, de cet observateur (ou pôle élevé) et un astre dont la projection terrestre (ou point substellaire) est en A. Le triangle de position de l'astre est le triangle sphérique PZA (figure 1-3).

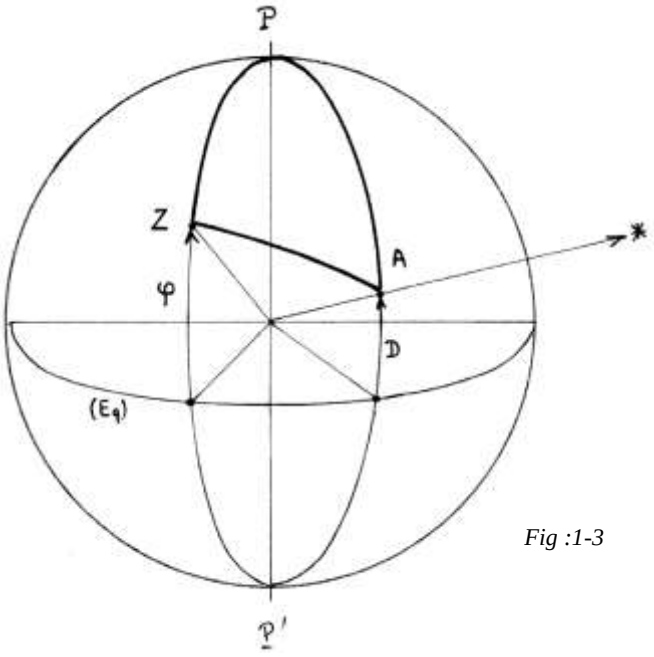


Fig :1-3

Cette définition du triangle de position à partir du pôle élevé est d'usage quasi général jusqu'aux années 1950 car il limite les valeurs de latitude à l'intervalle $[0°, 90°]$, simplifiant ainsi la construction et l'usage des tables ; la construction du triangle à partir du seul pôle terrestre Nord s'est ensuite généralisée, cette dernière présentation permettant d'uniformiser l'ensemble des règles de signe facilitant ainsi le traitement algébrique de tous les problèmes.

À ce stade des opérations, on dispose de la hauteur vraie H (ou H_v) de l'astre et des coordonnées de sa projection terrestre ainsi que d'une position approchée Z_e.

Quatre options sont possibles pour construire la droite de hauteur correspondant à l'observation :

1) déterminer le point déterminatif Lalande et calculer l'azimut,
2) ou déterminer le point déterminatif Borda et calculer l'azimut,
3) ou déterminer le point déterminatif Marcq et calculer l'azimut,

4) ou encore utiliser la méthode de Sumner en déterminant les coordonnées de deux points de la courbe que l'on assimilera à la sécante passant par ces deux points.

Pour chacune de ces options, les opérations consistent à calculer, à l'aide des formules de trigonométrie sphérique, les éléments inconnus du triangle de position PZA (figure 1-3), en donnant au point Z les coordonnées afférentes à chaque option.

Résumons les opérations relatives à chacune des quatre options indiquées ci-dessus :

Lalande :

Le point déterminatif L (figure 1-2) a pour latitude la latitude estimée φ_e, sa longitude est à calculer. Sur la sphère de la figure 1-3, le point L est alors situé en Z ; les trois côtés du triangle PA, AZ et PZ sont connus et égaux respectivement aux compléments de la déclinaison D, de la hauteur H et de la latitude estimée φ_e. À partir de ces éléments, on calcule les angles en P et en Z qui sont l'angle au pôle et l'angle au zénith.

L'angle au zénith conduit à l'azimut de l'astre et l'angle au pôle à la longitude du point L par comparaison avec l'angle horaire au premier méridien AHap.

Cette méthode de calcul fut très largement employée dès le début du XIXe siècle sous son aspect initial de calcul de longitude connaissant l'heure et la latitude. L'usage s'en est ensuite étendu au point déterminatif tout en conservant une connotation « horaire » (le time sight, ou chronometer method, des Britanniques). Cette méthode de traitement d'une observation astronomique, à la condition qu'elle soit suffisamment éloignée du méridien, est à la base des procédés de calcul du point élaborés par Louis Pagel (1847) et Alfred C. Johnson (vers 1870) sur lesquels nous reviendrons. Une formulation relativement simple liée à une quasi absence de règle de signe a assuré la pérennité de la méthode qui fut régulièrement utilisée jusque dans les années 1950 voire même un peu plus tard.

Borda :

La longitude du point déterminatif B (figure 1-2) est la longitude estimée G_e, sa latitude est à calculer. Sur la sphère de la figure 1-3, c'est le point B qui est alors situé en Z. La donnée longitude conduit à l'angle en P par comparaison avec l'angle horaire au premier méridien AHap. On connait aussi deux côtés, PA et AZ, compléments respectifs de la déclinaison D et de la hauteur H ; connaissant deux côtés et un angle, on peut calculer le côté inconnu PZ, complément de la latitude cherchée, et l'angle au zénith A_z qui conduira à l'azimut.

Le point déterminatif Borda, obtenu par la méthode du méridien estimé (ou ex-meridian method), fut d'utilisation beaucoup moins courante, du fait d'un calcul plus complexe et des difficultés inhérentes aux règles de signe et de détermination des arcs. Par contre, on utilisera systématiquement cette méthode du méridien estimé pour traiter les observations voisines du méridien – ou circumméridiennes – à l'aide d'une formulation approchée et simplifiée.

Marcq :

Le point de calcul est ici le point estimé Z_e qui est alors situé en Z sur la sphère de la figure 1-3. Les éléments connus du triangle sont les côtés PZ et PA, compléments respectifs de la latitude estimée φ_e et de la déclinaison D, et l'angle en P issu de l'angle horaire AHap et de la longitude estimée G_e. On connait de même deux côtés et un angle ; on peut alors calculer le côté inconnu ZA et l'angle au zénith qui conduira à l'azimut. Le côté ZA est le complément de la hauteur estimée (ou distance zénithale estimée) donnant accès à la hauteur estimée H_e. Cette hauteur estimée est celle sous laquelle on observerait l'astre si l'observateur se trouve réellement au point estimé.

En se reportant à la figure 1-1, on vérifie que l'intercept Z_eZ' est égal à la différence entre hauteurs vraie et estimée. Cette distance est algébrique, construite à partir du point estimé, positivement vers l'astre, négativement à l'opposé.

La méthode Marcq est générale et applicable dans tous les cas de figure dès lors que la hauteur de l'astre est inférieure à 80°.

Sumner :

Les deux points définissant la droite de hauteur sont calculés en fixant deux latitudes encadrant la latitude estimée, distantes de 20' à 1° et en calculant les longitudes correspondantes, comme dans le processus Lalande.

Trigonométrie, logarithmes et tables :

Jusqu'à l'avènement et la généralisation des calculatrices scientifiques et des ordinateurs personnels, les différentes formules de trigonométrie sphérique étaient calculées à l'aide de tables de logarithmes dont la définition, les conventions d'utilisation et les usages sont indiqués en annexes 1-2 et 1-3. La mutation, irréversible, s'est effectuée à partir des années 1975. Pour pouvoir être calculées commodément par logarithmes, les formules utilisées doivent, autant que possible, être mises sous forme logarithmique, c'est-à-dire ne comporter que les multiplications et/ou divisions de rapports trigonométriques ; les équations de base seront donc modifiées, à l'aide de diverses transformations algébriques ou géométriques, afin de tenter de ne faire apparaître que ces opérations.

Outre les logarithmes des nombres et des rapports trigonométriques fondamentaux, sinus, cosinus, tangente et cotangente, les tables donnent aussi les logarithmes des sécantes et cosécantes, inverses respectifs du cosinus et du sinus. Les anglo-saxons utilisent également les fonctions sinus verse ou versine et demi-sinus verse ou haversine ; ces fonctions ont l'avantage d'être toujours à valeurs positives. La fonction versine, utilisée par Cornelis Douwes, de l'Amirauté d'Amsterdam, a été introduite en Grande-Bretagne en 1759 et remarquée par l'astronome royal Nevil Maskelyne qui en donnera des tables (log rising) en 1767. En vue des calculs de navigation, elle a aussi été mise en œuvre par l'astronome et mathématicien espagnol Josef de Mendoza y Rios (1761-1816) qui en publiera des tables en 1800. L'usage de la fonction haversine, dont les valeurs restent comprises entre 0 et 1, s'est ensuite généralisé en Grande-Bretagne sous l'impulsion du révérend James Inman (1776-1859), aumônier et professeur de mathématiques au Royal Naval College de Porstmouth.

D'une manière générale, au XIXe siècle, et jusqu'à la seconde guerre mondiale, il était exigé des futurs officiers des marines militaire et marchande de savoir calculer les différentes formules de navigation astronomique à l'aide d'une simple table des logarithmes des nombres et des principaux rapports trigonométriques. Les tables en usage donnaient les logarithmes avec 5, 6 ou 7 décimales. En France, les logarithmes à 6 décimales, et le principe de leur unique usage, ont été maintenus dans l'enseignement maritime civil jusqu'à la fin ; les pays anglo-saxons sont passés, dès le début du XXe siècle, aux logarithmes à 5 décimales. Indiquons ici qu'à la fin du XIXe siècle, la précision de calcul exigée à l'École navale était la seconde d'arc et qu'il était tout juste toléré d'effectuer un simple calcul d'azimut autrement que par logarithmes.

En France, au XIXe siècle, les tables de logarithmes destinées, entre autre, aux calculs de navigation et d'astronomie nautique sont de forts ouvrages comme les tables de Jean-François Callet (1783) ou de Valentin Bagay (1829) qui donnent les logarithmes des nombres et des rapports trigonométriques avec 7 décimales. Les premières seront rééditées de multiples fois, enrichies, à partir de 1855, d'un recueil de tables nautiques conçu par le professeur d'hydrographie E. Boitard et le lieutenant de vaisseau A. Ansart-Deusy, tous deux professeurs à l'École navale. En 1846, l'examinateur de la Marine Vincent-Marie Caillet – fils de Pierre Caillet, professeur d'hydrographie à Paimboeuf – publie un Traité de Navigation à l'usage des officiers de la marine militaire et de la marine du commerce (ce traité succède à celui d'Etienne Bezout revu par de Rossel en 1814, réglementaire à l'École navale) et, prépare des « tables de logarithmes et co-logarithmes des nombres et des lignes trigonométriques à 6 décimales suivies d'un recueil de tables astronomiques et nautiques » ; ces tables sont publiées en 1854 et feront l'objet de nombreux retirages. Elles deviendront l'outil de calcul de base à bord des navires français jusqu'à la publication des tables de Georges Friocourt en 1899 ; ces dernières furent aussi reimprimées de nombreuses fois et restèrent réglementaires aux examens de la marine marchande jusqu'au début des années 1980. Toujours en France, on peut également citer l'ouvrage de Joseph Ducom « Cours d'observations nautiques », publié en 1820 et réédité en 1835 dont la seconde partie comporte environ 350 pages de tables permettant de résoudre tous les problèmes de navigation et d'astronomie nautique ; les logarithmes y sont exprimés avec 6 décimales.

En Grande-Bretagne, on trouve, tout d'abord les « Tables Requisite to be used with the Nautical Ephemeris for Finding Latitude and Longitude at Sea » de l'astronome royal Nevil Maskelyne, publiées en 1767 puis rééditées en 1781 et 1802 ; ce sont essentiellement des tables de logarithmes permettant de résoudre les problèmes de navigation et d'astronomie nautique tels qu'ils se posaient à l'époque : distances lunaires, longitude par l'angle horaire, latitude par deux mesures de hauteur et l'intervalle de temps etc ; ces tables comportaient également des explications détaillées sur les méthodes de résolution des principaux problèmes. Elles constituèrent le modèle des tables de navigation d'usage général qui furent publiées en Grande Bretagne au XIXe siècle. On trouve ensuite, dans l'ordre chronologique, l'ouvrage de John William Norie (1772-1843), mathématicien, hydrographe et éditeur d'ouvrages nautiques, qui publie en 1803 « A Complete Set of Nautical Tables and Epitome of Practical Navigation », ouvrage réunissant un ensemble de définitions, règles, formules et procédures opératoires en navigation et astronomie nautique ainsi que les tables nécessaires à tous les calculs. L'ouvrage a été régulièrement complété, actualisé et remanié, faisant l'objet de nombreux tirages et rééditions. Il a notamment été divisé en deux volumes (texte et tables) à la fin du XIXe siècle ; seule l'édition des tables a perduré jusqu'à nos jours (réédition en 2007 sous le titre de « Norie's Nautical Tables »). En 1821, on relève la publication de « Navigation and Nautical Astronomy for the Use of British Seamen » de James Inman. La partie tables de calcul de l'ouvrage, communément appelé « Inman's Nautical Tables », publiée séparément à partir de 1830, sera régulièrement enrichie et mise à jour – notamment par le Révérend W. Hall en 1910 et par l'examinateur de la Royal Navy H. B. Goodwin en 1918 – et rééditée jusqu'à la fin des années 1940 ; ces tables étaient d'usage réglementaire dans la Royal Navy. Vient après le célèbre ouvrage de Henry Raper (1799-1859), lieutenant de la Royal Navy, qui publie en 1840 un ouvrage de conception analogue à celui de J. W. Norie. Régulièrement actualisé, il fait l'objet de multiples rééditions et retirages jusque dans les années 1920. Pour terminer avec l'édition britannique, on remarque, pour l'époque considérée, la publication de « A Self Instructor in Navigation and Nautical Astronomy » par William Henry Rosser en 1863. Le livre est conçu pour la préparation aux examens de la marine marchande britannique ; la forme est identique à celle des ouvrages de Norie et Raper, l'exposé en étant peut-être encore plus synthétique. C'est aussi un classique de la littérature technique maritime de l'époque mais il ne semble pas qu'il ait été réédité au-delà de la fin du XIXe siècle. Notons que, pour l'ensemble des tables britanniques citées, les logarithmes sont exprimés avec 6 décimales ; les tables de Inman et Raper permettent de plus de travailler directement avec les fonctions haversine (ou « square of the sine of the half arc »). Les « Requisite Tables » de Percy L. H. Davis construites pour un calcul précis et concis de la hauteur estimée, selon la méthode Marcq, à l'aide de la fonction haversine, paraîtront en 1905 ; l'emploi de ces tables deviendra aussi réglementaire dans la Royal Navy et imposera l'utilisation des logarithmes à 5 décimales.

Enfin, l'exposé serait incomplet si l'on ne mentionnait pas le « Bowditch » ou, à l'époque considérée, « The New American Practical Navigator », dont la première édition est publiée en 1802 aux États-Unis ; l'auteur en est Nathaniel Bowditch (1773-1838), navigateur et scientifique autodidacte. Dans ses premières éditions, l'ouvrage présente de nombreux points communs avec les ouvrages britanniques cités ci-dessus, en ce sens qu'il présente, en un seul volume, l'ensemble des méthodes et procédures de calcul puis les tables nécessaires à leur résolution. La présentation et la rédaction en sont cependant nettement plus claires et aérées ; on note que les logarithmes sont exprimés avec 5 décimales. La découverte de Sumner ne fait son apparition dans le Bowditch qu'à partir de la 25e édition, en 1855 : elle est alors traitée en une demi-page sous le titre « to find the position of a ship on a line of bearing ». En 1868, l'ouvrage passe sous le contrôle de l'US Navy Hydrographic Office qui a acheté les droits d'auteur aux descendants de N. Bowditch. Sous le titre de « American Practical Navigator », le « Bowditch » est mis à jour sans discontinuité – la dernière édition a été publiée en 2017 – et constitue, toujours aujourd'hui, un ouvrage de référence mondial dans le domaine de la navigation.

Recherche d'outils de calcul plus rapides et plus sûrs :

Dès la fin du XIXe siècle, la théorie de la détermination astronomique du point par lieux de position est achevée et n'évoluera quasiment plus jusqu'à l'avènement des calculateurs électroniques qui permettront alors d'envisager de nouveaux concepts. Cette « nouvelle navigation astronomique » ainsi qualifiée par l'astronome A. Yvon-Villarceau en 1877, s'imposera rapidement à bord des navires de guerre grâce, notamment, à la culture scientifique des officiers de marine qui ont saisi sans délais tous les avantages qu'ils pouvaient en tirer, en termes de sécurité de la navigation. Les officiers de marine marchande, dont le niveau initial d'instruction est souvent bien inférieur à celui de leurs homologues militaires, ont été beaucoup plus longs à adopter ces nouvelles méthodes.

Rapidement, des recherches visant à développer de nouveaux outils de calcul vont se mettre en place dans le double but de raccourcir la durée des calculs et d'améliorer la fiabilité des résultats – ou diminuer les chances d'erreur disait-on à l'époque –. Toutes nationalités confondues, les chercheurs étaient souvent les principaux intéressés, officiers de marine de guerre et capitaines au long cours ; des scientifiques ont également apporté leur contribution et, d'une certaine façon, leur caution, sans oublier les nombreux professeurs des établissements de formation maritime civils et militaires qui participèrent largement à la construction de l'édifice. Si les premières tables d'angles horaires, à triple argument, font leur apparition à la fin du XVIIIe siècle, les outils de calculs courants qui font l'objet de cette étude ne se développeront réellement qu'à partir du dernier quart du XIXe siècle.

Annexe 1-1 : Définitions et éléments fondamentaux de calculs : coordonnées géographiques d'un astre, triangle de position d'un astre, formules de calcul des points déterminatifs Lalande, Borda et Marcq, décomposition du triangle de position en deux triangles rectangles, exemples de calcul, latitude aux passages au méridien, calcul de variation de coordonnées.
Annexe 1-2 : Logarithmes : calcul logarithmique, notations et règles.
Annexe 1-3 : Tables numériques : définitions, conventions, interpolations, logarithmes proportionnels.

Chapitre 2

QUELQUES PRÉCURSEURS

Introduction :

Les avancées consécutives aux découvertes de Sumner (1837) puis de Marcq de Saint-Hilaire (1875) ne sont rentrées dans les usages courant de navigation qu'avec un certain retard, notamment, nous l'avons déjà souligné, à bord des navires de commerce. Les marins sont en effet restés longtemps attachés à la détermination séparée de la latitude et de la longitude. À l'époque de la découverte de Sumner, la latitude se détermine facilement à la mer suite à une mesure de hauteur du Soleil au sextant (ou octant) à l'instant de son passage au méridien estimé ; tout autre astre (Lune, planète ou étoile) passant au méridien du navire peut aussi servir à déterminer la latitude suivant le même principe. On peut également utiliser, dans l'hémisphère Nord, une mesure de hauteur de l'Étoile polaire et obtenir directement la latitude après quelques opérations de correction.

La longitude d'un lieu se détermine par comparaison entre l'angle horaire local AHag d'un astre, issu d'une mesure et d'un calcul, et l'angle horaire au premier méridien[3] (ou méridien origine ou encore de référence) AHap de ce même astre au même instant ; cet angle horaire est donné par un almanach nautique en fonction de l'heure au méridien de référence. Le principe est simple, l'angle horaire local est relativement facile à déterminer, mais l'accès à l'heure du méridien origine est lié à l'utilisation d'un « garde-temps » précis ou d'une méthode permettant de le calculer. Employée conjointement avec une bonne montre, la méthode des distances lunaires, mise au point au cours du XVIIIe siècle, permet de retrouver cette heure par comparaison entre une distance angulaire mesurée entre la Lune et le Soleil (ou une étoile zodiacale) et cette même distance calculée et mise en table dans un almanach nautique en fonction du temps du méridien origine ; on peut ainsi recaler la montre sur l'heure de ce méridien. Cette méthode fait appel à des observations délicates et des calculs longs et complexes : elle est donc réservée à des observateurs confirmés maîtrisant les méthodes de calcul numérique ; la méthode est relativement peu précise, puisqu'on admet généralement qu'un bon observateur ne pouvait obtenir l'heure qu'à une minute près, donc la longitude à 15' d'arc près. Notons également que la méthode n'est pas applicable au voisinage des nouvelles lunes.

Le chronomètre va pouvoir donner accès directement à l'heure du méridien de référence. Durant la première moitié du XIXe siècle, l'instrument, coûteux et fragile, n'est pas d'une fiabilité absolue. Il était donc nécessaire de contrôler sa marche aussi fréquemment que possible, à la mer, par la méthode des distances lunaires dont le niveau de précision est du même ordre de grandeur que celui du chronomètre à cette époque. Sur ce point, on relève dans l'édition de 1861 du « Traité de Navigation » de V.-M. Caillet :

> « *Les montres marines fournissent, sans contredit, le moyen le plus simple qu'on ait d'obtenir l'heure de Paris à un instant quelconque. Mais ce procédé ne suffit pas, parce qu'un grand nombre de navires ne sont pas munis de chronomètres. D'ailleurs, ces instruments sont susceptibles de se déranger, et, à moins d'en posséder plusieurs pour les comparer ensemble, on ne saurait comment reconnaître les erreurs auxquelles on est exposé. Il est donc indispensable d'avoir une autre méthode basée seulement sur les observations astronomiques, et l'on trouve, dans les distances lunaires, une solution du problème, praticable à la mer*. »

D'une manière générale, cette procédure est bien suivie dans les marines militaires où les officiers possèdent le savoir-faire nécessaire. On remarque aussi que les navires de guerre se voient équiper au fur et à mesure de plusieurs chronomètres dont on compare les indications. On a noté, au chapitre précédent, que l'usage du chronomètre a été beaucoup plus lent à s'installer à bord des navires de commerce où, de plus, la pratique de la méthode des distances lunaires était moins courante : une formation sans doute insuffisante (ou inadaptée) des officiers et l'inertie, résultant du poids des habitudes et traditions, en sont probablement à l'origine. L'usage, à bord des navires de commerce, était donc de ne déterminer au large le point qu'une fois par jour à midi en observant

[3] Aux époques considérées, le premier méridien utilisé à bord des navires français est d'abord celui de Paris. En effet, les documents nautiques français ne furent rapportés au méridien de Greenwich que le 1er janvier 1914 ; ce méridien avait été proposé comme origine lors d'une conférence internationale à Washington en 1886. Cette proposition ne fut ratifiée par la France qu'en 1911.

une hauteur du Soleil au moment de son passage au méridien estimé, ce qui donne la latitude et en calculant une longitude estimée à partir de la distance parcourue depuis midi la veille. La situation est résumée par l'astronome Hervé Faye qui écrira en 1864dans un compte rendu de l'Académie des sciences :

> « *Quant à la longitude, elle s'obtient par l'estime, à moins que le navigateur ne possède un ou plusieurs chronomètres dignes de confiance : alors, par des angles horaires pris de temps à autre, le matin et le soir, il obtient l'heure locale et par suite la longitude. Je ne parle pas ici de l'observation des distances lunaires, ressource précieuse qui sert à contrôler les chronomètres lorsqu'il s'élève des doutes sur leur marche, et à leur fournir de nouveaux points de départ ; je crois qu'elle n'est guère en usage qu'à bord des navires de l'État où toutes les ressources de l'astronomie sont savamment appliquées*. »

En remontant un peu le temps, le professeur d'hydrographie, et conservateur de l'observatoire de la Marine à Toulon, Jean-Antoine Mazure-Duhamel, fait état, en 1822, en introduction de son « Mémoire sur l'Astronomie Nautique » d'une situation assez catastrophique à bord des navires de commerce. Après avoir passé en revue différentes causes d'erreurs, notamment celles relatives à l'estime, il écrit :

> « *Dans la navigation marchande, l'incertitude des résultats s'accroît encore par l'usage des instruments les plus médiocres. Des sextants en bois et en cuivre que les marins achètent comme parfaits, ont des miroirs prismatiques dont l'angle des faces est de plusieurs minutes ; des angles terrestres de 90° à 120° sont en erreurs de 8, 12, etc minutes ; et par conséquents ils ont dû donner la longitude à 4, 6, etc degrés près, si réellement ils en ont fait usage pour observer des distances. Les montres de poche dont ils se servent varient de plus de deux à trois minutes dans les vingt-quatre heures. Joignez à cela que la dérive et le sillage sont estimés à l'œil, le plus souvent, et que la déclinaison de l'aiguille aimantée est observée à quelques degrés près. Ces moyens grossiers, joints au peu d'habileté des observateurs, expliquent le peu de cas qu'ils font des résultats donnés par les observations astronomiques (excepté pourtant la latitude à midi) et la préférence exclusive qu'ils accordent à leur estime.* »

La fiabilité des chronomètres allant en s'améliorant au fil du temps, la méthode des distances lunaires sera progressivement délaissée. En France, les données nécessaires au traitement des distances lunaires disparaîtront définitivement de l'Extrait de la Connaissance des Temps à l'usage des marins (Éphémérides nautiques) avec l'année 1905 ; en Grande Bretagne, elles seront supprimées du Nautical Almanac deux ans plus tard (1907). Dans un article paru dans la Revue Maritime de juin 1902, où il annonce la suppression prochaine des données nécessaires à l'exécution de la méthode des distances lunaires, le capitaine de frégate Émile Guyou, alors directeur de l'observatoire de la Marine à Montsouris, justifie cette mesure de suppression mais souligne la nécessité d'un équipement sérieux en chronomètres, notamment à bord des voiliers de commerce :

> « *… Si par exemple, un capitaine a constaté, par de nombreuses expériences, qu'au bout de deux ou trois mois l'erreur de ses chronomètres ne dépasse jamais trente ou quarante secondes, et si d'ailleurs, par plusieurs essais, il a constaté aussi que l'erreur du résultat d'une série de distances peut atteindre et dépasser une minute, il est clair qu'il laissera de côté ce moyen de contrôle. C'est précisément ce qui a lieu aujourd'hui.*
>
> *Il y a peu d'années encore, le service des transports entre la Nouvelle-Calédonie et la France était fait par vaisseaux à voiles. Ces navires partaient de Brest et faisaient route pour Nouméa par le cap de Bonne-Espérance, après une relâche facultative à Ténériffe ; ils revenaient ensuite par le cap Horn après relâche à Sainte-Hélène ; ils se trouvaient donc dans des conditions tout à fait analogues à celles des grands voiliers actuels. Or, nous avons eu l'occasion de compulser les cahiers de calculs des officiers chargés des montres sur plusieurs de ces navires, et nous avons constaté que la navigation avait été toujours, même au moment des atterrissages après 90 et 100 jours de mer, réglée exclusivement sur les chronomètres. Quelques officiers, par acquit de conscience, avaient bien observé et calculé des distances, mais sans en tenir compte, et l'expérience montra chaque fois qu'ils avaient agi sagement, les erreurs de la méthode astronomique étant restées toujours hors de proportion avec celles qu'il était raisonnable de craindre des chronomètres.*
>
> *Ces voyages ont été assez nombreux pour que l'on puisse considérer leur expérience comme concluante, c'est-à-dire admettre qu'un navire, muni de deux chronomètres et d'un compteur se contrôlant réciproquement, peut effectuer avec sécurité, sans recourir à la méthode des distances, les plus longues traversées qui puissent se présenter aujourd'hui. Les navires de commerce sont, il est vrai, moins bien pourvus en montres que les navires de guerre ; mais il nous semble que la conclusion à tirer de cette remarque est qu'il y a de ce côté une amélioration matérielle à réaliser. Les dépenses qui en résulteraient n'auraient assurément rien d'excessif pour les beaux voiliers modernes*. »

Durant la seconde moitié du XIXe siècle, la fiabilité des chronomètres étant acquise, le principe de calcul du point évoluera, non directement vers l'utilisation de la droite de hauteur, mais vers le calcul de longitude résultant d'une observation du Soleil le matin, dans les « circonstances favorables au calcul d'heure », c'est-à-dire lorsque l'astre est aussi voisin que possible du premier vertical (l'astre est alors à l'Est ou à l'Ouest). La latitude reste, elle, issue de l'observation méridienne. Succinctement, la procédure opératoire est la suivante :

- l'heure de l'observation ayant été notée au chronomètre et connaissant la latitude estimée, on calcule une longitude en utilisant la formule logarithmique de Borda ; cette longitude est celle du point déterminatif Lalande définie au chapitre précédent ;
- on calcule ensuite l'heure du passage du Soleil au méridien estimé du navire ainsi que les coordonnées du point estimé à cet instant ;
- on observe la hauteur du Soleil à l'instant calculé ; cette dernière observation donne accès à la latitude observée à midi et permet aussi, connaissant l'écart entre les latitudes estimée et observée de rectifier la longitude issue de l'observation du matin.

Cette méthode, dont on détaille l'exécution en annexe 2-1, est restée d'utilisation courante très longtemps, sans utiliser de constructions graphiques, comme l'a montré, entre autres, l'analyse des cahiers de points tenus par le capitaine au long cours G. Ledru dans ses navigations du début du XXe siècle. On peut d'ailleurs faire remarquer que l'utilisation des constructions graphiques, souvent jugées imprécises pour diverses raisons (échelle de la carte trop petite, table à carte exiguë ou inaccessible, affutage grossier de la mine du crayon etc) était souvent proscrite. Dans son ouvrage de référence, « Wrinckles in Practical Navigation », le capitaine au long cours S. T. Lecky indique :

> « *… To avoid all this, and ensure the greatest accuracy the method is capable of, it is advisable to do the whole thing by calculation from first to last. Calculation is better than any construction inasmuch as it is absolutely accurate if the data are accurate*. »

La longitude résulte, on l'a vu, d'un calcul d'angle horaire connaissant la latitude (estimée), la hauteur de l'astre et sa déclinaison. Pour tenter de simplifier ce dernier calcul, trois concepts, conduisant aux définitions des principales familles de table de navigation, vont être successivement mis au point :

- tables à triple argument (latitude, déclinaison et hauteur) développées notamment par J.-D. Cassini et J. Lalande à la fin du XVIIIe siècle ;
- ensemble de tables à simple argument permettant de résoudre une variante de la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique donnant l'angle au pôle en fonction des trois côtés du triangle de position ; plusieurs auteurs peuvent être retenus dont A. Mackay (1793) et J. Inman à partir de 1849 ;
- décomposition d'un triangle sphérique en deux triangles rectangles associée à l'utilisation de tables de résolution de ce type de triangle construites par J. T. Towson (1848) puis développées, avec des formulations différentes, par Sir W. Thomson (1871) puis F. Souillagouët (1891) et Ch.-M. Leblanc (1893).

On y ajoutera les travaux de J.-A. Mazure-Duhamel (1822), L. G. Heath (1845) et de L. Pagel (1847) qui tenteront de simplifier et normaliser le calcul de la rectification de la longitude et apporteront ainsi leur contribution à la généralisation du calcul du point lorsque la seconde observation est prise hors du méridien.

Tables d'angles horaires

Le calcul de l'angle au pôle en appliquant la formule de Borda à l'aide de tables de logarithmes peut paraître long. Il a donc semblé intéressant de mettre au point des tables donnant directement l'angle au pôle, d'où l'on déduira l'angle horaire, pour des valeurs entières, en degrés, des trois arguments : latitude, déclinaison, hauteur. Une première table du genre a été calculée en 1770 par Jean-Dominique Cassini (1748-1845, dit Cassini IV) à son retour du voyage de 1768 en Amérique ; ces tables sont incomplètes puisqu'elles ne couvrent que les latitudes comprises entre 34° et 51° et que la hauteur n'y est exprimée que tous les 5°. Le modèle en fut repris et complété par l'astronome Jérôme Lalande qui fit, dit-on, calculer par sa nièce, Madame Lefrançois-Lalande, les angles horaires pour les latitudes comprises entre 0° et 60° N, les déclinaisons comprises entre 24° S et 24° N et des hauteurs inférieures à 48°, avec des intervalles d'argumentation de 1° ou 2°, autorisant ainsi l'interpolation linéaire. Ces tables furent publiées en 1793 dans son « Abrégé de Navigation Historique, Théorique et Pratique ». À chaque page correspond une valeur entière de la latitude φ, la déclinaison D et la hauteur H constituant respectivement les arguments d'entrée en ligne et en colonne. Pour chaque valeur du triplet (φ, D, H), la table donne la valeur de l'angle horaire, en heures minutes et secondes, ainsi que les taux de variation moyens de l'angle horaire, pour des

variations de 1° de déclinaison, 1 ou 2° de hauteur et 1° de latitude, permettant d'effectuer les interpolations si les valeurs considérées des arguments d'entrée ne sont pas des nombres entiers.

En 1827, des tables de conception analogue furent calculées et publiées en Grande-Bretagne par Thomas Lynn, Commander de la Compagnie des Indes Orientales, sous le titre de « Horary Tables ». L'argumentation est identique à celle des tables de Lalande concernant la latitude et la déclinaison ; la distribution de l'argumentation des hauteurs, disposées systématiquement sur 61 lignes, est variable entre 0° et une valeur maximale fonction de la latitude et de la déclinaison (de même nom ou de nom contraire) considérées. À la différence des tables de Lalande, les taux de variations moyens ne sont pas indiqués ; dans le cas où les valeurs considérées de la latitude, de la déclinaison et de la hauteur sont différentes des valeurs argumentées, il convient de calculer les différences tabulaires et d'utiliser une table de calcul des parties proportionnelles placée en fin d'ouvrage pour effectuer les interpolations.

Enfin, en 1863, Louis Hommey, capitaine de frégate à la retraite, publia ses « Tables d'angles horaires » dont on donne un extrait en annexe 2-2. L'ouvrage fut approuvé par le ministère de la Marine qui souscrivit pour 300 exemplaires. L'ensemble est constitué de deux volumes, le premier étant relatif aux latitudes et déclinaisons de même nom, le second au cas contraire. La déclinaison est limitée à 24° et la latitude à 70° dans le premier volume et 55° dans le second. Latitude et déclinaison sont argumentées pour toutes valeurs entières en degrés. Afin de limiter le volume des tables, l'argument hauteur n'est exprimé qu'au voisinage des circonstances pratiques favorables au calcul d'heure. Pour chaque valeur du triplet (φ, D, H), la table donne l'angle horaire en heures, minutes, secondes et tierces ainsi que les taux de variations moyens de l'angle horaire en fonction de chacun des trois arguments. Ces taux permettent d'effectuer les interpolations si les éléments d'entrée sont différents des valeurs argumentées.

L'emploi des tierces est une particularité des tables de L. Hommey ; il en justifie ainsi l'usage :

> « *On emploie peut-être plus souvent les dixièmes et les centièmes de seconde que les tierces, mais j'avoue que je n'ai jamais compris pourquoi on mélangeait ainsi dans un même nombre des soixantièmes et des décimales ; l'emploi des tierces ou soixantièmes de seconde m'a paru plus naturel*. »

D'une manière générale, les tables de Lalande, Lynn et Hommey souffrent toutes les trois du même handicap que constituent les interpolations, longues et fastidieuses s'il faut les répéter pour chacune des trois variables de calcul. De plus, on remarque que les taux de variations, ou les différences tabulaires, peuvent évoluer assez vite d'une ligne, ou d'une colonne, à l'autre, à tel point que l'on peut être tenté de les interpoler eux-mêmes passant ainsi à une interpolation du second ordre. Voici ce que précise L. Hommey dans les instructions d'emploi de ses tables :

> « *Il est certain que les parties proportionnelles ne donnent pas un résultat mathématiquement exact, surtout par une latitude élevée et lorsque la déclinaison et la latitude sont de différente dénomination, mais elles donnent toujours une approximation suffisante pour la navigation (…) D'ailleurs il est toujours facile de les modifier de façon à obtenir un résultat aussi près de l'exactitude qu'on puisse le désirer. Comme on l'expliquera plus loin en parlant de l'usage des tables, il est facile de comprendre qu'on ne doit pas trop s'arrêter à la crainte des inexactitudes provenant des parties proportionnelles. Dans le plus grand nombre de cas, ces inexactitudes ne dépassent pas celles que peuvent donner l'imperfection des instruments à réflexion et les difficultés d'observer exactement à la mer. On doit en général s'estimer heureux d'obtenir sa longitude à une minute près, c'est-à-dire de n'avoir dans l'angle horaire qu'une erreur ne dépassant pas 4 secondes de temps*. »

On pourrait en conclure qu'il est inutile d'interpoler les différences tabulaires. Les exemples que L. Hommey développent dans la suite de ses instructions montrent qu'il peut être souhaitable de les corriger. Il conseille d'interpoler les taux de variation, à vue, lorsque, par exemple, l'argument est à mi-distance des valeurs tabulées et conclut ainsi :

> « *Du reste les exemples suivants prouveront que, pour des calculs à la mer, les parties proportionnelles données par la table donnent toujours une approximation suffisante, sans qu'il soit besoin de les modifier*. »

D'une manière générale, ce genre de table est plutôt destiné à une détermination expéditive de l'angle au pôle, quitte à admettre une certaine approximation, donc, sans interpoler les différences tabulaires (ou les taux de variation) ; une détermination précise fera nécessairement appel à la formule de Borda dont l'exécution pourra être finalement plus rapide que l'emploi d'une table spécifique à partir de laquelle il faudra effectuer de multiples

calculs d'interpolation. Il est difficile de dire si ces tables rencontrèrent un certain succès à bord des navires ; on relève simplement, dans le compte rendu de la Royal Society de 1871, une remarque de Sir W. Thomson indiquant que les tables de Lynn « *have not come into general use* ».

D'autres tables, construites sur le même modèle, seront publiées ultérieurement : il s'agit des « Chronometer Tables » de Percy L. H. Davis en 1899, des tables de Harold S. Blackburne, « Calculated Hour-Angles », en 1914, et des tables HO 203 et 204 de G. Littlehales en 1923. Ces tables, qui seront examinées au chapitre 11, font explicitement mention du tracé de la droite de hauteur et permettent sa construction par la méthode du parallèle estimé (point déterminatif Lalande) ; la dernière citée donne simultanément l'azimut de l'astre et propose une solution originale de tracé de la droite.

Rectification de la longitude

En 1822, le professeur d'hydrographie J.-A. Mazure-Duhamel établit, dans son « Mémoire sur l'Astronomie Nautique », par des considérations géométriques simples, l'expression de la variation de l'angle horaire d'un astre consécutive à des variations unitaires de latitude et de hauteur en fonction de l'azimut de l'astre et de la latitude. Il construit ensuite une table donnant ces variations en fonction de l'azimut de l'astre et de la latitude dont l'objectif premier est de connaître les incertitudes sur l'angle horaire résultant d'incertitudes sur la latitude[4] et la hauteur. En vue d'un calcul de longitude, Mazure-Duhamel en déduit notamment, chiffres à l'appui, qu'il faut chercher à observer un astre lorsqu'il est aussi proche que possible du premier vertical[5], même si sa hauteur est faible ; dans ces conditions, l'influence de l'incertitude de latitude est négligeable et celle de l'incertitude de hauteur – qui peut être importante lorsque l'astre est bas sur l'horizon – est minimale. Mazure-Duhamel montre de plus la simplicité de cette évaluation car les arguments d'entrée dans la table sont l'azimut résultant d'une mesure et la latitude estimée ; les calculs sont donc réduits à leur plus simple expression pour trouver une évaluation de l'incertitude sur l'angle au pôle calculé, donc, à terme, sur la longitude.

La table de Mazure-Duhamel fut publiée en Grande-Bretagne, dans le Nautical Magazine en 1832, et appela l'attention du lieutenant de la Royal Navy Léopold George Heath, alors officier canonnier à bord de HMS *Iris*, qui s'intéressa notamment au coefficient exprimant la variation d'angle horaire résultant d'une variation unitaire de latitude. Il met au point une expression de ce coefficient faisant intervenir deux termes dont il calcule les tables en 1845 : la table A donne le premier terme en fonction de l'angle horaire et de la latitude, la table B donne le second en fonction de l'angle horaire et de la déclinaison de l'astre. Ces tables seront publiées, à la suite d'un bref article, dans le Nautical Magazine en 1846 ; Heath écrit qu'elles permettent :

1) de trouver le lieu de position pratique du navire à l'instant de l'observation du matin,
2) de calculer une longitude précise dès que l'on connaît la valeur de la latitude.

En effet, si on sait placer un point du lieu de position, le point déterminatif, la connaissance de la variation d'angle horaire, donc de longitude, en fonction d'une variation unitaire de latitude donne le coefficient directeur du lieu, supposé rectiligne, sur la carte ; ce lieu est ainsi complètement défini. Enfin, la connaissance du coefficient de variation de l'angle horaire pour une variation unitaire de latitude permet de corriger la longitude calculée dès lors que l'on connaît l'écart entre latitude observée et estimée. On remarque ici que Heath avait, dès cette époque, complètement intégré la notion de lieu de position.

Curieusement, on trouve dans la même livraison des Annales Maritimes et Coloniales de 1847, l'adaptation française de l'opuscule de Th. H. Sumner par J. Barthet et un mémoire très fouillé du lieutenant de vaisseau Louis Pagel relatif au calcul du point astronomique. Louis Pagel, qui n'avait pas connaissance de la notion de lieu géométrique de position découverte par Sumner, a mis au point une méthode pour calculer les coordonnées géographiques de la position du navire résultant de deux mesures de hauteur d'astre(s). Il fait remarquer que les

[4] On a remarqué qu'une table analogue avait été conçue par Joseph Ducom avec cependant un objectif différent : il s'agit de la table XII de son cours d'observations nautiques publié en 1820.
[5] Circonstance favorable au calcul d'heure.

observations doivent normalement être faites à des moments bien particuliers, voisinage des passages aux premiers verticaux (Est ou Ouest) pour les calculs de longitude et passage au méridien pour le calcul de latitude, et que le Soleil n'est pas systématiquement observable à ces instants. Il indique alors qu'il est d'usage de rejeter les observations de longitude dès lors qu'il n'y a pas eu confirmation de la latitude par l'observation méridienne. Constatant que, à partir d'un navire immobile, deux mesures de hauteur prises à des instants quelconques, dont l'heure est connue grâce au chronomètre, doivent donner la même longitude si la latitude estimée est exacte et deux longitudes distinctes, et erronées, si cette latitude est fausse, il énonce :

> « *Il s'agit de trouver par le calcul le plus simple l'erreur sur la latitude correspondant à la différence des erreurs de longitude. Voilà le problème que je crois avoir complètement résolu*. »

Sans utiliser la notion de lieu de position, Louis Pagel indique une méthode permettant de calculer le coefficient exprimant la variation d'angle horaire, donc, par déduction, la variation de longitude, consécutive à une variation de latitude de 1'. La méthode est basée sur des considérations de différences tabulaires figurant dans les tables de logarithmes appliquées à la formule de calcul de l'angle horaire. Le nombre trouvé a pris le nom, en France, de « coefficient Pagel ».

Louis Pagel décrit ensuite la procédure de calcul et conclut ainsi son exposé :

> « *Ainsi, jusqu'à ce jour, les marins ont été généralement embarrassés pour trouver la position du navire lorsqu'ils n'ont pu observer le Soleil au méridien. Par ma méthode, le Soleil observé deux fois à deux points quelconques de sa course diurne, donne toujours exactement ou à peu près, la latitude et la longitude, ou du moins l'un des deux éléments ; et on peut se dispenser d'observer le Soleil au premier vertical et au méridien par les raisons suivantes, qui ont été déjà développées …* »

On relèvera, dans l'exemple de calcul complet développé en annexe 2-3, la relative complexité des opérations, notamment l'attribution des signes corrects aux coefficients Pagel.

La méthode conçue par Louis Pagel sera reprise, et formalisée, sous l'appellation de « double chronometer altitude », à la fin du XIXe siècle par Alfred Challice Johnson (1828-1909), Naval Instructor de la Royal Navy ; elle figure dans son ouvrage « On Finding the Latitude and Longitude in Cloudy Weather ». Ce dernier reprendra l'idée principale de Pagel consistant à utiliser deux observations quelconques et l'outil de calcul conçu par L. G. Heath qui permet le calcul simple du coefficient.

Tables de Mackay :

L'écossais Andrew Mackay (1760-1809) est mathématicien et astronome ; en 1793, il publie un ouvrage relatif au calcul de la longitude, « The Theory and Practice of finding the Longitude at Sea or on Land », accompagné d'un recueil de tables ; l'ensemble sera réédité en 1801 et 1810. Le calcul de la longitude repose naturellement sur la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique donnant l'angle au pôle en fonction des trois côtés du triangle de position de l'astre ; A. Mackay transforme cette formule et construit deux tables particulières donnant les résultats de produits de rapports trigonométriques fonctions de la latitude et de la déclinaison ; un extrait de ces tables est partiellement reproduit en annexe 2-4. Mackay ajoute à la suite une table des cosinus pour extraire l'angle au pôle ; pour effectuer le calcul complet il faudra aussi avoir recours à une table donnant les logarithmes des sinus. Sous une certaine apparente complexité, l'ouvrage de Mackay est néanmoins conçu en vue du calcul de la longitude avec des tables visant à simplifier les opérations ; c'est peut-être l'un des premiers exemples d'application de la méthode directe du calcul de l'angle horaire pour laquelle on a imaginé des tables spécifiques. Celles-ci sont malheureusement imprécises et il est nécessaire d'avoir recours à des interpolations croisées, en latitude et déclinaison dès lors que les valeurs considérées diffèrent de l'argumentation.

Tables de Inman :

Le Révérend James Inman (1776-1859) est également mathématicien et astronome ; il a participé aux travaux de Matthew Flinders en Australie puis a enseigné au Royal Naval College à Portsmouth. Les tables d'usage général qui accompagnent son ouvrage de navigation, « Navigation and Nautical Astronomy for Seamen » seront publiées à partir de 1830. La 3e édition des tables, en 1835, donne les haversines[6] ou demi-sinus verse d'un arc, rapport trigonométrique artificiel, qui permet d'écrire autrement la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique. En 1849, J. Inman propose une écriture de cette formule sous la forme d'un produit de quatre facteurs (voir les annexes 1-1 et 2-4) : les sécantes de la latitude et de la déclinaison et les racines carrées des haversines de deux arcs fonctions de la latitude, la déclinaison et la distance zénithale de l'astre ; peu après, il complète ses tables en fournissant les « half log haversines » permettant d'effectuer aisément le calcul d'angle horaire. La formulation mise au point par J. Inman se déduit de celle établie par J.-Ch. de Borda en 1787 ; elle ouvre la voie aux nombreuses recherches ultérieures qui utiliseront les rapports trigonométriques verses et des tables à simple argument donnant le rapport cherché et son logarithme en fonction d'un angle.

Tables de Towson

John Thomas Towson (1804-1881) a fait ses études à Devonport puis a rejoint l'atelier d'horlogerie de son père qui fabrique des chronomètres ; il se passionne ensuite pour la photographie puis s'intéresse aux questions de navigation : on le trouve en 1846 donnant des cours sur le sujet à Portsmouth. Il travaille ensuite à la conception de tables permettant de résoudre les problèmes de navigation par l'arc de grand cercle ; il publie, en 1848, les « Tables to Facilitate the Practice of Great Circle Sailing ».

Rappelons brièvement qu'une orthodromie est l'arc de grand cercle inférieur à 180° joignant deux points D et A de la surface de la terre supposée sphérique (voir figure 2-1).

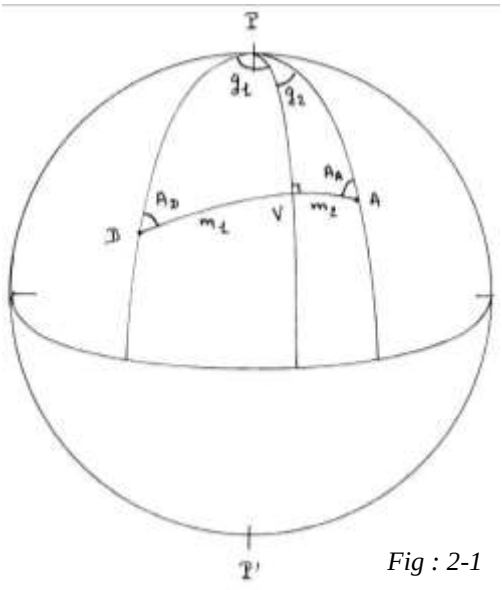


Fig : 2-1

Le point de l'arc de grand cercle V, dont la latitude est maximale, est appelé vertex de l'orthodromie.

Le triangle sphérique formé par les deux arcs de méridiens PD et PA et par l'arc de grand cercle DA est décomposé en deux triangles rectangles par l'arc de méridien PV. Si on connaît la position du vertex par sa latitude et sa différence de longitude par rapport au méridien du point D, on peut déterminer les autres éléments du triangle sphérique rectangle PVD, à savoir l'angle de route au départ, en D, et la distance orthodromique DV. Sans entrer dans le détail des formules, J. Th. Towson a construit une table donnant la latitude du point D, l'angle en D et la

[6] D'après Ch. H. Cotter, le mot haversine aurait été inventé par Inman.

distance DV en fonction de la latitude du vertex et de sa différence de longitude avec celle du point D. Plus généralement, il a calculé une table de résolution des triangles rectangles donnant l'un des angles non droit et ses deux côtés adjacents en fonction de l'autre angle non droit et du troisième côté. Les arguments d'entrée sont exprimés en degrés entiers et les éléments calculés sont donnés à la minute près. Cette table, ici adaptée aux problèmes de navigation orthodromique, constitue un premier modèle de tables de navigation basées sur l'utilisation d'un triangle sphérique rectangle. Si la méthode de résolution d'un triangle sphérique quelconque par décomposition en deux triangles rectangles est très ancienne[7], la présentation des résultats par J. Th. Towson dans son ouvrage « Tables to Facilitate the Practice of Great Circle Sailing » constitue une innovation de tout premier ordre ; le document est rapidement reconnu par les autorités maritimes britanniques qui en couvre la publication « *by Order of the Lord Commissioners of the Admiralty* ». La première édition de 1848 est suivie de nombreuses rééditions et retirages.

En 1849, J. Th. Towson publie un nouvel ouvrage : il s'agit de tables relatives au calcul de latitude intitulées « Tables for the Reduction of Ex-Meridian Altitudes » dont on fera l'analyse au chapitre 13.

Enfin, dans la seconde moitié du XIXe siècle, J. Th. Towson s'intéresse plus particulièrement au compas magnétique : il effectue des recherches sur le champ magnétique à bord des navires en fer et en acier, travaille sur la compensation et la régulation des compas. De 1850 à 1873, J. Th. Towson est « Scientific Examiner of Masters and Mates » auprès du Local Maritime Board du port de Liverpool ; en 1870, il est nommé « Examiner in Compass » puis « Chief Examiner ». Il publie en 1863 « Practical Information on the Deviation of the Compass for the Use of Masters and Mates of Iron Ships ». Dans le but de vérifier la déviation d'un compas, cet ouvrage contient les éléments nécessaires au calcul de l'azimut d'un astre de déclinaison inférieure à 26,5° ainsi que de 24 étoiles sélectionnées ; Towson utilise encore une fois la décomposition du triangle de position en deux triangles rectangles. Ces éléments sont insérés dans un ouvrage technique relatif à la compensation et à la régulation du compas magnétique ; ils associent le concept moderne d'arc calculé et tabulé avec le calcul logarithmique.

Tables de Thomson :

Sir William Thomson (1824-1907), Lord Kelvin, est avant tout un physicien dont les nombreux travaux en thermodynamique, électricité et mécanique sont passés à la postérité. Il s'est aussi intéressé à la navigation lors de ses participations à la pose de câbles sous-marins et c'est en 1857, à bord du HMS *Agamemnon*, qu'il prend connaissance de la méthode de Sumner. Toujours dans le cadre de la pose de câbles, il effectue d'autres séjours à la mer, notamment à bord du *Great Eastern* en 1865 et 1866 ; en 1870, il se porte acquéreur d'une goélette de plaisance de 126 tonneaux, *Lalla Rookh*. Sans être un marin professionnel, Sir William Thomson est un familier des choses de la mer auxquelles il porte un grand intérêt : en effet, outre les tables qui font l'objet de cette étude, on lui doit l'invention d'un sondeur mécanique, des perfectionnements du compas magnétique qui seront adoptés dans toutes les marines, et un calculateur analogique de prédiction des éléments de la marée.

Lors de son séjour à bord de HMS *Agamemnon*, Sir William Thomson constate la longueur des calculs répétitifs qu'effectue le capitaine de ce navire pour construire le lieu de position selon la méthode de Sumner. Outre la durée du calcul, qu'il considère comme une perte de temps, il observe également que la difficulté de l'exercice constitue un facteur limitant la pratique de la méthode découverte par Sumner. Sa réflexion le conduit naturellement à imaginer une table donnant directement les résultats de cette résolution, chaque élément connu du triangle étant exprimé avec un intervalle d'argumentation de 1'. Il s'est rapidement rendu compte que l'opération conduirait à résoudre environ 157,5 milliards de triangles et que, sur la base de 1.000 triangles résolus par jour, la construction de la table durerait à peu près 400.000 ans ! Une méthode plus expéditive était donc à rechercher, tout d'abord en élargissant l'intervalle d'argumentation à 1° puis en utilisant une décomposition du triangle de position en deux triangles rectangles et en faisant intervenir les mêmes formules pour calculer les éléments utiles des deux triangles. Dans ces conditions, le nombre de triangles à résoudre est ramené à 90^2, soit 8.100.

[7] La méthode aurait été pressentie par l'astronome égyptien Ibn Jounis (ou Ibn Yunus) à la fin du premier millénaire.

Selon F. Radler de Aquino, officier de la marine brésilienne sur lequel on reviendra au chapitre 4, Sir W. Thomson commença en 1870 ses travaux sur la méthode de calcul dont il est l'auteur. Ceux-ci firent l'objet d'une communication devant la Royal Society 1871. Les tables furent ensuite calculées avec la collaboration de E. Roberts du Nautical Almanac Office, divulguées fin 1875 et enfin publiées en mai 1876 sous le titre « Tables for Facilitating Sumner's Method at Sea ». L'opuscule, contenant des instructions d'emploi précises, comporte une vingtaine de pages parmi lesquelles les tables proprement dites occupent 9 pages. Les deux côtés de l'angle droit en sont les arguments d'entrée, exprimés tous les degrés entiers, de 0° à 90°, les éléments calculés étant la cohypoténuse – complément de l'hypoténuse – et l'un des angles non droit ; l'autre angle peut être obtenu en permutant les arguments d'entrée.

Après avoir décomposé le triangle de position de l'astre à l'instant de l'observation en deux triangles rectangles, une première recherche dans la table, à partir de valeurs tabulées de l'angle horaire et de la déclinaison les plus voisines des valeurs considérées, permettent de trouver par tâtonnement les deux côtés de l'angle droit d'un premier triangle rectangle. On résout ensuite le second triangle rectangle, dont un côté est commun au premier triangle et l'autre résulte d'une combinaison entre la latitude et le second côté, qui donnera accès à la hauteur et à l'azimut de l'astre.

Ces deux éléments sont ensuite à interpoler en fonction de la valeur de la déclinaison, différente en générale de celle lue dans la table de Thomson. Le tracé de la droite de hauteur s'effectue à partir du point de calcul dont les coordonnées sont celles utilisées pour effectuer les entrées dans la table : sa latitude est un nombre entier aussi proche que possible de la latitude estimée et sa longitude se détermine à partir de l'angle horaire lu dans la table. Sir W. Thomson est ainsi le premier à utiliser le concept d' « assumed position » (ou « point auxiliaire », dénomination proposée par son initiateur français, F. Souillagouët), point de calcul voisin du point estimé dont les coordonnées simplifie les calculs en limitant les interpolations.

La droite de hauteur est construite tel que Marcq de Saint-Hilaire le formalisera dans toute sa simplicité et sa généralité sensiblement à la même période, en utilisant le vertical « auxiliaire » de l'astre et en portant, à partir du point auxiliaire, un intercept égal à la différence entre hauteur vraie, résultant de la mesure, et hauteur calculée. Il est ici intéressant de relever dans le mémoire de Marcq de Saint-Hilaire relatif à la présentation de la méthode du vertical estimé publié en 1875 :

> « *Une table des triangles rectangles sphériques, calculée sur la formule* $\cos x = \cos z \,.\, \cos y$ *donnant l'un des trois angles, x, y ou z connaissant les deux autres, permettrait de résoudre les triangles sphériques avec rapidité …* ».

Sans que, probablement, ce dernier ne le sache, les travaux de Sir W. Thomson ont précédé son vœu. Il est également probable que la paternité de la méthode du vertical estimé revienne à Thomson, sans que celui-ci ne l'ait vraiment formalisée, au bénéfice de Marcq de Saint-Hilaire.

Outre l'innovation fondamentale que représente l'emploi d'un point auxiliaire, on relève, dans la table de Thomson, l'emploi généralisé des degrés et minutes d'arc ; les angles horaires, traditionnellement exprimés à l'époque en heures, minutes et secondes, sont systématiquement convertis pour les calculs trigonométriques. Les tables conçues par Sir William Thomson sont malheureusement d'une utilisation compliquée comme on pourra le constater avec l'exemple traité en annexe 2-5. On note en particulier :

- des difficultés pour localiser les éléments à relever dans les tables en suivant à la lettre les instructions données par Thomson (lesquelles instructions sont par ailleurs extrêmement précises) ;
- des interpolations linéaires rédhibitoires en l'absence de tables de parties proportionnelles.

Compliquées et sans doute en avance sur leur temps, les « Tables for Facilitating Sumner's Method at Sea » furent mal accueillies à leur parution : la critique du Nautical Magazine de 1876 fut particulièrement sévère : « … *a very pretty puzzle for the amusement of the amateur navigator*. ». Compte tenu, de plus, de la nature profondément traditionnaliste des marins il semblerait bien qu'elles n'eurent que peu de succès sur les passerelles. Quoiqu'il en soit, des adaptations furent publiées en France par l'astronome russe Iwan J. Kortazzi en 1880 et par A. Collet en 1891 ; on relève aussi la publication d'une seconde édition par Thomson en 1886. Ces différentes publications montrent bien que le concept utilisé par W. Thomson n'a pas laissé indifférent ; cependant, dans son état d'origine,

elle reste une ébauche qui ne demande qu'à être améliorée pour être utilisable pratiquement à la mer : il y manque notamment une table index permettant le repérage aisé de la colonne utile et les données de variations unitaires pour effectuer facilement les interpolations. Plusieurs chercheurs, essentiellement des marins, travailleront directement sur la base construite par Thomson pour concevoir un document pratique comme on le verra au chapitre 4.

Tables de Souillagouët :

Fernand Souillagouët (1851-1915) est entré dans la Marine en 1866 et a opté pour le professorat d'hydrographie en 1878. Il est successivement en poste dans les écoles des Sables d'Olonne, de Toulon et de Bordeaux. Dans son métier de professeur, il s'est probablement rendu compte de la difficulté de mise en application, par les marins de commerce, de la méthode Marcq de Saint-Hilaire. C'est en 1887 que Souillagouët commença à rechercher une méthode de calcul simple des éléments de la droite de hauteur. Les « Tables du Point Auxiliaire », publiées pour la première fois en 1891, constituent l'aboutissement de ces travaux. L'ouvrage, couronné par l'Académie des sciences, est constitué de trois tables principales permettant les calculs de hauteur et d'azimut précédées d'instructions d'emploi détaillées ; il a été complété par un recueil de tables nautiques et réédité en 1900 ; un nouveau tirage, incluant notamment une table de logarithmes des nombres et des lignes trigonométriques, paraît en 1903.

F. Souillagouët écrit, en introduction de ses tables :

> « *(…) Le tracé de cette droite exige donc le calcul de la hauteur et de l'azimut correspondant au point estimé. La détermination de ces éléments par les formules ordinaires oblige à recourir à un certain nombre de logarithmes, et comporte quelques règles de signe dont les marins cherchent systématiquement à affranchir leurs calculs ; de là, probablement, le peu d'empressement mis jusqu'ici par beaucoup d'officiers, habitués au calcul d'heure, à adopter une méthode dont la supériorité est certainement indiscutable* ».

Tout en restant dans le respect de l'application de la méthode Marcq, F. Souillagouët va chercher à réduire le travail du navigateur en mettant en table des résultats intermédiaires calculés pour des valeurs prédéterminées de l'angle horaire et de la latitude. Cette démarche l'amène donc à utiliser successivement deux décompositions du triangle de position en triangles rectangles, l'une pour le calcul de la hauteur, l'autre pour le calcul de l'azimut et à travailler à partir d'un point arbitraire, voisin du point estimé : le point auxiliaire dont les coordonnées géographiques, judicieusement choisies, permettent, comme nous l'avons déjà souligné à propos des travaux de Sir W. Thomson, de limiter les interpolations, donc d'alléger le calcul. F. Souillagouët est le premier, en France, à utiliser l'idée du point auxiliaire. En justification de l'emploi de ce point, il écrit dans l'introduction de ses tables :

> *« Le point estimé, en effet, élément intermédiaire du calcul est indéterminé par sa nature même ; et son utilisation ne résulte que de son voisinage du point observé ; il est donc permis de le prendre un peu plus ou un peu moins exact et de disposer de ses deux coordonnées, relativement arbitraires dans une petite étendue, pour obtenir avec facilité les éléments géométriques indispensables au tracé de la droite de hauteur.* »

Par la suite, la notion de point auxiliaire sera à l'origine de discussions passionnées entre partisans et opposants de ce point. Ainsi, on relève, dans une tribune libre de la revue de l'Institut français de Navigation, en 1953 :

> « *La controverse n'est pas close entre partisans du point estimé et adeptes du point auxiliaire. Il est certain que, puisque l'on tient à jour un point estimé, il est souhaitable d'obtenir le résultat à partir de ce point estimé qui est, dans les limites de la prévision humaine, le plus probable. Mais si les intercepts restent acceptables, les profits du point auxiliaire : tables de faible volume, et suppression des interpolations, valent peut être bien un changement d'habitude.* »

Les éléments de controverse sont nombreux. On relève tout d'abord que le calcul des éléments d'une droite de hauteur à partir du point estimé donne dès la fin du calcul la valeur de l'écart entre éléments estimé et observé ; le point déterminatif ainsi obtenu est le point du lieu de position le plus proche du point réel : c'est le point rapproché. Dans le cas où le calcul est fait par rapport à un point auxiliaire, une construction graphique est obligatoire sur la carte ou sur un canevas pour évaluer et analyser l'écart par rapport à l'estime ; dans les documents d'époque, on a constaté qu'il était d'usage fréquent de refaire un calcul pour évaluer l'intercept par rapport au point estimé : l'avantage de la simplification apportée par le point auxiliaire est alors partiellement perdu. Il a d'autre part été

remarqué que l'utilisation d'un point auxiliaire liée à l'emploi de certaines tables pouvait conduire à trouver un intercept de grande valeur : outre la difficulté de construction graphique – les points estimé, auxiliaire et déterminatif peuvent ne pas tous figurer sur un même graphique à échelle convenable –, le procédé simplifié de construction de la droite de hauteur peut alors se trouver appliqué abusivement. Enfin, on a noté que l'usage de certaines tables peut conduire à une ambiguïté sur le choix des coordonnées du point auxiliaire le plus proche du point estimé.

En France, la hiérarchie de l'enseignement maritime commercial n'encourage pas l'usage du point auxiliaire mais ne s'y montre pas non plus franchement opposée. Les traités de navigation du début du XXe siècle sont plutôt favorables à son utilisation liée à l'emploi des tables de Souillagouët sachant que la distance entre points auxiliaire et estimé reste toujours faible, le point auxiliaire étant, la plupart du temps, à l'intérieur du cercle d'incertitude de l'estime. On retiendra la position rigoureuse de l'Inspecteur général d'hydrographie G. Massenet donnée dans son Traité de Navigation écrit en collaboration avec le professeur d'hydrographie W. Hardant en 1923 :

> *« Tout autre point de coordonnées φ_a, G_a, voisin de la position exacte du navire, aurait évidemment pu être employé pour le calcul des éléments de tracé de la droite de hauteur à la place du point estimé de coordonnées φ_e, G_e et aurait fourni la même droite Δ tracée alors avec un vecteur différent (H_v - H_a) porté sur la carte à partir du point auxiliaire. (...) Il faut remarquer d'autre part que le point déterminatif obtenu peut être plus éloigné de la position exacte du navire que lorsque l'on utilise directement le point estimé. On n'a plus, en effet, la certitude que donne la droite de hauteur Marcq obtenue à l'aide du point estimé, à savoir que le point déterminatif est à une distance du point exact inférieure à l'erreur sur l'estime. La droite de hauteur obtenue à l'aide d'un point auxiliaire peut donc présenter moins d'exactitude que celle obtenue avec le point estimé. Il y a lieu d'ailleurs de ne pas exagérer cet inconvénient, qui disparaît pratiquement si l'on prend soin de ne pas observer de grandes hauteurs, la courbure de la courbe de hauteur étant alors très faible. »*

Plus expéditivement, l'Inspecteur général d'hydrographie A. Cousin écrit, dans son Précis de Navigation, en 1928 :

> « *Le point estimé étant, par essence, erroné, on peut (dans certaines limites) lui substituer un point voisin de coordonnées simples, dit point auxiliaire (procédés Souillagouët et Bertin).* »

Le risque d'approximations abusives et d'erreur existe cependant lorsque la nature de la table conduit à définir un point auxiliaire très éloigné du point estimé. Ceci n'est pas le cas pour les tables de Souillagouët du fait de leur construction et de l'utilisation d'un intervalle d'argumentation de faible amplitude. Compte tenu de l'évolution des différents types de tables, dont celles adaptées à l'emploi du point estimé, la controverse ne sera jamais close.

Pour calculer la hauteur de l'astre, F. Souillagouët utilise la décomposition du triangle de position en deux triangles rectangles selon la hauteur sphérique issue du zénith. Il établit ensuite que la hauteur H peut se calculer par le biais d'une formule logarithmique dans laquelle interviennent la colatitude β du pied de la hauteur sphérique, la latitude φ et la distance polaire δ, complément de la déclinaison D de l'astre. Sur la base de cette formule, Souillagouët propose une table à double argument donnant, en fonction de l'angle au pôle P (déduit de l'angle horaire) et de la latitude φ, la colatitude β et un logarithme, celui du cosinus de la hauteur sphérique, intervenant dans la formule de calcul de la hauteur. Les arguments, angle au pôle et latitude, sont exprimés toutes les 15' ou toutes les 30', selon la valeur de l'angle au pôle. Cette argumentation définit les coordonnées du point auxiliaire qui ne diffèreront de celles du point estimé que de 7,5' ou 15' au maximum selon le cas. Les éléments calculés sont donnés respectivement à 5'' d'arc près pour l'arc β et avec 5 décimales pour le logarithme. Il sera ensuite nécessaire de recourir à une table de logarithmes à au moins 5 décimales pour terminer le calcul de hauteur (à moins de disposer de la dernière édition des tables de Souillagouët qui contient le supplément indispensable).

Pour effectuer le calcul d'azimut, F. Souillagouët utilise la décomposition du triangle de position de l'astre en deux triangles rectangles selon la hauteur issue de l'astre à laquelle il associe une table de résolution des triangles rectangles à double argument, un angle et la cohypoténuse, donnant les deux côtés de l'angle droit. L'intervalle d'argumentation est ici de 30', suffisant pour trouver la valeur de l'azimut (ou plus exactement de son complément, l'amplitude) au demi-degré près ; on retrouve également une valeur approchée de la hauteur permettant la vérification grossière du calcul précédent.

Les « Tables du Point Auxiliaire » de F. Souillagouët constituent un fort volume d'environ 425 pages (édition de 1900) relativement facile à exploiter grâce à une typographie claire et aérée. Connurent-elles un grand succès ? On

peut en douter : voici ce qu'en dit le professeur d'hydrographie Charles Bertin dans l'introduction de sa « Tablette » publiée en 1929 :

> « *Depuis le Captain Sumner, le « point auxiliaire » n'a pas fait grand progrès. Cinquante ans après, cependant le vénéré professeur Souillagouët édita les « Tables du Point Auxiliaire », fournissant, par une opération mi-tabulaire, mi-logarithmique, l'intercept auxiliaire. Mais jamais, le professorat d'âge très mûr ne consentit à l'introduction du point auxiliaire dans l'enseignement officiel. Le génial Souillagouët en mourut de chagrin, en 1915.* »

On reconnaît ici le franc-parler de Bertin dont on analysera les travaux au chapitre 5. Il est exact que l'emploi du point auxiliaire n'a jamais été admis pour traiter les calculs nautiques réglementaires aux examens de la marine marchande, mais, nous l'avons fait remarquer plus haut, son emploi dans la pratique n'a pas non plus été franchement déconseillé à la condition qu'il reste proche du point estimé.

La méthode de calcul de la hauteur, originale et d'application aisée, que l'on explicite en détail à l'annexe 2-6, ne fut jamais ni reprise, ni perfectionnée par un auteur français et l'ouvrage de F. Souillagouët tombera rapidement, en France, dans l'oubli ; on lui a notamment reproché de devoir recourir à une table de logarithmes externe. À l'étranger par contre, d'autres tireront un parti intéressant des travaux de F. Souillagouët : en Argentine tout d'abord par l'amiral Garcia Mansilla en 1910 puis au Chili par le directeur de l'observatoire de Santiago, A. Obrecht, en 1918. La méthode sera ensuite simplifiée par le japonais Sinkiti Ogura en 1920, adaptée par les Britanniques dès 1923, et s'exportera aux États-Unis et dans plusieurs autres pays européens ; elle fera, notamment aux Pays-Bas et en Allemagne, l'objet de rééditions jusque dans les années 1980. Nous en verrons l'histoire au chapitre 8. La table III, de résolution des triangles rectangles, utilisée pour le calcul d'azimut sera reprise dès 1893 par le lieutenant de vaisseau Charles-Marie Leblanc pour effectuer le calcul complet des éléments de la droite de hauteur.

L'interpolation du lieutenant de vaisseau Leblanc :

Le lieutenant de vaisseau Charles-Marie Leblanc est l'auteur de deux mémoires parus dans la Revue Maritime et Coloniale. Le premier est relatif aux graphiques de calcul. Il comporte quelques remarques intéressantes dont la suivante :

> « *Le procédé Marcq ne pouvait, dès le début, lutter avantageusement contre le calcul d'angle horaire parce qu'il employait des formules nouvelles sans abréger les calculs. Pour qu'il pût devenir d'un usage tout à fait général, il lui fallait un instrument spécial.* ».

Leblanc annonce ensuite :

> « *Ce perfectionnement s'est fait longtemps attendre ; mais nous croyons pouvoir annoncer aux marins qu'on publiera bientôt des tables qui, par leur disposition ingénieuse, répondront dans une large mesure au desideratum de l'amiral Marcq en donnant rapidement la hauteur estimée et l'azimut des astres.* ».

Le second mémoire est intitulé « Calcul d'une droite de hauteur par la Table III de Souillagouët (calcul sans logarithmes) ». En introduction, Leblanc souligne le fait que la résolution du problème par les tables I ou II de Souillagouët :

> « (…) *exige le secours d'une table de logarithmes, ce qui constitue un léger inconvénient que la critique a signalé comme une imperfection de la méthode* (…) *avec le déplacement du point*[8]*, non seulement la table de logarithmes n'est pas indispensable, mais on peut se passer des deux premières tables du point auxiliaire, en calculant, par la table III, la hauteur estimée et l'azimut avec l'exactitude requise en navigation.* »

Leblanc propose un calcul identique à celui indiqué par Souillagouët pour trouver l'azimut et la hauteur avec la table III, en interpolant de façon à exprimer la hauteur à la minute d'arc près. Pour faciliter les calculs d'interpolation, Leblanc donne, dans son étude, des tableaux de parties proportionnelles. Comme on pourra le constater à la fin de l'annexe 2-6, la méthode, simple dans son principe, est laborieuse car lourde en interpolation

[8] Passage du point estimé à un point auxiliaire.

linéaire ; de plus, du fait de l'intervalle d'argumentation plus large que dans la table I, elle risque d'éloigner le point auxiliaire du point estimé. La méthode proposée par le lieutenant de vaisseau Leblanc n'a donc pas manqué de faire réagir F. Souillagouët qui s'exprime ainsi dans l'introduction de ses tables (édition de 1900) :

> « *Le lieutenant de vaisseau Ch. Leblanc exécute un calcul sans logarithmes par notre table III à l'aide de trois interpolations et en suivant la même marche que pour rechercher l'amplitude. Après avoir modifié la longitude estimée de manière à arrondir l'angle au pôle P, il détermine avec* P_a *et D les arcs α et a qu'il interpole avec une table auxiliaire de parties proportionnelles pour la valeur exacte de la déclinaison. Il change ensuite* φ_e *en* φ_a *de manière que* $\varphi_a + \alpha$ *devienne un argument de la table ; entrant une deuxième fois dans la table III avec a en haut et* $\varphi_a + \alpha$ *comme argument vertical, il trouve l'amplitude et la hauteur approchée. Une dernière interpolation relative à a doit s'exécuter encore avec sa table auxiliaire pour achever de déterminer* H_a.
>
> *Ces interpolations sont aussi longues et toujours moins exactes que la recherche d'un logarithme ; le déplacement du point y est employé d'une manière détournée qui altère la simplicité primitive de cet artifice. Signalons, d'ailleurs, une infériorité de tous ces procédés sur le calcul semi-logarithmique semi-tabulaire de la hauteur et de l'azimut ; ils font perdre le bénéfice d'une vérification résultant d'une double résolution du triangle PZA plus utile encore que la prompte exécution du calcul.* »

Malgré cette fin de non-recevoir, l'idée de Leblanc va faire son chemin et être reprise et perfectionnée, notamment par Charles Bertin au début du XXe siècle.

Commentaires :

À l'avènement de la méthode découverte par Marcq de Saint-Hilaire, les précurseurs ont mis au point les outils fondamentaux du calcul du point astronomique ; l'organisation des principaux types de table de navigation est complètement définie : tables à triple argument résolvant des triangles sphériques dont trois éléments ont des valeurs prédéterminées, tables de résolution des triangles rectangles, sous forme explicite ou logarithmique, et tables à simple argument pour l'application d'une méthode directe ; il y aura évidemment des variantes, d'autres applications originales ainsi que des tentatives de calcul graphique. On relève également que les recherches sur le calcul du point, par Mazure-Duhamel et Heath notamment, vont conduire à l'élaboration de tables simplifiées, commodes pour divers calculs dont la détermination de l'azimut d'un astre. Des chercheurs passionnés, souvent excellents calculateurs, vont maintenant faire évoluer ces outils de calcul avec le même souci : raccourcir la durée des opérations, diminuer, autant que faire se peut, les « chances d'erreur » et conserver une précision adaptée à la navigation maritime, donc, en bref, obtenir rapidement un résultat sûr.

Annexe 2-1 : Calcul du point à midi.
Annexe 2-2 : Tables de Hommey.
Annexe 2-3 : Formules de Mazure-Duhamel et Heath, méthode Pagel.
Annexe 2-4 : Tables de Mackay et de Inman.
Annexe 2-5 : Tables de Thomson.
Annexe 2-6 : Tables de Souillagouët et interpolation de Leblanc.

Chapitre 3

TABLES DU COMMANDANT GUYOU

Le capitaine de frégate Émile Guyou devrait figurer parmi les précurseurs mais la nature des deux principaux travaux relatifs aux tables de navigation dont il est l'auteur est tout à fait originale et particulière. Nous avons donc choisi de lui consacrer un chapitre distinct du précédent.

Introduction :

Émile Guyou (1843-1915) était officier de marine ; admis à l'École navale en 1860, il en sort en 1862 avec le grade d'aspirant de 2e classe. Sa carrière, militaire comme maritime, ne paraît pas avoir comblé ses attentes aussi décide-t-il, en 1879 de renoncer au service actif dans la Flotte. Il sollicite, et obtient, un poste de professeur à l'École navale : pendant 6 ans, il y enseigne l'architecture navale et la théorie du navire ainsi que l'astronomie et la navigation. En 1885, il quitte l'École navale pour la Direction du Service Hydrographique de la Marine, à Paris, où il est chargé des instruments nautiques. Il est élu membre de l'Académie des sciences le 15 janvier 1894, en remplacement de l'amiral Pâris et succède, en 1896, à l'amiral Fleuriais comme membre titulaire du Bureau des Longitudes ; il est nommé Directeur de l'Observatoire de la Marine et du Bureau des Longitudes de Montsouris cette même année ; il occupe le poste en 1896 et 1897 puis de 1900 à 1910, conjointement avec l'astronome Auguste Claude.

Les travaux d'Émile Guyou relèvent des mêmes domaines scientifiques que ceux dont il a dispensé un enseignement à l'École navale ; ces travaux l'inscrivent dans la lignée des « marins savants » comme Pagel, Marcq de Saint-Hilaire et quelques autres dont on évoquera les travaux au fil de cette étude. Outre les tables de navigation qui font l'objet de ce chapitre, on retiendra notamment ses recherches en théorie du navire et sur le compas magnétique ainsi que ses études relatives à la mise au point de l'extrait de la Connaissance des Temps à l'usage des marins.

Les tables de navigation conçues par É. Guyou relèvent d'une démarche originale qui n'a pas d'équivalent chez d'autres auteurs. Inspiré par le concept d'un raisonnement direct sur la carte marine, É. Guyou a mis au point une formulation basée sur la fonction latitude croissante puis a ensuite utilisé les propriétés des courbes de hauteur pour développer une méthode de calcul des éléments de la droite de hauteur. En 1884 paraissent les « Tables de poche donnant le point observé et les droites de hauteur » ; ces tables permettent de calculer les éléments d'une droite de hauteur par la méthode du parallèle estimé (et accessoirement du méridien estimé) par la formulation en latitude croissante. En 1888, dans les Annales Hydrographiques, É. Guyou précise les fondements théoriques de sa méthode et en ébauche les liens avec la théorie des courbes de hauteur ; la généralisation est posée en 1895 dans le mémoire « Les Problèmes de Navigation et la Carte Marine » paru dans les Annales Hydrographiques de cette même année puis publié par Berger-Levrault en 1896. En 1901 É. Guyou publie, toujours dans les Annales Hydrographiques, une étude sur les courbes de hauteur. Enfin, en 1911, paraissent ses « Nouvelles Tables de Navigation » ; elles ont été précédées par la publication, dans la Revue Maritime en février 1909, d'un mémoire relatif à leur théorie et furent présentées à l'Académie des sciences le 26 juin 1911.

Les Tables de Poche :

Elles sont construites à partir de la définition de la latitude croissante, fonction qui sert à fixer l'espacement des parallèles d'un canevas de Mercator qui est celui d'une large majorité de cartes marines. L'expression mathématique de cette fonction, sur laquelle on reviendra en annexe, est de la forme :

$$\lambda(\varphi) = \frac{10800}{\pi}.\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \frac{10800}{\pi}.\ln\tan\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right)$$

On utilise également la fonction complémentaire :

$$co\lambda(\varphi) = \lambda(90° - \varphi) = \frac{10800}{\pi}.\ln\cot\frac{\varphi}{2}$$

On trouve les valeurs numériques prises par la fonction latitude croissante dans toutes les tables de navigation et « l'astuce » d'É. Guyou fut tout d'abord de transformer certaines formules de trigonométrie sphérique pour les rendre calculables avec cette fonction et son complément puis d'enrichir la présentation des tables.

En effet, avant la publication des « Tables de Poche », les latitudes croissantes étaient seules mises en table (voir par exemple les tables de V.-M. Caillet). Pour résoudre le problème de la droite de hauteur selon sa théorie, Émile Guyou a mis au point une table donnant simultanément les latitudes croissantes et leurs compléments avec un intervalle d'argumentation de 1' d'arc : l'entrée se fait donc « par le haut et la gauche » pour les arguments inférieurs à 45° et « par le bas et la droite » pour les arguments compris entre 45° et 90°, les intitulés de colonne étant inversés, disposition habituelle dans les tables de trigonométrie. G. Friocourt a repris cette même disposition dans ses Tables de Logarithmes et de Navigation (1899) ; il écrit dans les instructions d'emploi :

> « *La disposition particulière donnée à la table VI permet d'en faire usage dans l'application des méthodes nouvelles de M. le capitaine de frégate Guyou, pour la détermination des droites de hauteur* ».

On constatera que la méthode est difficilement applicable au procédé de calcul des éléments de la droite de hauteur mis au point par Marcq de Saint-Hilaire aussi É. Guyou utilise-t-il les méthodes du parallèle estimé (Lalande) et du méridien estimé (Borda), la première étant la plus aisée à appliquer. Les formulations utilisées ainsi que des exemples de calcul sont développés en annexe 3-1. Malgré un calcul relativement bref, on a remarqué la difficulté de l'exercice de transformation des formules.

Les Nouvelles Tables de Navigation :

Sur la sphère terrestre, l'ensemble des points d'où l'on observe un astre, à un instant donné, à une hauteur vraie H est un petit cercle de la sphère, le cercle de hauteur, dont le centre est la projection terrestre de l'astre (ou point substellaire) et dont le rayon sphérique est égal à la distance zénithale $\xi = 90° - H$. La courbe de hauteur est l'image de ce cercle sur la carte marine (de Mercator). Il n'est pas ici question de refaire une étude complète de ces courbes. Les recherches initiales, très détaillées, faites notamment par des officiers de marine ou des professeurs d'hydrographie à la fin du XIXe siècle, ont été ensuite résumées dans les principaux manuels et traités de navigation publiés au cours du XXe siècle. Dans une première approche, on retiendra qu'il existe trois « espèces » de courbes de hauteur suivant la position du cercle de hauteur par rapport aux pôles terrestres et qu'une courbe donnée peut toujours être superposée à une autre suivant une translation en latitude, dans le plan de la carte. Cette propriété va permettre de substituer à la courbe de hauteur correspondant à l'observation une courbe identique, à partir de laquelle les éléments de tracé de la droite pourront être plus simplement déterminés. Le principe de construction des Nouvelles Tables de Guyou est illustré en figure 3-1 ci-après.

Supposons qu'un observateur mesure la hauteur H d'un astre A à un instant donné ; à cet instant, l'angle horaire au premier méridien de l'astre est AHap et sa déclinaison est D ; la position estimée E de l'observateur a pour coordonnées géographiques φ_e et G_e. Sur la carte, le lieu de position de l'observateur est l'arc de courbe (C), que, dans la pratique, au voisinage des positions considérées, on confond avec sa tangente au point déterminatif Z'. Pour déterminer intercept et azimut, É. Guyou considère la courbe de hauteur (C_0), superposable à la courbe (C) , telle que, dans la translation, le point E ait pour transformé un point E_0 situé sur l'équateur. Cette courbe correspond à l'observation à partir de ce point d'un astre fictif A_0, ayant même angle horaire au premier méridien que A, une déclinaison D_0 et une hauteur H_0. Dans ces conditions, le calcul des éléments de la droite de hauteur est particulièrement simple puisque la latitude de calcul est nulle : hauteur H_{e0} et azimut Az_{e0} sont alors des fonctions des deux variables : l'angle au pôle P_e et la déclinaison D_0.

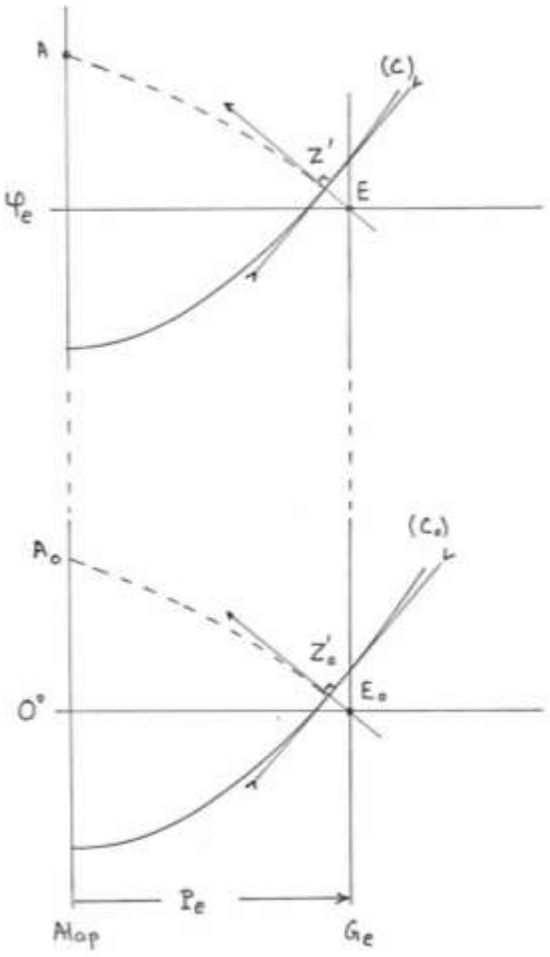


Fig : 3-1

Le tome 1 des Nouvelles Tables, intitulé « Réduction à l'équateur », permet le calcul de H_0 et de D_0 en fonction des quantités H + D et H – D et de la latitude ; le volume comporte 23 pages d'instructions d'emploi et 370 pages de tables au format 20 sur 27 cm. Le tome 2 intitulé « Calcul de la hauteur et de l'azimut » permet, comme son nom l'indique, de calculer les éléments de la droite de hauteur ; il comporte 285 pages de tables, au même format.

Pour simplifier le calcul, É. Guyou propose, pour construire la droite de hauteur, d'utiliser un point auxiliaire, les tables étant argumentées en angle au pôle et en latitude avec un intervalle de 20' d'arc : les coordonnées du point auxiliaire seront donc celles qui correspondent à des entrées directes dans les tables.

Commentaires :

À partir d'une idée simple qui consiste à utiliser les latitudes croissantes, soit des logarithmes népériens, la méthode imaginée par É. Guyou est, il faut bien le reconnaître, compliquée dans son application , puisqu'elle impose des allers et retours entre les colonnes des « Tables de Poche », des règles de signe multiples et, éventuellement, des interpolations assez nombreuses si on veut conserver la précision du dixième de minute. Concernant les déterminations de l'azimut, de l'angle au pôle et de la longitude, il est concevable, avec un peu d'entraînement, de pouvoir mémoriser, et maîtriser, la procédure de calcul ; cette maîtrise paraît illusoire dans le cas du calcul de latitude, dans la méthode du méridien estimé. Émile Guyou admet, dans ce dernier cas, la longueur du calcul mais indique, dans son mémoire de 1888 :

> « *… Ce calcul est assez long relativement au calcul d'angle au pôle, à cause de l'obligation dans laquelle on se trouve de calculer directement les logarithmes des cosécantes ; si la table donnait également ces logarithmes dans le même système, il serait ramené à la même simplicité.* »

On a notamment remarqué que la formulation peut devenir complexe (voir inextricable) dès lors qu'il faut exprimer une fonction trigonométrique simple avec les seules fonctions latitude croissante et son complément. C'est cette difficulté qui a gêné la généralisation de l'emploi de la méthode à la résolution d'autres problèmes de navigation et a conduit, à terme, à son abandon. La méthode d'Émile Guyou s'est exportée en Grande-Bretagne où elle a été reprise par H. B. Goodwin, Naval Instructor de la Royal Navy, qui tenta, à l'instar de Guyou et sans plus de succès, une généralisation.

La méthode associée à l'utilisation des « Tables de Poche » d'Émile Guyou ne paraît pas avoir rencontré une grande faveur auprès des marins, pour, à notre avis, au moins deux raisons : la première liée au manque de clarté de sa présentation et la seconde consécutive à l'exécution du calcul qui n'offre pas de réelle simplification par rapport à celui, courant à l'époque, du « calcul d'heure » par la formule de Borda associé à un calcul d'azimut par la table de Perrin par exemple. Néanmoins, la méthode de calcul de l'azimut et de l'angle au pôle est intéressante sur le plan pratique puisqu'elle ne fait appel qu'à une seule courte table à simple entrée ; il s'y ajoute un avantage de précision puisque les angles, l'angle au pôle notamment, sont déterminés par leurs tangentes.

Comme plusieurs autres officiers de marine, Émile Guyou a longuement cherché sur le sujet des courbes de hauteur. Il semblerait que ceux-ci y voyaient une source de solutions simultanément simples et rigoureuses, sur le plan mathématique, au problème du point astronomique. Les « Tables de Poche » constituent le point de départ de la réflexion d'Émile Guyou sur les courbes de hauteur qui va le conduire progressivement à la conception des « Nouvelles Tables de Navigation ».

Le procédé peut évidemment surprendre au départ mais, à niveau de précision égal, nous n'avons pas trouvé l'exercice ni plus compliqué ni plus long qu'avec la méthode semi-logarithmique directe à laquelle il faut naturellement ajouter l'utilisation d'une table (ou d'un abaque) d'azimut. Nous n'avons pas eu connaissance des réactions d'utilisateurs contemporains de Guyou. La méthode est exposée, avec concision, par F. Marguet dans son cours de navigation de l'École Navale puis, simplement mentionnée au hasard des différents cours et traités de navigation. De toute évidence, elle ne rencontra pas un grand succès en pratique et fut rapidement rangée dans la catégorie des curiosités mathématiques. Les commentaires plus récents (A. Gougenheim et Ch. H. Cotter notamment) font plutôt état du volume des tables (« … *Guyou's tables contained 700 pages in two bulky volumes*. ») ; est-ce là un vrai problème ? La latitude variant peu d'un jour à l'autre, le tome I reste, pour une journée donnée, ouvert quasiment à la même page qui peut être repérée par un signet ; quant au tome II, il est à ouvrir à la seule page correspondant à l'angle horaire local considéré.

Dans cette étude, on a pu constater le souci de rigueur et de précision d'Émile Guyou qui, de toute évidence, cherchait à minimiser les effets résultants des approximations faites dans l'application de la méthode Marcq de Saint-Hilaire. Malheureusement, cette qualité, indispensable en mathématiques, peut conduire à développer des raisonnements complexes : il en résulte des exposés dans lesquels le fil conducteur et les éléments essentiels des méthodes présentées n'apparaissent pas toujours très clairement. Ces méthodes n'étaient donc pleinement accessibles qu'à des officiers ayant une culture mathématique de niveau supérieur, ce qui, à l'époque, était loin d'être le cas de tous les capitaines au long cours. Les tables d'Émile Guyou n'ont donc pu pénétrer le milieu de la marine marchande que de façon tout à fait marginale.

Annexe 3-1 : Tables de poche.
Annexe 3-2 : Nouvelles tables de navigation.

Chapitre 4

LES HÉRITIERS DIRECTS DE SIR W. THOMSON

Introduction :

Les tables conçues par Sir William Thomson n'eurent, pour plusieurs raisons que nous avons énoncées au chapitre 2, que peu de succès auprès des marins professionnels. Le concept est cependant séduisant et il reste à en faciliter l'application pratique. Tout naturellement, ce sont des marins qui ont pris le relais dans cette recherche initiée par le scientifique qu'était Thomson. Nous retiendrons ici les travaux des officiers de marine René Delafon et Francisco Radler de Aquino et des capitaines au long cours Erick et Michel de Catalano qui conçurent des outils directement issus de la table de résolution des triangles rectangles de Thomson permettant de trouver les éléments de la droite de hauteur à partir d'un point auxiliaire judicieusement choisi.

Tables de Delafon :

René Delafon (1857-1937) est entré dans la marine en 1874 ; il gravit successivement tous les échelons de la hiérarchie jusqu'au grade de capitaine de vaisseau et commande notamment le croiseur *Forbin* en 1904 et le cuirassé *Hoche* en 1908. Il quitte le service actif en 1914. À l'image de Pagel, Hilleret, Marcq de Saint-Hilaire, Perrin, Guyou et quelques autres, il appartient à cette catégorie de « marins savants » : il est notamment l'auteur de plusieurs mémoires publiés dans la Revue Maritime et Coloniale entre 1883 et 1894.

En 1893, il termine le calcul de ses tables qui seront éditées par Berger-Levrault sous le titre de « Méthode rapide pour déterminer les droites et courbes de hauteur et faire le point ». Le mémoire de présentation de cet ouvrage parait dans la Revue Maritime et Coloniale de mars 1894. R. Delafon y écrit en introduction :

> *« La méthode que nous venons de publier chez MM. Berger-Levrault ne peut être exposée que succinctement dans cette Revue. En la comparant aux procédés proposés dans ces dernières années pour simplifier la détermination des droites de hauteur et en mettant en parallèle son type de calcul, le lecteur pourra néanmoins s'assurer des nombreux avantages qu'elle réalise :*
>
> - *généralité absolue du procédé ;*
> - *suppression de l'emploi des logarithmes et du calcul trigonométrique ;*
> - *diminution des chances d'erreurs dans la combinaison des nombres et dans les chiffres ;*
> - *grande rapidité d'exécution du calcul d'une droite de hauteur avec l'approximation demandée à la mer ;*
> - *format réduit des tables (130 pages) ;*
> - *son emploi n'exige le concours d'aucune autre table, sauf la Connaissance des Temps ou toute autre publication annuelle analogue.*
>
> *Conséquences :*
>
> - *type de calcul uniforme, quelles que soient les conditions d'observation ;*
> - *augmentation de la sécurité par la facilité de détermination de la position exacte du navire ;*
> - *économie de temps, et par suite de combustible, par la précision de la route,*
> - *de plus, pour les bâtiments de guerre, augmentation du rayon d'action par la suppression du chemin inutile. »*

L'ouvrage de R. Delafon se présente sous la forme d'un livret au format de 22 cm sur 14 cm totalisant environ 135 pages dans lesquelles on trouve des instructions détaillées d'emploi accompagnées d'exemples ainsi que les tables usuelles de corrections des hauteurs, conversions, interpolations et rectifications de la droite lorsque la distance « *entre le point déterminatif employé (point rapproché auxiliaire) et le point probable exige cette correction* ». À leur suite sont disposées les tables indexées F et G constituant les éléments essentiels du document.

La table F est directement issue de la table de Thomson : elle donne la cohypoténuse du triangle et les deux angles non droits (Thomson n'en donnait qu'un seul) en fonction des valeurs entières des deux côtés de l'angle droit ; l'argumentation est identique, allant de 0° à 90° avec un intervalle de 1°. Outre une présentation plus aérée – à

chaque page correspond une seule valeur du côté constituant l'argument d'entrée en colonne – on remarque l'indication des taux de variations de la cohypoténuse pour 10' de variation de l'entrée en ligne, ce qui rend l'interpolation aisée.

La table G, dite table répertoire, permet, à l'aide des éléments estimés, de trouver la valeur pertinente de l'argument d'entrée en colonne, donc la page sur laquelle on trouvera les différents éléments nécessaires au calcul de la hauteur et de l'azimut.

Pour résoudre le problème, Thomson avait choisi de décomposer le triangle de position de l'astre selon la hauteur issue de l'astre. R. Delafon, a préféré décomposer le triangle de position selon la hauteur issue du zénith supprimant ainsi une interpolation par rapport à la méthode Thomson ; en contrepartie, l'azimut résulte de la combinaison de deux angles. La procédure de calcul est ensuite identique à celle de Thomson avec deux entrées successives en ligne dans la même colonne relative à la valeur sélectionnée pour un côté, donc sur la même page. La première entrée se fait en cherchant, ligne par ligne, le couple φ_a-P_a, (latitude auxiliaire-angle au pôle auxiliaire) le plus proche du couple φ_e-P_e (latitude estimée-angle au pôle estimé). La ligne trouvée donne la valeur de l'autre côté de l'angle droit qui est un nombre entier de degrés, la latitude du point auxiliaire ainsi que sa longitude déduite de la valeur de l'angle au pôle P_a ; on note également, sur cette même ligne, la valeur de l'autre angle non droit qui interviendra dans le calcul de l'azimut. La seconde entrée en ligne se fait selon une combinaison de la distance polaire (complément de la déclinaison) et de l'arc trouvé précédemment ; elle donne accès à la hauteur auxiliaire, qui nécessite une interpolation pour les minutes de déclinaison, et au second angle intervenant dans la détermination de l'azimut. Le calcul est donc relativement expéditif : trois lectures de tables et une interpolation conduisent aux résultats cherchés avec une précision suffisante en pratique. On notera ici que R. Delafon est l'un des premiers à évoquer, en France, la notion de « précision pratique à la mer » ainsi que le dilemme entre sûreté et rapidité du calcul liées au niveau de précision du résultat.

Tables de Radler de Aquino :

Francisco Radler de Aquino (1878-1953), officier de la marine du Brésil, s'est intéressé très tôt à la résolution du problème de la droite de hauteur puisque son premier article sur le sujet est publié en 1899 dans la Revista Maritima Brasileira, alors qu'il est cadet de la Marine : « O methodo de Marcq Saint-Hilaire para um observador determinar a sua posição no mar, com taboas para a sua applicacão ». En 1903, il publie à Rio de Janeiro une étude ainsi que des tables de calcul : « A navegação sem logaritmos » ; ces dernières sont identiques à celles de Thomson mais comportent en plus une table index permettant d'accéder sans hésitation à la page de travail et la donnée des différences tabulaires pour effectuer les différentes interpolations. Curieusement Radler de Aquino n'utilise pas la notion de point auxiliaire et se ramène au point estimé ce qui complique singulièrement le calcul. Admettant la complexité de sa solution, Radler de Aquino a poursuivi ses recherches et publie, en 1910, une édition entièrement révisée de ses tables. Celles-ci paraissent simultanément au Brésil et en Grande-Bretagne sous les titres respectifs de « Taboas para achar Alturas e Azimuths » et de « The Newest Navigation, Altitude and Azimuth Tables ».

La table principale est développée sur 116 pages, l'argument d'entrée en colonne est le côté de l'angle droit correspondant à la hauteur issue de l'astre du triangle de position ; l'intervalle d'argumentation est de 30' (sauf entre 84° et 90° où il est de 1°). L'argument d'entrée en ligne est, cette fois, le complément du second côté du triangle rectangle considéré, soit, en première entrée, la latitude du pied de la hauteur sphérique issue de l'astre et, en seconde entrée, la distance de ce point à l'horizon. Cet artifice permet de trouver tous les éléments utiles par l'application de seulement deux formules et, ainsi, de supprimer la table index ; l'intervalle d'argumentation en ligne est de 1°. Simultanément, les taux de variation sont donnés pour l'exécution des interpolations linéaires, ces dernières étant réduites au strict nécessaire en utilisant un point auxiliaire.

L'édition de 1910 a été soumise aux critiques, britannique et américaine notamment. En Grande-Bretagne, c'est le William Hall, aumônier et Naval Instructor de la Royal Navy, qui fera part de ses observations dans un article publié dans le Nautical Magazine : après la relation de sa première prise en main des tables, laborieuse semble-t-il, et une proposition de modification de leur présentation il termine son article par :

« *… Aquino's Tables are beautiful in theory and excellent for a skilled man ... But I dare not affirm that everyone will take the trouble to learn them, and they need clear understanding.* »

En bref, la critique anglaise n'est pas des plus favorable, l'outil étant jugé trop théorique et hors de portée du navigateur ordinaire. En revanche, l'avis de la direction du département navigation de l'US Naval Academy d'Annapolis est nettement plus louangeur et on relève, sous la plume du commander G. R. Marvell :

« *After a careful examination of the book and the methods given for the solution of the astronomical triangle there can be no doubt of its practicability and of its claim "The simplest and readiest in solution" … Taken as a whole, this book cannot be too highly recommended, and all navigators should possess a copy ...* »

Il n'en demeure pas moins que la question des interpolations constitue le principal handicap à l'utilisation des tables de Radler de Aquino qui poursuit ses recherches. Une deuxième édition est publiée en 1912 apportant quelques simplifications ainsi que les éléments de calcul de l'angle à l'astre qui permet d'interpoler facilement la hauteur en fonction du résidu de déclinaison (différence entre les valeurs de déclinaison réelle et de calcul, telle que lue dans la table). L'édition de 1912 est ensuite réimprimée en 1917 et 1918. Enfin, une troisième édition est publiée en 1924 (Brazilian Centenary Edition) ; celle-ci comporte des extensions de tables pour couvrir les besoins de la navigation aérienne ainsi que des instructions pour calculer les éléments de la droite de hauteur par décomposition du triangle de position selon la hauteur sphérique issue du zénith.

Les tables sont ensuite entièrement repensées par leur auteur qui publie aux États-Unis en 1927 « Aquino's Newest Sea and Air Navigation Tables ». Il s'agit essentiellement d'une nouvelle présentation, plus générale, qui autorise la résolution du triangle de position selon les deux décompositions en triangles rectangles ; l'intervalle d'argumentation est de 1° pour les deux entrées et la présentation des taux de variations uniformisée. L'ouvrage est réédité en 1938, toujours aux États-Unis.

F. Radler de Aquino poursuit inlassablement sa quête de la table idéale et, en 1943, publie au Brésil « Universal Nautical and Aeronautical Tables : Uniform and universal solutions ultra-simplified ». Ces tables sont conçues à partir d'une décomposition selon la hauteur sphérique issue de l'astre ; les intervalles d'argumentation sont de 1° pour l'argument d'entrée de ligne et de 10' pour celui se trouvant en tête de colonne. La conception est cependant devenue bien différente de celle imaginée par Sir W. Thomson puisqu'il n'y a plus d'argument commun aux deux entrées successives dans la table : les lectures de table doivent s'effectuer sur deux pages différentes. La démarche est à rapprocher de celle de Charles Bertin dont on détaillera au chapitre suivant les recherches visant à accéder, lui aussi, à une table idéale.

La table des triangles rectangles des frères de Catalano :

Henri, dit Erick, de Catalano est né à Milan le 3 novembre 1878. Après un an de service à l'État, il est diplômé capitaine au long cours en 1898 et commence sa carrière d'officier chez Fraissinet. Il entre en 1901 aux Messageries Maritimes où il effectue son premier embarquement sur le *Tigre*. Il obtient le brevet supérieur de capitaine au long cours en avril 1904 et est titularisé lieutenant en septembre de la même année puis embarque successivement sur différents navires affectés aux lignes d'Extrême-Orient. Entre 1910 et 1914, Erick de Catalano est mis à disposition de la Compagnie de l'Est Asiatique Français par les Messageries Maritimes et commande le stationnaire en Indochine *Touareg*. En 1914, il est de retour aux Messageries et est titularisé second capitaine ; il embarque successivement, dans cette fonction, pendant pratiquement toute la durée de la guerre, à bord de l' *Océanien* puis du *Sphinx*. En 1918, il est nommé capitaine du *Pacifique*, courrier de la ligne Nouméa-Sydney. En 1920, il prend la direction de la division Pont à l'armement de Marseille ; il occupe ce poste jusqu'à l'été 1926. La direction de la compagnie lui confie alors le commandement du paquebot *Mariette-Pacha*, affecté à la ligne de Méditerranée orientale au départ de Marseille. En juillet 1927, le navire touche un haut-fond des côtes de Crête dont la présence n'est pas mentionnée sur la carte. L'évènement ne semble pas avoir fait de victimes et *Mariette-Pacha* poursuivra sa route sur Marseille, sans encombre semble-t-il, mais les avaries à la coque entraînent l'indisponibilité du navire pour une rotation. Il ne sera pas retenu de faute technique à l'encontre du commandant Erick de Catalano ; cependant la direction des Messageries Maritimes lui reprochera un manque de prudence en navigation. Cette malheureuse affaire le conduira à donner sa démission qui sera effective le 10 mars 1928.

Les renseignements d'ordre biographiques concernant Michel de Catalano sont beaucoup moins fournis que ceux concernant son frère. On sait seulement qu'il est titulaire du brevet de capitaine au long cours, et qu'il a effectué la première partie de sa carrière maritime au sein des cadres de la Méditerranée de la Compagnie Générale Transatlantique. Fin 1908 ou début 1909, alors qu'il faisait fonction de second capitaine, il rejoint les cadres du Nord de cette compagnie et embarque successivement, en qualité de second, à bord de différents cargos mixtes puis du paquebot *Touraine* (1911-1912) ; il est alors proposé pour un commandement. On perd ensuite sa trace jusqu'en 1914 où il est nommé à la direction de l'agence de la Compagnie Générale Transatlantique à Bordeaux. Après la Première Guerre mondiale, il occupe les fonctions d'inspecteur général de l'armement de cette compagnie.

Au travers des différents documents consultés, il ressort que les deux frères sont des observateurs et de calculateurs confirmés. Leur expertise en navigation astronomique va les conduire tout naturellement à concevoir une table originale associée à des procédures opératoires ainsi qu'à adapter une règle à calcul à la résolution de problèmes courants de navigation. Leurs travaux sont motivés par la constatation suivante qu'ils notent en préface de leur ouvrage :

> « *Dans la pratique, l'officier de quart emploie en général la méthode qui lui est la plus familière et, s'il vient de quitter les bancs de l'école, il cherche souvent une précision illusoire, s'encombrant de tables volumineuses où il fait de multiples entrées ; il augmente ainsi les chances d'erreurs sans aucun bénéfice. Chose curieuse, alors que dans un atterrissage embarrassant on bénirait souvent l'officier donnant une droite même erronée de 2 ou 3 milles, c'est au large où on pourrait très bien se passer d'observations que l'on fait les calculs les plus précis. Une longue pratique nous a prouvé surabondamment qu'une précision illusoire était aussi néfaste que les erreurs provenant de règles de signes complexes employées avec l'inévitable nervosité que produit toujours la fuite du temps à l'approche du danger* ».

On relève ensuite, dans les instructions d'emploi :

> « *En 1905 après avoir pendant sept ans, employé d'une façon continue la Méthode Delafon, dont on ne dira jamais assez de bien, nous nous décidions à combiner la table actuelle, pour notre usage personnel et sans aucune idée de spéculation scientifique. Ce que nous voulions était une méthode rapide et sûre nous permettant de traiter certains problèmes dont nous faisions alors un fréquent usage …* »

La table qu'ils conçurent est donc construite sur le modèle de celles de Thomson et Delafon ; elle donne les deux angles et la cohypoténuse d'un triangle rectangle en fonction des deux côtés de l'angle droit et elle est construite avec un repérage neutre, ne faisant pas appel à la symbolisation des arcs et angles utilisés en navigation. Le triangle de position peut ainsi être résolu selon les deux décompositions usuelles en triangle rectangle c'est-à-dire selon les hauteurs sphériques issues de l'astre A ou du zénith Z. Pour chacune des valeurs entières de cette hauteur, de 0° à 90°, les éléments de calculs sont disposés sur une double page, avec un intervalle d'argumentation de 1°, de façon à éviter toute ambiguïté de nom ou de signe ; la disposition choisie constitue par ailleurs la principale originalité de cette table. Après avoir déterminé une valeur approchée de la hauteur du triangle, à l'aide de la table elle-même ou d'une règle à calcul, on effectue deux entrées successives sur la même double page. La première entrée fixe le couple angle au pôle auxiliaire et cohypoténuse de calcul (déclinaison ou latitude selon la décomposition utilisée) ainsi que le second côté de l'angle droit, qui est un nombre entier ; on y lit également la valeur de l'autre angle non droit, qui servira à déterminer l'angle à l'astre ou l'azimut selon le cas. Ce second côté, combiné avec la déclinaison ou la latitude, donne la ligne de la seconde entrée qui conduit à trouver la hauteur de calcul et les éléments concluant la détermination de l'azimut et de l'angle à l'astre.

La droite de hauteur se construit ensuite à partir d'un point auxiliaire, dont les coordonnées résultent des éléments choisis pour effectuer le calcul avec la table. La différence entre déclinaisons réelle de l'astre et la valeur relevée dans la table impose de corriger la hauteur calculée ; la correction fait intervenir cette différence et l'angle à l'astre (ou angle parallactique). Cette correction peut se calculer, à l'aide d'un petit tableau annexe de la table, ou se reporter graphiquement ; dans ce dernier cas, les auteurs conseillent d'utiliser un « rapporteur elliptique à base graduée » dont un modèle est représenté dans le document. Dans les explications qu'ils donnent sur l'usage des tables, les frères de Catalano indiquent :

> « *Cette méthode donne en 50 secondes et sans interpolation, tous les éléments nécessaires au tracé de la droite de hauteur. Elle est la plus rapide des méthodes précises. Elle est la plus précise des méthodes rapides* »

Ils précisent également que, selon leurs critères, il faut moins d'une minute pour construire une droite de hauteur et moins de 30 minutes pour construire un point par trois étoiles, observations comprises.

La table est publiée en 1918, à Bordeaux, chez l'éditeur et imprimeur G. Frayssé, sous le titre de « Tables Nautiques des Triangles Rectangles Rectilignes et Sphériques ». Le format est inhabituel (31 cm de haut sur 13 cm de large) et l'impression est bicolore, noire et rouge pour en faciliter la lecture. Outre la table principale de résolution des triangles, l'ouvrage contient toutes les données nécessaires aux calculs de navigation usuels : corrections des hauteurs, conversions, calculs d'éphémérides approchées, calculs relatifs à l'Étoile polaire, etc. Il y figure de très nombreuses explications, rédigées dans un langage assez inhabituel, ainsi que des fiches de procédures relatives au traitement des différents problèmes de navigation. Peu après leur publication, la direction des Messageries Maritimes fait délivrer à chacun de ses navires deux exemplaires de la table des frères de Catalano.

En 1926, l'ouvrage est réédité par la Société d'éditions géographiques maritimes et coloniales, sous le titre de « Table Zonique » ; il est préfacé par Frédéric Marguet, capitaine de frégate et professeur à l'École navale, séduit par le procédé de correction graphique de la hauteur, qui écrit :

> « *… la table, qui est peu volumineuse et qui donne cependant la demi-minute d'arc et la seconde de temps, est ingénieusement disposée de manière à ne comporter qu'une seule entrée pour la résolution du triangle de sorte que tout s'y fait à la même page (…) Mais, voici qui est plus important, plus séduisant et plus original. L'emploi de la table se fait par simple lecture des nombres sans aucune interpolation. L'artifice qui dispense de toute interpolation consiste, après avoir tracé à la manière ordinaire le vecteur* $H_v - H_e$ *du point Marcq, à tracer à son extrémité un second vecteur* $D - D_a$, *D étant la déclinaison exacte,* D_a *la déclinaison approchée lue dans la table. Ce second vecteur est orienté par l'angle parallactique que donnent les entrées effectuées. Ainsi est obtenu un point déterminatif propre aux auteurs, qui s'assurent en outre par le calcul que les approximations réalisées sont effectivement permises dans la pratique (…) En somme l'interpolation – et il est toujours désagréable d'interpoler – est remplacée par une élégante construction géométrique*. »

Si le format de cette seconde édition n'a pas changé, l'impression y est plus ordinaire et la couleur rouge a disparu. La présentation des tables est modifiée (permutation des colonnes centrales) et correspond plus particulièrement à une résolution du problème par décomposition du triangle de position selon la hauteur sphérique issue de l'astre. Les explications sur l'usage des tables sont mises à jour, tout en gardant la même approche particulière, parfois obscure. On y relève un type de calcul unique, une instruction détaillée sur la règle à calcul Béghin adaptée, par les frères de Catalano, aux problèmes de navigation, des éléments sur la construction de la droite radiogoniométrique ainsi que des instructions sur la construction et l'usage du graphique polyédrique (projection gnomonique) dont ils préconisent l'emploi.

Commentaires :

On sait que la meilleure table est celle que l'on utilise régulièrement, pour ne pas dire tous les jours, affirmation souvent lue ou entendue. Les trois tables que l'on vient de présenter, conçues par des marins à partir du prototype de Sir W. Thomson, sont de toute évidence des tables d'habitués qui permettent, quand on en connaît les moindres recoins, d'arriver très vite à un résultat approché, compatible avec la précision exigée au large.

Elles ne sont cependant pas sans défaut : outre la difficulté du choix du couple angle au pôle-déclinaison ou angle au pôle-latitude le mieux placé, elles font appel à un point auxiliaire qui peut être assez éloigné du point estimé. Rappelons brièvement les inconvénients associés à cette distance, si elle est importante : rectification de la droite de hauteur si l'intercept est grand ou si le point observé est éloigné du point déterminatif et manipulation de grands graphiques.

Reste, concernant les tables de F. Radler de Aquino et des frères de Catalano, l'interpolation consécutive à la valeur de la déclinaison dont la solution la plus simple est sans doute la détermination de la correction de la hauteur auxiliaire en fonction de l'écart entre valeurs de déclinaison réelle et tabulée ; ce calcul s'effectue facilement et sans ambiguïté connaissant l'angle à l'astre. On reste un peu perplexe devant la solution graphique proposée par les frères de Catalano qui, malgré l'utilisation du rapporteur préconisé, demande une certaine réflexion sur le sens correct du report des différentes directions.

Annexe 3-1 : Tables de Delafon (1893).
Annexe 3-2 : Tables de Radler de Aquino (1924).
Annexe 3-3 : Tables zoniques (1926).

Chapitre 5

TABLES DE CHARLES BERTIN

Qui était Charles Bertin ?

Charles Bertin est né en 1874 à Vire (Calvados). Il est admis à l'École navale en 1891 puis embarque, à partir de 1894 sur divers bâtiments (*Primauguet, Cassini, Nielly, Loiret*) ; dans son relevé de carrière, on remarque qu'il est breveté officier fusilier et qu'il a commandé une canonnière à Madagascar en 1901. En 1903, il opte pour le corps des professeurs d'hydrographie ; il est affecté successivement dans les écoles d'Agde, de Lorient puis, en 1911, de Saint-Malo ; il est alors professeur d'hydrographie de 1re classe et prend la direction de cette école en 1913-1914. Pendant la Première Guerre mondiale, Charles Bertin fait le choix de l'aéronautique navale. Après un temps de formation, sa carrière de pilote militaire débute en juin 1916 où il est nommé chef d'escadrille à Saint-Pol, près de Dunkerque. Il effectue ensuite une formation de pilote d'hydravion puis est désigné en 1917 pour le centre maritime de Sousse en Tunisie ; il y est nommé commandant. Bertin quitte Sousse en novembre 1917 et rallie Saint-Raphaël puis Dunkerque en août 1918. Sa carrière dans l'aéronautique navale s'arrête en décembre 1918 et on le retrouve en 1919 comme directeur de l'école nationale de navigation maritime de Saint-Malo, poste qu'il conserve jusqu'en 1921 ; il est ensuite nommé à Nantes en janvier 1922 puis à l'école nationale de navigation de Saint-Brieuc en août 1922. Charles Bertin quitte l'enseignement maritime fin 1923 et rejoint l'administration des Invalides de la Marine à Cherbourg puis à Brest ; cette reconversion ne l'empêchera nullement de continuer son œuvre, quasiment jusqu'à sa mort en 1943 à la Garde du Var où il s'était retiré.

Le personnage est un passionné et un acharné ; sa ténacité semble n'avoir jamais faibli. C'est un calculateur infatigable qui a consacré une large partie de sa vie à la mission qu'il s'était donnée : simplifier le calcul nautique et en rendre l'exécution la plus rapide et la plus sûre possible tout en maintenant un excellent niveau de précision. Voici ce qu'il en dit lui-même dans l'introduction du « Carnet Bertin » de 1928 :

> « *Il y a un quart de siècle que l'auteur s'acharne à la réalisation de ce perfectionnement, auquel il immola sa vie, en s'y considérant comme l'esclave d'une consigne consentie : rendre, par la simplicité de l'opération et par la rapidité et la précision des résultats, le plaisir d'observer si attrayant que seuls puissent n'y pas constamment recourir les pauvres paresseux vraiment incurables, si rares chez les navigateurs.* »

Genèse de la Méthode Bertin :

Fin 1910 ou début 1911, Charles Bertin adresse à l'Académie des sciences un mémoire relatif à une « Table de point sphérique » ; ce mémoire est présenté le 15 mai 1911 par Alfred Picard et constitue l'acte de naissance de la « Méthode Bertin ». Le compte rendu est succinct : après avoir précisé le volume de la table, plus de 400 pages, et le degré de précision des résultats donnés, le 1/10 de minute d'arc, le rédacteur passe rapidement en revue :

- la formulation utilisée,
- le procédé de construction de la droite de hauteur de Marcq de Saint-Hilaire avec l'emploi d'un point auxiliaire,
- le « point horaire » (point déterminatif Lalande) et la notion d'erreur sur l'état absolu du chronomètre.

Le texte indique en conclusion que :

> « *Tous les problèmes de la navigation se résolvent par cette table, et la décomposition en triangles rectangles permet de supprimer l'emploi des formules de trigonométrie sphérique* ».

Le compte rendu se termine par quelques lignes sur la détermination des éléments d'une orthodromie.

En l'état, le compte rendu, qui ne comporte ni figure, ni exemple, ni extrait de la table, est bien insuffisant pour se faire une idée précise de l'étendue des travaux de Charles Bertin. On relève cependant que l'intervalle

d'argumentation est de 10', horizontalement comme verticalement : le maillage de cette table est donc beaucoup plus serré que celui d'autres outils de calcul existant à l'époque. On devine l'ampleur du travail et il faut attendre la publication du « Carnet Bertin » en 1928 pour apprendre :

> « *Le Monument Bertin est tout calculé depuis 1910 mais son onéreuse édition (5 millions de chiffres) n'aura lieu que dans un lustre. Il constituera le couronnement d'une laborieuse carrière.* ».

Le « Monument Bertin » ne fut jamais publié mais existait dans une version primitive manuscrite, intégrale dès 1910, sous le nom de « Table de point sphérique ». Ce titre a été choisi par analogie avec la table de point estimé qui donne les chemins en latitude, NS, et en longitude, EW, décrits lorsque l'on parcourt une distance m suivant l'angle de route R (figure 5-1) ; les abréviations NS = c et EW = b se retrouveront dans les différentes tables et instructions afférentes de Charles Bertin.

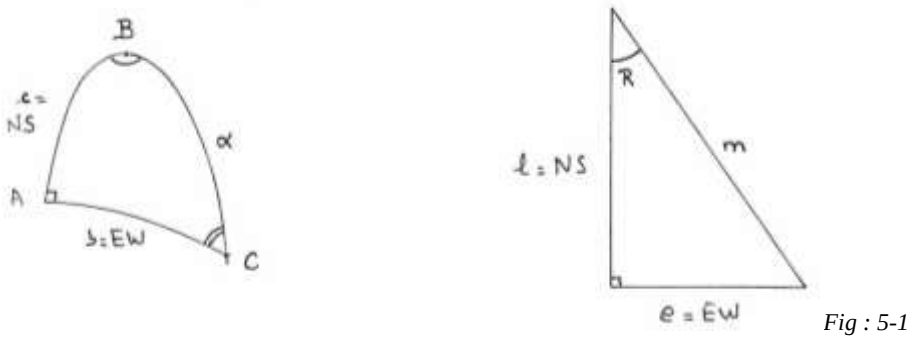


Fig : 5-1

En 1911, les travaux de Charles Bertin ne sont cependant pas arrivés à maturité, loin s'en faut, et il va s'attacher à présenter ses idées et son projet aux gens du métier. Bertin rédige donc un très long mémoire : « La Table de point sphérique ou essai d'une navigation sans logarithmes » qui est fractionné et publié dans les livraisons de la Revue Maritime de juillet, septembre, octobre, novembre, décembre 1913 et juillet 1914. Ce mémoire présente dans le détail la méthode de calcul et la construction de la table dont il donne des extraits manuscrits. En outre, le texte contient toutes les informations nécessaires à une analyse complète du projet : discussion autour du point auxiliaire, mécanisme des interpolations, application de la table à différents procédés de calcul des éléments de la droite de hauteur, traitement d'autres problèmes courants de navigation comme, par exemple, la détermination de circonstances favorables à certaines observations, la recherche du nom d'un astre et les calculs de navigation orthodromique ; le mémoire s'achève sur une présentation du quadrant planisphérique, qui fera l'objet d'une analyse particulière au chapitre 12 dédié aux diagrammes et abaques.

Le mémoire est particulièrement dense et d'une lecture parfois ardue ; outre les aspects techniques résumés ci-dessus, il donne le point de vue critique du professeur d'hydrographie Charles Bertin sur la pratique de la navigation astronomique à la veille de la Première Guerre mondiale.

La Méthode Bertin, la Table de point sphérique et la Tablette de 1919 :

Pour résoudre un triangle sphérique quelconque, Charles Bertin utilise, comme beaucoup d'autres, la décomposition en deux triangles rectangles. Il y joindra un artifice : l'un des deux triangles rectangles est remplacé par un autre triangle qui lui est opposé par le sommet et dont tous les éléments, autres que l'angle au sommet commun, sont des compléments du triangle remplacé. Dans ces conditions, les différents problèmes de navigation peuvent être résolus à l'aide d'une table, dont les arguments d'entrée horizontal et vertical sont respectivement un angle non droit et la cohypoténuse avec un intervalle d'argumentation de 10' d'arc : c'est la Table de point sphérique ; les éléments calculés sont les deux côtés de l'angle droit, au dixième de minute près, et l'autre angle non droit, au dixième de degré près.

La Table de point sphérique a tout d'abord fait l'objet d'une publication d'un extrait en 1918 dans lequel l'intervalle d'argumentation a été élargi au demi-degré (30'). C'est une sorte de ballon d'essai lancé par Bertin qui écrit dans le texte de présentation du document :

> « *L'extrait de la T.P.S. est, comme son nom l'indique, une petite partie de la « Table de point sphérique » calculée en entier par l'auteur en douze ans de travail. Les arguments y sont distants seulement de 0° 10' dans chaque sens. L'extrait n'est donc que la neuvième partie de la T.P.S. dont l'édition est trop onéreuse pour que l'auteur ose actuellement l'aborder. Déjà l'édition de l'extrait est de sa part un acte audacieux. Il est sans fortune ….. il a des enfants ….. et il chasse le Boche en avion. Quel accueil sera fait à son ouvrage par le personnel enseignant et le personnel navigant ? (…) Va donc, petit extrait, essaie de conquérir ta place sur les passerelles des navires, à côté de l'extrait de la C.T., et dans la bibliothèque des officiers et élèves. (…) Tu apportes tant de rapidité, de simplicité, de sécurité, dans les calculs, que l'auteur compte t'utiliser, en hydravion, à rectifier la route aérienne au large, et – si le Boche ne lui supprime ni l'existence ni les membres – il compte faire, grâce à toi, la traversée de l'Atlantique*. »

Dans ce même texte de présentation, Charles Bertin indique qu'il a été encouragé par, entre autres, deux experts ès calculs nautiques, le commandant É. Guyou et l'amiral É. Perrin ainsi que par l'Inspecteur d'hydrographie J. Vallerey.

L'extrait est un agréable petit volume d'environ 180 pages au format de 16 sur 23 cm ; les instructions d'emploi sont claires et détaillées et la présentation des tables est résolument moderne. Cette dernière sera la « marque » Bertin puisqu'on la retrouvera dans l'ensemble de ses publications ; elle se distingue par :

- l'emploi systématique du degré pour toutes les mesures d'arc et angle,
- l'extension de l'entrée en angle horaire de 0° à 360°,
- le rappel des règles de signe à chaque page,
- l'inscription des résultats sous la forme d'un groupe numérique.

Concernant ce dernier point, qui constitue l'une des originalités des tables de Bertin, on trouve, par exemple, en résultat d'une entrée B = 66° en angle et a_ω = 35° en cohypoténuse un groupe numérique de la forme : **30**091**48**268**37**8. Il conviendra de lire que les côtés de l'angle droit ont pour valeurs respectives 30° 09,1' et 48° 26,8' et l'autre angle 37,8°.

De toute évidence, les retours d'expérience ont été satisfaisants puisque l'on peut lire, dans une lettre, datée du 4 août 1919, du Commissaire aux Transports Maritimes et à la Marine Marchande aux Directeurs des Écoles nationales de navigation maritime :

> « *Je crois devoir appeler tout particulièrement votre attention sur la nouvelle méthode de calcul du point à la mer, due aux recherches de M. le Professeur d'Hydrographie Bertin, Directeur de l'École nationale de navigation maritime de Saint-Malo.*
>
> *Cette méthode, dont vous avez déjà pu apprécier l'intérêt par l' « Extrait de la Table de point sphérique » publié par le même auteur en 1918, et réédité en abrégé dans le « Carnet azimutal », va recevoir bientôt une forme complète et définitive, sous le titre de « Tablette de point sphérique », ouvrage que j'ai l'intention de faire bénéficier d'une souscription, et d'inscrire sur la liste des livres recommandés aux élèves des Écoles de navigation.*
>
> *Les résultats pratiques obtenus jusqu'ici par M. Bertin, tant dans l'exercice de la navigation maritime que de la navigation aérienne, font ressortir l'exactitude et la simplicité de son procédé. Il y a donc intérêt à en faire connaître le maniement aux futurs officiers au long cours et au cabotage ; et, puisque l'enseignement maritime doit comporter une étude complète des principaux moyens pratiques de résoudre les multiples problèmes qui se posent pour le navigateur, il convient d'ouvrir très largement l'accès des Écoles nationales de navigation maritime aux procédés Bertin.*
>
> *Il importe, d'ailleurs, que l'Administration de la Marine Marchande contribue à la divulgation d'un procédé de calculs qui est le résultat apprécié du long labeur d'un de ses professeurs.*
>
> *En conséquence, vous aurez à enseigner aux élèves de votre École, tant long-courriers que caboteurs, au même titre que les autres méthodes de calcul, la méthode Bertin, et à leur laisser toute latitude de l'employer dans leurs calculs de classe, comme elle pourra l'être également dans les examens.* »

En 1919, les éditions Gauthier-Villars publient la Tablette de point sphérique et le Carnet azimutal. La Tablette est identique à l'Extrait avec un intervalle d'argumentation resserré puisqu'il est de 20' ; le Carnet en est une version simplifiée, avec un intervalle d'argumentation d'un demi-degré, il fournit simplement les deux premiers

résultats du groupe numérique arrondis au dixième de degré. L'usage du Carnet est donc limité à la résolution de problèmes pour lesquels un résultat approché est suffisant comme les calculs d'azimut ou d'identification d'astre.

La Tablette de point sphérique est une version améliorée de l'Extrait ; elle est évidemment plus volumineuse, comptant environ 425 pages d'un format un peu supérieur à celui de l'Extrait. Elle est conçue pour traiter le problème de la droite de hauteur selon une décomposition du triangle de position suivant la hauteur sphérique issue du zénith, que Bertin a baptisée « procédé Souillagouët » ; on peut aussi traiter le problème avec l'autre décomposition, suivant la hauteur issue de l'astre, appelé par Bertin « procédé Leblanc ». Les deux procédés font appel à un point auxiliaire et à deux interpolations qui seront exécutées à l'aide d'une table volante dite « carton d'interpolation ». Les procédures de calculs et les opérations connexes sont décrites en détail en annexe.

Il apparait à l'usage que la Tablette est précise, pratique, complète et relativement simple à mettre en œuvre, dès lors que l'on s'en est approprié les règles particulières d'emploi ; la méthode et la procédure de calcul avec la Tablette sont normalisées, quel que soit le triangle à résoudre, et il se confirme chez l'auteur une volonté de progrès et de rupture avec les habitudes anciennes.

Concernant le calcul des éléments d'une droite de hauteur et une fois admis le principe de l'utilisation d'un point auxiliaire, on retiendra que l'intervalle d'argumentation de 20' permet de travailler avec un point de calcul qui reste toujours relativement proche du point estimé (moins de 15 milles). Charles Bertin a présenté plusieurs procédés différents du calcul des éléments d'une droite Marcq de Saint-Hilaire avec la Tablette pour montrer la polyvalence de l'outil, notamment ceux proposés par R. Delafon et F. Radler de Aquino. À l'usage, seuls les procédés dits Souillagouët et Leblanc sont pratiquement à retenir pour un calcul avec la Tablette, avec un léger avantage au premier, plus naturel peut-être compte tenu des interpolations qui restent la difficulté essentielle à laquelle le calculateur doit faire face.

Les publications de 1928 Carnet et Mignonnette Bertin :

Charles Bertin publie en 1928 la Mignonnette et le Carnet Bertin puis, en 1929, la Tablette Bertin, l'ensemble chez l'éditeur Gauthier-Villars. À cette époque, il n'est plus professeur d'hydrographie et s'est totalement identifié à la méthode qu'il a mise au point et dont il s'est fait l'apôtre depuis le début du XXe siècle : il attache donc maintenant son nom à ses publications. Sur chacun de ces documents, on voit apparaître une marque caractéristique, véritable emblème, constitué de la projection d'une sphère et de son réseau de parallèles et méridiens, un « panier à salade », comme le dit Charles Bertin, dont les nœuds sont autant de points calculés, ainsi qu'une devise : « *Simplicité, Rapidité* » pour la Mignonnette, « *Sécurité, Rapidité, Simplicité, Précision* » pour le Carnet et « *Généralité, Célérité, Limpidité, Certitude* » pour la Tablette (figure 5-2). Bertin les présente comme suit dans un envoi à son mécène[9], le commandant Léon Mauriet, figurant en introduction de la Mignonnette :

> « *La toute menue Mignonnette équivaut à la si encombrante Table Zonique ; le limpide Carnet supprime les complications du casse-tête Perrin ; la séduisante et expéditive Tablette relègue aux accessoires cette vieille idole, le logarithme, avec le sans gêne d'un homme sain qui, pour courir, ne s'embarrasse pas de béquilles…* »

On constatera que Charles Bertin ne fait pas dans la délicatesse et on relèvera le caractère outrancier de ses propos.

Le Carnet Bertin constitue une refonte complète du Carnet azimutal dont il conserve cependant exactement la forme ; Bertin le qualifie de « *Bréviaire limpide de navigation maritime et aérienne* ». On y relève des instructions d'utilisation claires et détaillées sur la Méthode Bertin ainsi que sur tous les problèmes qui peuvent être résolus avec ce Carnet, dont l'inventaire figure dans le tableau ci-après :

[9] Le Cdt Mauriet prit à sa charge les frais d'édition de la Mignonnette.

Navigation maritime	
1	Azimut et hauteur
2	Identification d'astre
3	Angle à l'astre ou angle parallactique
4	Lever et coucher vrai
5	Circonstances favorables : passage au premier vertical et digression
6	Orthodromie
7	Vertex orthodromique
7 bis	Navigation mixte
8	Points intermédiaires orthodromiques
9	À quel angle au pôle P un astre de déclinaison D atteint-il un azimut défini Z, la latitude étant φ ?
10	Lever ou coucher apparent
11	Réglage de la montre
Navigation aérienne	
1	Calcul de la droite de hauteur
2	Réglage du chronomètre
3	Courbe Bertin des déviations du compas
4	Compensation du compas
5	Réglage et surveillance des compas
6	Droite radiogoniométrique

Les résultats trouvés seront évidemment approchés, les éléments calculés étant exprimés au dixième de degré près. Léger (190 pages) et d'un format commode (12 sur 21 cm), le Carnet fait partie des documents réglementaires à l'École navale.

Vient ensuite la Mignonnette Bertin, qui se veut, selon son auteur, être un « *abécédaire de précision pour la navigation maritime et aérienne* ». La Mignonnette est un extrait du Carnet Bertin, l'intervalle d'argumentation étant de 1°, les éléments calculés étant toujours exprimés au dixième de degré près ; son domaine d'applications est donc le même que celui du Carnet. La taille du document est très réduite : une centaine de pages au format 11 cm sur 15 cm. Les instructions d'emploi y sont suffisantes et, malgré le petit format, la table principale reste bien lisible.

La Tablette Bertin de 1929 :

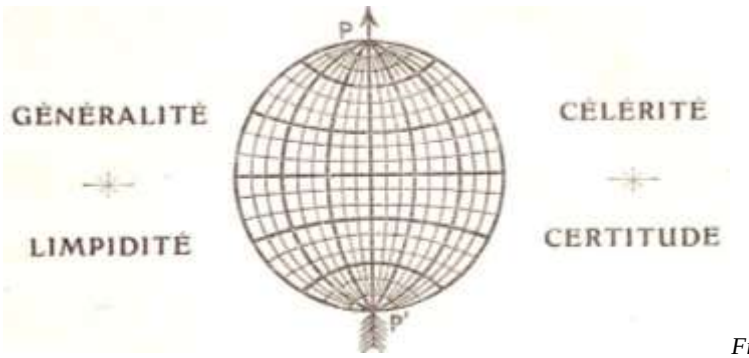


Fig : 5-2

La Tablette de 1929 ne présente aucune différence de fond par rapport à la Tablette de point sphérique de 1919. Les éléments mis en table sont identiques et sont exprimés sous la même forme de groupes numériques, avec une typographie similaire et selon un même intervalle d'argumentation de 20'. Les procédés de résolution des différents problèmes de navigation astronomique restent les mêmes que ceux présentés avec la Tablette 1919.

Comme pour le Carnet et la Mignonnette, Charles Bertin a soigné la présentation de ses instructions d'emploi qui couvrent 70 pages et constituent un véritable manuel pratique de navigation. La table proprement dite occupe 180 pages et est suivie de toutes les tables usuelles de navigation, y compris celle donnant les latitudes croissantes. Le

document permet maintenant de résoudre tous les problèmes auquel le navigateur est confronté ; il est d'usage réglementaire à bord des bâtiments de la Marine nationale.

L'analyse de l'ouvrage permet de relever une tendance vers la généralisation de la méthode et la normalisation : l'auteur expose la discussion relative à toutes les configurations possibles du triangle à résoudre et en donne les résultats sous une forme générale ; les symboles représentatifs des arguments ne sont plus rattachés à la résolution d'un problème particulier, Bertin utilise les notations génériques qui sont aussi celles employées dans le Carnet et la Mignonnette. Toutes les formules utilisées sont indiquées avec la symbolisation générale. Comme dans le Carnet les procédures de résolution des différents problèmes font l'objet d'explications détaillées et on remarque que les procédés Souillagouët et Leblanc restent les mieux adaptés au calcul des éléments d'une droite de hauteur par la Méthode Bertin. Enfin Charles Bertin expose les diverses méthodes de détermination de la droite radiogoniométrique dont il propose la résolution avec la Tablette ; le traitement de ces problèmes, méritant une analyse approfondie sortant du cadre de notre étude, ne sera pas abordé ici.

Quelques libres propos de Charles Bertin :

Charles Bertin a quitté l'enseignement maritime commercial fin 1923 pour venir occuper, à Cherbourg puis à Brest, un emploi de Trésorier des Invalides de la Marine ; il avait alors 49 ans. Il est difficile de connaître ce qui a motivé ce changement brutal d'orientation de sa carrière professionnelle. Il est permis néanmoins d'imaginer que ses relations avec sa hiérarchie n'étaient pas les meilleures.

On remarque que les ouvrages de Charles Bertin, Carnet et Tablette, sont réglementaires dans la Marine de l'État, après mise en circulation de tirages anticipés, respectivement fin 1926 et fin 1927 ; a contrario, la lettre du 4 août 1919 du Commissaire aux Transports Maritimes et à la Marine Marchande, P. Dupuy, incitant fortement à l'emploi de la Tablette de point sphérique dans les écoles en charge de la formation des officiers de la marine marchande, est restée lettre morte. Le vœu de l'administration n'aurait-il pas reçu l'agrément de l'Inspecteur Général d'Hydrographie ?

Dans la Tablette 1929, on relève[10], concernant le point auxiliaire :

> « (…) *Mais jamais le professorat d'âge très mûr ne consentit à l'introduction du point auxiliaire dans l'enseignement officiel. Le génial Souillagouët en mourut de chagrin en 1915. Ce n'est qu'après sa mort, après d'ailleurs une décade d'admiration et d'emploi de l'œuvre du Maître vénéré, que fut édité, par l'auteur de la Tablette, le premier livre de la « méthode Bertin », d'où est éliminée l'utilisation du logarithme, et où est à l'honneur le point auxiliaire*. »

On trouve ensuite un peu plus loin :

> « (…) *La méthode Bertin fut l'objet de propositions, dix-huit ans renouvelées, auprès du corps enseignant, d'adopter sous une forme plus simple encore que celle du génial inventeur Souillagouët, la substitution du « point auxiliaire » au « point estimé », et le remplacement du calcul trigonométrique ou logarithmique, par des décompositions géométriques et le calcul arithmétique. Le professorat d'âge très mûr a poussé les hauts cris : Sacrilège ! Menace ! Indécence ! Après cinquante ans d'existence, le « point auxiliaire » Souillagouët, perfectionné par Bertin, n'appartient encore officiellement à aucun des programmes de l'enseignement maritime commercial. Il est vrai que la Marine Militaire lui a déjà fait une petite place (...) Peu importe que l'intermédiaire entre le faux et le vrai soit « estimé » ou « auxiliaire ». Et le tout est si éphémère.* »

On trouve enfin :

> « *La Mort vient de passer[11] ! Le Chef, nouveau, de l'enseignement maritime commercial, sait que la méthode Bertin est essentiellement animatrice, et combien elle est appelée à augmenter le rendement scolaire, par la belle facilité qu'elle apporte au rôle de l'éducateur. Il est vraisemblable que les motifs de plainte douloureuse, épars dans cette préface, deviennent caducs.* »

Charles Bertin est très « remonté » après ce qui fut sa hiérarchie au point de se réjouir publiquement d'un espoir de changement consécutif au décès de l'un de ses anciens supérieurs. Il serait intéressant de connaître précisément

[10] Le début de la citation figure au chapitre 2, page 24.
[11] Allusion probable au décès de l'Inspecteur Général d'Hydrographie A. Cousin en octobre 1928.

les raisons de l'insuccès des publications de Bertin dans les écoles chargées de la formation des officiers de la marine marchande. À défaut d'éléments de réponse certains, un éclairage, sans doute incomplet, peut être apporté.

À l'époque, la table utilisée dans les écoles doit être neutre, générique et polyvalente. Elle doit permettre de résoudre tous les problèmes, dans tous les cas de figure, et être le complément naturel des enseignements qui y sont dispensés, notamment en cosmographie et en navigation. La table doit permettre un entraînement intensif au calcul et d'obtenir une maîtrise opératoire. Enfin, il n'est pas souhaitable, à l'école, de privilégier une méthode particulière par rapport à une autre : le futur officier doit connaitre toutes les formules générales de résolution des problèmes de navigation et savoir les calculer, sûrement et rapidement, par les moyens les plus généraux et avec la précision requise. À l'issue de cet apprentissage, il est, normalement, en mesure de s'adapter à n'importe quel moyen de calcul qu'il trouvera à bord, puis, le cas échéant, de faire le choix du document de calcul personnel qui le suivra au fil de ses embarquements. En conséquence, la table de logarithmes de navigation est le document de base qui est utilisé à l'école et aux examens de théorie ; l'administration de la marine marchande choisira la table de Friocourt donnant les logarithmes avec 6 décimales et comportant aussi de nombreuses tables usuelles de navigation. Observons simplement ici que l'emploi d'un document généraliste est caractéristique des méthodes françaises de formation, pluralistes, par rapport aux méthodes anglo-saxonnes où le pragmatisme a toujours été privilégié.

On sait qu'à la fin du XIXe siècle, tous les calculs étaient exécutés par logarithmes puis que se sont progressivement imposées les tables d'azimut. Dans les années 20, la réglementation marine marchande laissait le libre choix aux candidats aux examens de leur table d'azimut. Les plus populaires furent les tables de Perrin puis celles de Bataille (ces deux tables ont fait l'objet de nombreuses rééditions et furent tirées jusque dans les années 1960). Un candidat à un examen pouvait tout aussi bien utiliser le Carnet Azimutal ou le Carnet Bertin … mais en encourageait-on l'emploi ? – alors que l'on remarque que la théorie et le mode d'emploi des tables de Perrin figurent dans presque tous les manuels de navigation –.

La présentation des différents moyens de calculs figurait au programme de l'examen de lieutenant au long cours (1923). Le professeur avait-il le temps, et la possibilité, de passer en revue l'ensemble des moyens de calcul ? Le faisait-il objectivement ? Nous arrivons ici à un point délicat car plusieurs professeurs d'hydrographie étaient aussi concepteurs de tables et autres moyens de calculs. Citons bien sûr Charles Bertin mais il y avait également Charles Cornet (Tables nautiques 1928 et graphique d'azimut) qui avait succédé à Bertin à la direction de l'école de Saint-Malo et Paul Constan (Tables graphiques d'azimut en 1906, Tables nautiques en 1927, tables de logarithmes à 5 décimales en 1930). Il est donc permis d'imaginer que les ouvrages de Charles Bertin n'ont pas fait l'objet d'une même qualité de présentation d'une école à une autre. Il nous paraît intéressant de citer le cours de navigation de P. Constan, à titre d'exemple caractéristique de la lutte ouverte qui opposait certains professeurs :

> « *Plus de dix ans après la publication de la table de M. Souillagouët, M. Bertin étant devenu Professeur d'hydrographie et ayant constaté les avantages et les possibilités de celle-ci, la recalcula puis l'édita avec des notations et des dispositions typographiques différentes : d'abord sous le nom de Mignonnette Bertin, simple table d'azimuts ; puis, successivement, avec des arguments de plus en plus rapprochés, sous le nom de Carnet Bertin, qui fournit H_e et A_m à 3' près et, ensuite, sous celui de Tablette Bertin qui, entre les mains de calculateurs entraînés, permet d'obtenir H_e et A_m à 1' près par interpolations.*
>
> *Enfin, dans la préface de son Carnet (1928), M. Bertin annonce que, pour permettre d'obtenir H_e et A_m à 1', sans interpolations, il a calculé, pour l'éditer plus tard, ce qu'il appelle le Monument Bertin. Tout en admirant l'énorme labeur que représentent ces diverses tables, il est regrettable que M. Bertin ait cru devoir adopter, dans celles-ci, des notations bizarres qui ne changent absolument rien à la méthode Souillagouët, mais en compliquent inutilement l'emploi ; il est plus regrettable encore que, tout en adressant, dans son carnet 1928, « son hommage de vénération posthume » à son savant devancier, il ait donné le nom de « Méthode Bertin » à celle qui, de toute évidence et en toute équité, devrait rester connue sous le nom de « Méthode Souillagouët ». Sous ces réserves, la Tablette et surtout le Monument Bertin fournissent une solution satisfaisante du problème de la détermination rapide du point observé, sans calculs logarithmiques, par la méthode exposée au paragraphe précédent*. »

Les propos, acerbes, de Paul Constan sont excessifs et on peut se demander jusqu'à quel point ce dernier a réellement analysé l'ensemble des publications de Bertin.

À ces chicaneries entre professeurs s'ajoute la lutte entre partisans et opposants du point auxiliaire que nous avons déjà évoqué. Il est clair que le concept de point auxiliaire n'a jamais, à notre connaissance, été prôné par les

responsables pédagogiques de l'enseignement maritime en France. En conséquence, et comme pour les autres tables dont l'usage est basé sur l'emploi d'un point auxiliaire, il n'y a très probablement jamais eu d'instruction de l'Inspecteur Général d'Hydrographie favorisant l'emploi des ouvrages Bertin pour les épreuves d'application des examens tout en sachant que la table de Friocourt reste de toutes façons, pour les raisons que nous avons vues, l'outil des épreuves des examens de théorie.

Citons ensuite le point de vue d'Amédée Le Calvé, certes plus récent, mais qui fait état d'un raisonnement qu'il était loin d'être le seul à tenir. Cet extrait est relevé dans le tome 3 de son cours de navigation (réédition de 1966), à propos des « *Tables, abaques ou appareils divers ayant la prétention de simplifier la détermination d'une droite de hauteur* ». Le Calvé reprend le détail du calcul des éléments d'une droite de hauteur en utilisant une table de logarithmes à 5 ou 6 décimales pour le calcul de la hauteur estimée et la table de Perrin pour le calcul de l'azimut et écrit :

> « *Le calcul si simple de H_e et celui de Z_e demande donc à peine 4 ou 5 minutes en tout pour un calculateur expérimenté* (…) *C'est pourtant, avec la prétention de simplifier ce calcul si simple et d'abréger encore ce temps si court que de si nombreux chercheurs français et étrangers ont construit des tables, des abaques ou même des machines à calculer. À mon avis, leurs efforts ont été vains. Et, au risque de passer pour un esprit rétrograde, je vous conseille, à l'école comme à bord, de continuer à employer le bon vieux calcul trigonométrique, du moins pour le calcul de la hauteur estimée*. (…) *Nous ne pouvons exposer ici toutes les élucubrations des inventeurs de tables, de graphiques et de machines à calculer*. »

Le Calvé notifie ici son rejet définitif et sans appel de toute méthode « *ayant la prétention de simplifier la détermination d'une droite de hauteur* ». D'autres avaient très certainement tenu ce même langage avant lui … et encore d'autres le tiendront après.

Enfin, il ne serait pas étonnant que l'insistance de Charles Bertin, son manque de discrétion et de modestie, qui transparaît fréquemment dans les instructions d'emploi de la Tablette 1929 et les textes promotionnels joints, aient agacé, au niveau de l'Inspection Générale et des écoles, et aient eu finalement un effet inverse à celui escompté. N'oublions pas que les professeurs d'hydrographie avaient un statut d'officier, soumis à l'autorité d'une hiérarchie rigide, et étaient tenus au devoir de réserve. Charles Bertin, que l'on sait passionné et totalement habité par la mission qu'il s'est donnée, est profondément révolté, et simultanément meurtri, par son échec auprès des écoles chargées de la formation des officiers de la marine marchande mais va continuer son œuvre en fondant ses espoirs sur la navigation aérienne, sans, pour autant, oublier les marins.

Alors ? Charles Bertin a-t-il travaillé pour rien ? On remarquera tout d'abord que si l'enseignement maritime civil (ou commercial) ne l'a pas reconnu officiellement, quelques marins de commerce, eux, ont utilisé avec satisfaction la Tablette. C'est l'une des rares tables qui ait laissé des souvenirs à des officiers navigants après la Seconde Guerre mondiale. Elle figure également en bonne place dans le comparatif qui avait été fait dans un article de la revue de l'Institut français de Navigation en juillet 1953. Enfin, la reconnaissance de la Marine nationale fut, elle, complète mais l'usage de la Tablette s'éteindra assez vite, semble-t-il, à bord des navires de guerre après la Seconde Guerre mondiale.

Pour conclure sur cette polémique, il convient tout d'abord de retenir la différence de fond entre le document de cours (donc la table de logarithmes du type Friocourt) qui autorise tous les exercices et entraînements et permet d'atteindre un niveau de précision du calcul élevé et le document de passerelle qui doit privilégier simplicité et sûreté mais avec un niveau de précision qui peut être moindre. La Tablette Bertin est, à notre connaissance, le document de passerelle français de sa génération le plus performant au niveau précision (identique au calcul par logarithmes à 5 décimales) ; sa commodité et sa sûreté d'emploi sont d'un niveau au moins équivalent à celui des autres publications françaises de l'époque ; c'est de plus un document complet. Enfin, du fait d'un intervalle d'argumentation de 20', le point auxiliaire Bertin représente un compromis tout à fait acceptable puisque jamais très éloigné du point estimé (dans de nombreux cas, il est à l'intérieur du cercle d'incertitude de l'estime). S'il paraît compréhensible, pédagogiquement parlant, que la table de logarithmes ait été maintenue comme document de formation pour les études de théorie, il est en revanche dommage que l'emploi de la Tablette Bertin n'ait pas été plus encouragé au stade terminal des formations d'officiers de la marine marchande, c'est-à-dire dans les cours dits « d'application », comme l'a fait la Marine nationale.

La Tablette Bertin de 1939 :

C'est la dernière publication de Charles Bertin ; il est alors probablement à la retraite à la Garde du Var, près de Toulon. La Tablette Bertin « pour faire le point » publiée en 1939 est offerte « *à mes jeunes camarades de la Marine et de l'Air* » et est dédiée spécialement « *à mon grand ami le Vice-Amiral Robert et à mes chers imprimeurs MM. Oberthur de Rennes* (…) ». Charles Bertin signe ensuite l'Avertissement en qualité de « *doyen, dans la Marine, des pilotes d'avion ou d'hydravion* ».

Cette Tablette 1939 change radicalement par rapport aux Tablettes 1919 et 1929 qui se ressemblaient beaucoup, dans la présentation, la mise en table et le format. La Tablette 1939 comporte 90 pages d'introduction et d'instructions d'emploi, 454 pages de table des triangles rectangles puis 100 pages de table des « petits triangles » et enfin 86 pages de tables usuelles de navigation. Globalement, c'est devenu un fort volume de 730 pages de format 21 sur 29 cm pesant plus de 2 kg. Par rapport à l'édition 1929, le format s'est un peu agrandi et le nombre de pages comme le poids ont été plus que doublés.

Le nouvel emblème de l'ouvrage est le petit tableau d'interpolation que Bertin a baptisé intercalaire ; la projection de la sphère, le panier à salade, a disparu, de même que les devises, remplacées par le domaine d'emploi : « *à la mer … en l'air … à terre* » (figure 5-3). Le style de l'introduction et des instructions laisse transparaitre l'enthousiasme et la passion, intacts, de Charles Bertin pour son art ; la polémique et les phrases assassines ont, par contre, complètement disparu du texte. On voit également apparaitre un mot nouveau, qui ne passera pas à la postérité, l'« Avigation », qui désigne la navigation aérienne[12]. De même, le mobile (navire ou avion) dont il s'agit de fixer le lieu de position ou le point est désigné par Charles Bertin sous le nom de « nef » (Bertin parlait d'un « ambulant » dans l'édition de 1929). Il tentera également, sans plus de succès, d'introduire le mot américain « fix » pour désigner le point observé. Dans la continuité de la Tablette de 1929, une large place est faite au traitement des observations radiogoniométriques à moyenne et longue distances. Enfin, on note, en conclusion des pages d'instructions d'emploi, que la Marine nationale a participé « *aux lourds frais de cette édition* », probablement par le biais du prépaiement des exemplaires dont sera dotée l'École navale.

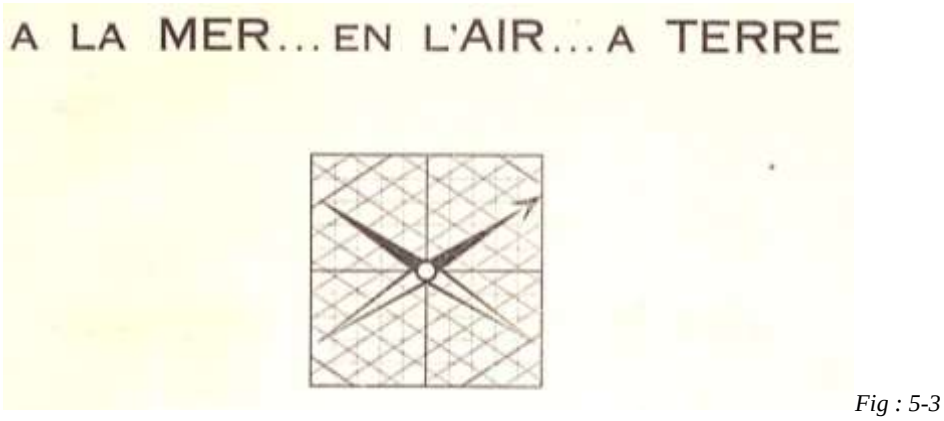


Fig : 5-3

L'Avertissement de la Tablette 1939 indique les innovations que comporte l'ouvrage :

> « *Le présent ouvrage n'est que la réédition, améliorée, de la Tablette Bertin, réglementaire à l'École navale.*
>
> *D'abord, et constituant la modification primordiale, le troisième et dernier élément de chaque groupe bénéficie de la précision réservée auparavant aux deux premiers ; puis les chiffres sont agrandis de moitié ; ensuite les arguments sont partout doublés de leur propre complément ; enfin, il est fourni en toutes marges un système d'interpolation.*
>
> *D'où résultent : d'abord des résolutions complètes, puis une grande commodité de lecture, ensuite la faculté de pouvoir résoudre le même triangle en dix endroits différents de l'ouvrage si on le désire, enfin la possibilité d'opérer toute résolution entre lignes et colonnes de l'ouvrage en ayant recours aux intercalaires.*

[12] Le terme « avigation » a également été utilisé par J. Carlos Pinto dans le titre de ses tables en 1933.

Il a été, de plus, ajouté au précédent ouvrage une table des petits triangles destinée à rendre éminemment simple et rapide la nouvelle droite-radio de l'auteur. »

La tendance à la généralisation est confirmée et, comme dans la Tablette 1929, les symboles des arguments d'entrée ne sont pas attachés à la résolution d'un problème particulier ; les deux arguments d'entrée sont exprimés de 20' en 20', de 0° à 90° pour la cohypoténuse et sur un intervalle de 90° pour l'angle, avec plusieurs échelles couvrant la circonférence entière en valeurs directes et complémentaires ; d'autre part, les trois éléments calculés le sont avec le même niveau de précision. Ces perfectionnements permettent de résoudre un triangle sphérique rectangle de multiples façons comme détaillé en annexe.

Les interpolations peuvent naturellement s'exécuter en utilisant la technique des parties proportionnelles ou, pour l'élément central, un utilisant le carton d'interpolation annexé à la Tablette 1939, identique à celui figurant dans les Tablettes précédentes. Cependant, Charles Bertin a imaginé une méthode d'interpolation graphique, basée sur l'« intercalaire », et qui permet d'interpoler simultanément les deux premiers éléments et peut s'étendre au troisième élément ; le principe en est décrit en annexe. La Tablette Bertin est ainsi devenue un outil de calcul général et complet permettant de traiter tout problème fondé sur la résolution d'un triangle sphérique.

Par rapport aux éditions précédentes de la Tablette, on remarque cependant une évolution notable des positions de Charles Bertin sur le calcul des éléments d'une droite de hauteur. On relève qu'il place en premier, dans l'ordre des présentations, le procédé de calcul qu'il avait baptisé Leblanc ; grâce aux intercalaires d'interpolation, il en préconise l'utilisation à partir du point estimé. Il met en garde contre l'usage du point auxiliaire et la correction de la hauteur résultant du résidu[13] de déclinaison « *exigeant vraiment beaucoup de réflexion* » écrit-il. Dans ces conditions, la procédure de calcul des éléments d'une droite de hauteur à partir du point estimé par le procédé Leblanc se déroule comme suit (voir l'exemple traité en annexe) :

- une 1re ouverture de table en fonction de la déclinaison de l'astre et de son angle horaire local estimé,
- une interpolation suivant les résidus de déclinaison et d'angle horaire, à l'aide de l'intercalaire,
- une 2e ouverture de table en fonction des résultats trouvés à l'étape précédente, qui donne l'amplitude en 1er élément (qu'il n'est pas nécessaire d'interpoler) et la hauteur en 2e élément,
- une interpolation finale, avec l'intercalaire, pour corriger la hauteur estimée trouvée selon les résidus de 2e entrée,
- conversion, pour terminer, de l'amplitude trouvée en l'azimut correspondant.

On remarquera qu'il devient inutile de déterminer l'angle à l'astre.

En second point, Charles Bertin présente le procédé qu'il avait appelé Souillagouët, à partir de l'utilisation d'un point auxiliaire. Par rapport aux procédures présentées en 1919 et 1929, le seul changement notable est celui de l'interpolation finale sur la hauteur qui peut se faire avec l'intercalaire ou le carton d'interpolation. La procédure de calcul des éléments d'une droite de hauteur à partir du point auxiliaire par le procédé Souillagouët se déroule ainsi (voir l'exemple traité en annexe) :

- une 1re ouverture de table en fonction de la latitude auxiliaire et de l'angle horaire local auxiliaire de l'astre,
- une 2e ouverture de table en fonction des résultats trouvés à l'étape précédente,
- une interpolation finale, avec l'intercalaire ou le carton, pour corriger la hauteur auxiliaire trouvée selon les résidus de la 2e entrée.
- détermination de l'azimut à l'aide des angles trouvés en 1re et 2e ouverture de table..

En définitive, Charles Bertin présente le procédé Leblanc associé au point estimé et le procédé Souillagouët associé au point auxiliaire comme étant les plus rapides et les plus naturels. Après explications et présentation de nombreux exemples choisis dans tous les cas de figure, il résume les procédures d'exécution des deux méthodes sur une fiche aide-mémoire. Il laisse cependant toute liberté au calculateur d'utiliser l'une ou l'autre tout en sachant qu'au prix de quelques corrections ou interpolations supplémentaires, on peut aussi utiliser un point auxiliaire avec le procédé

[13] Il s'agit de la différence entre valeurs tabulée et réelle.

Leblanc ou le point estimé avec le procédé Souillagouët. Les procédés de calcul Delafon et Aquino sont indiqués brièvement, « *à titre de curiosité* ». De même, la circumméridienne est mentionnée mais définitivement considérée comme « *un archaïsme sans raison* ». Enfin, Charles Bertin évoque rapidement le problème du réglage du chronomètre et indique une méthode de calcul expéditive.

Dans la Tablette 1939 figure une « table des petits triangles rectangles sphériques ». Cette table, calculée par Charles Bertin, donne, en fonction de l'un des angles non droits du triangle et de l'hypoténuse (a), les deux côtés de ce triangle. C'est une table dont l'argument horizontal est l'angle, exprimé de 0° à 360° avec un intervalle de 1°, et l'argument vertical est l'hypoténuse, exprimée de 0° à 10° avec un intervalle de 1'. Cette table peut naturellement être utilisée comme table de point estimé mais son principal intérêt réside dans la détermination de la droite radio à courte et moyenne distance sans qu'il soit nécessaire d'utiliser une carte sur laquelle figure simultanément la station émettrice et le point estimé du navire ou de l'avion.

Commentaires :

Nous arrivons au terme de l'étude des tables de navigation conçues par Charles Bertin. Concernant la Tablette 1939, on a constaté que l'outil est complet, polyvalent, et puissant ; il témoigne, s'il en était encore besoin, du savoir-faire et de la maîtrise des méthodes de calcul numérique que possédait son auteur. L'ouvrage est une parfaite illustration de l'éternel dilemme entre précision d'un calcul fait « à la main » et rapidité de son exécution ; le dispositif mis au point pour effectuer les interpolations, et ainsi rendre l'outil apte à résoudre, avec une égale précision, un triangle sphérique dans n'importe quelle configuration, exige une pratique régulière, une attention soutenue et un coup d'œil certain.

Avec la Tablette 1939, Charles Bertin préconise un procédé de calcul des éléments de la droite de hauteur à partir du point estimé ; le point auxiliaire n'est pas abandonné pour autant, mais, avec les intercalaires d'interpolation, le calculateur a désormais le choix entre deux méthodes. Cette possibilité, nouvelle, est probablement une réponse aux vives critiques dont Bertin avait été l'objet mais il n'en demeure pas moins que l'usage du point auxiliaire conduit à une solution nettement plus rapide et, surtout, plus sûre.

La Tablette 1939 a-t-elle réellement répondu aux attentes des intéressés ? On ne le saura jamais avec précision car les hostilités déclenchées l'année de sa publication ont occulté sa bonne publicité et la diffusion de retours d'expérience ; le décès de son auteur, et promoteur passionné, en 1943, a précipité l'œuvre dans un certain oubli. Les exemplaires toujours en usage à la fin de la guerre se sont trouvés en concurrence directe avec les tables américaines ou anglaises plus attractives et plus simples d'emploi. Son auteur n'étant plus là pour défendre son œuvre, la Tablette 1939 ne fut jamais rééditée. On relève cependant, dans la revue de l'Institut français de Navigation d'avril 1955, sous la plume du capitaine de corvette Calvet, une proposition de réédition simplifiée de la Tablette Bertin de 1939. Cette proposition ne fut pas suivie d'effet.

À notre sens, les éditions 1919 et 1929 de la Tablette Bertin furent des réussites. Celles-ci constituent un document complet, de format raisonnable, permettant de résoudre tous les problèmes courants de navigation avec un excellent niveau de précision. De même, les éditions 1919 et 1928 du Carnet font jeu au moins égal avec les traditionnelles tables d'azimut de Bataille et de Perrin. Avec ces ouvrages, Charles Bertin a atteint l'objectif qu'il s'était fixé, l'opération de calcul étant rendue simple, sûre, précise et rapide. Il est donc très dommage que ces documents n'aient pas eu la notoriété qu'ils méritaient dans les écoles en charge de la formation des futurs officiers de la marine marchande. Nous serons plus réservés sur l'édition de 1939 à propos de laquelle on est tenté de citer le dicton « le mieux est l'ennemi du bien ». En effet, les divers perfectionnements apportés compliquent la lecture de la table et conduisent à des relevés délicats qui requièrent une bonne pratique, notamment s'agissant de l'usage des intercalaires d'interpolation. De prime abord, cette édition est peu accessible au néophyte et seuls les calculateurs déjà chevronnés seront en mesure d'en tirer toutes les possibilités. Enfin, cette édition atteint un poids et un format qui rendent le document moins commode à manipuler que les éditions précédentes.

Signalons enfin que Charles Bertin avait encore un projet de publication, celui du « Monument Bertin », dont l'intervalle d'argumentation est de 10' et dont le titre devait être, en 1942, « Grande Table Bertin ». Des contacts

avaient été pris avec la Marine nationale fixant le format, identique à celui de la Tablette 1939, et la disposition : le document aurait compté 810 pages avec probablement disparition des intercalaires d'interpolation ; le titre projeté avait évolué en « Manuel Bertin ». Charles Bertin est décédé en septembre 1943, emportant avec lui son projet dans la tombe, en cette période difficile où la Marine avait des soucis d'une bien autre nature que la conception d'une table de navigation.

Annexe 5-1 : La méthode Bertin, cas général.
Annexe 5-2 : Les procédés Souillagouët et Leblanc, le carton d'interpolation.
Annexe 5-3 : Tablette Bertin 1939. Résolution multiple de triangles sphériques rectangles.
Annexe 5-4 : Intercalaire d'interpolation, exemples de calculs.

Chapitre 6

TABLES D'AZIMUT

Introduction :

Pour construire une droite de hauteur à partir d'un point déterminatif, il est nécessaire de calculer l'azimut de l'astre à l'instant de l'observation ; de même, lorsque l'on cherche à déterminer la variation du compas, il convient de comparer l'azimut mesuré, ou le relèvement compas Z_c, de l'astre à son azimut calculé, que l'on assimilera à l'azimut vrai, ou relèvement vrai Z_v pour cet instant. Le calcul de l'azimut d'un astre est donc une opération incontournable dans le processus de détermination astronomique du point comme dans le contrôle de la variation du compas, quel qu'il soit, magnétique ou gyroscopique. Selon les données dont on dispose, le calcul peut s'exécuter avec différentes formules (voir l'annexe 1-1). Dans le présent chapitre, on traitera principalement du calcul de l'azimut « par l'heure » dans lequel les éléments connus sont les coordonnées du point estimé, dont la longitude donne accès à l'angle au pôle, ou temps de l'astre, et la déclinaison de l'astre.

Un relèvement est, au mieux, évalué au demi-degré près ; il en est de même pour le report d'une direction sur une carte ou sur un graphique ; le calcul d'azimut sera donc conduit à hauteur d'une précision du même ordre quelle que soit la formulation utilisée. Ce faible niveau de précision permet de travailler avec des données arrondies en remarquant que l'effet des approximations, notamment concernant la latitude et l'angle au pôle, sera d'autant plus faible si l'on procède lors des « circonstances favorables » au calcul d'azimut par l'heure, c'est-à-dire lorsque l'astre a une grande déclinaison et est observé à une faible hauteur. On remarquera que la deuxième condition est obligatoire pour effectuer précisément la mesure du relèvement au compas muni d'une alidade classique.

Au cours de la seconde moitié du XIXe siècle, deux principaux types de tables ont été mis au point, à peu près simultanément, en France et en Grande-Bretagne. Ces tables sont soit à tableau unique et à triple argument, angle au pôle P, latitude φ et déclinaison D, soit à deux ou trois tableaux à double argument. Les premières sont volumineuses et sont dédiées presque exclusivement au calcul d'azimut ; elles donnent directement le résultat par simple lecture qu'il faudra éventuellement interpoler à vue. Les secondes ne comportent que quelques feuillets mais conduisent à effectuer des opérations algébriques intermédiaires ; elles permettent également de faire d'autres calculs de navigation comme ceux relatifs à l'identification d'un astre, à la recherche de circonstances favorables, au coefficient Pagel, aux lever et coucher d'un astre ou à l'orthodromie.

D'autres tables permettant de résoudre rapidement le problème de l'azimut ont été mises au point ; rappelons les tables simplifiées de Charles Bertin : Carnet Azimutal, Carnet et Mignonnette Bertin vues au chapitre 5. Il y en eut encore quelques autres, dont la diffusion fut plus confidentielle, que l'on examinera à la fin de ce chapitre ; on y évoquera également le calcul de l'azimut par l'heure et la hauteur utilisé par certains auteurs.

Tables d'azimut à triple argument :

Ces tables sont toutes construites selon le même modèle général : chaque page est relative à une valeur entière, en degrés, de la latitude φ et, sur chacune des pages, un tableau à double argument, angle au pôle P (ou angle horaire local) et déclinaison D, donne les différentes valeurs calculées de l'angle au zénith A_z dont on déduira l'azimut. Les différentes tables consultées possèdent chacune leurs propres particularités mais s'écartent peu du modèle général indiqué ci-dessus.

Tables de Burdwood et Davis :

John Burdwood, Staff Commander de la Royal Navy, est le premier à avoir conçu une table d'azimut à triple argument sous une forme facilement exploitable ; ses « Sun's True Bearing or Azimuth Tables » furent publiées pour la première fois en 1852 puis complétées et rééditées en 1858, 1862, 1864 et 1866. Ces tables furent augmentées à nouveau en 1875 par le Captain John E. Davis de la Royal Navy puis par son fils Percy L. H. Davis, Chief Assistant au British Nautical Almanac Office. Sous leur forme définitive, au milieu du XXe siècle, ces tables couvrent toutes les valeurs entières de latitude comme de déclinaison comprises entre 64° N et S. Elles furent d'usage courant à bord des navires britanniques pendant plus d'un siècle. Dans ces tables, l'angle au pôle est argumenté toutes les 4 minutes (donc tous les degrés) et l'azimut est exprimé au dixième de degré près ; il s'interpole à vue. Les tables de Burdwood et Davis donnent en outre des éléments permettant d'évaluer approximativement la déclinaison du Soleil et l'équation du temps sur une durée de 16 ans ; ces données permettent de se passer d'éphémérides pour effectuer le calcul d'angle horaire. On y trouve également l'ascension droite et la déclinaison d'une sélection d'étoiles. Les tables de Burdwood et Davis firent l'objet d'une extension intéressante par P. L. H. Davis en 1918 en associant au calcul d'azimut celui de la hauteur ; elles portèrent alors le titre d' « Alt-Azimuth Tables » (voir chapitre 11) et leur champ d'application s'est étendu à l'identification d'étoiles et au préréglage du sextant au moment des observations crépusculaires.

Tables américaines HO 71 et 120 :

Sur le même principe que les tables de Burdwood et Davis, les officiers de l'US Navy S. S. Schroeder et W. H. H. Southerland publièrent en 1882 la table intitulée « Azimuths of the Sun », dont les arguments sont limités en déclinaison et latitude respectivement à 23° et 70° N ou S. Un complément fut publié en 1902 par le US Navy Hydrographic Office sous le titre de « Azimuths of Celestial Bodies » étendant l'argumentation en déclinaison jusqu'à 70°. Les deux volumes furent ensuite publiés sous les références HO 71 (Red Azimuth Table) et HO 120 (Blue Azimuth Table) ; ces références ont été modifiées ultérieurement pour devenir respectivement HO 260 et HO 261.

Tables de Labrosse et de Decante :

Ferdinand Labrosse (1841-1912) était officier de marine. Son passage dans la Marine fut bref puisque, entré en 1858 à l'École navale, il la quitte en 1866. La première édition de ses « Tables des Azimuts du Soleil » est publiée à Londres en 1868. Celles-ci furent ensuite étendues et rééditées, en France, de nombreuses fois : la 15e édition (et, probablement, dernière) paraît en 1920 chez Augustin Challamel. Dans cette 15e édition, la latitude est limitée à 61°, N ou S, et la déclinaison à 30°, N ou S ; le document couvre donc l'ensemble des zones usuelles de navigation et permet les calculs relatifs à tous les astres du système solaire ainsi qu'aux étoiles zodiacales ; un supplément permet de calculer les azimuts d'étoiles de déclinaison supérieure à 30°. Une édition spéciale est publiée à l'attention des capitaines de pêche amenés à conduire leurs navires des côtes de France vers Terre-Neuve et l'Islande. À l'instar des tables de Burdwood et Davis, F. Labrosse donne des éléments pour le calcul approché de l'angle horaire et de la déclinaison du Soleil. La disposition des tableaux, à chaque page fixée par la latitude, est par contre différente : les premiers placent l'azimut calculé à l'intersection de la colonne argumentée en déclinaison et de la ligne correspondant à l'angle horaire, Labrosse, lui, place l'angle horaire à l'intersection d'une ligne correspondant à la distance polaire (complément de la déclinaison) et d'une colonne correspondant à l'azimut ; ce dernier est par ailleurs argumenté tous les 2° ce qui impose l'interpolation. Cette dernière opération est facilitée par une table de parties proportionnelles.

On mentionnera simplement les tables à triple argument d'Édouard Decante (1829-1911), également officier de marine, qui publia en 1882 les « Tables du cadran solaire azimutal », ouvrage en 8 volumes, permettant de trouver l'azimut d'un astre de déclinaison inférieure à 48° N ou S pour tous lieux de latitude inférieure à 66° N ou S.

Table 902 :

La table d'azimut 902 a été publiée avec le concours du Service Hydrographique de la Marine en deux volumes en 1953 et 1956. Le premier est relatif aux astres du système solaire et aux étoiles zodiacales ; le second volume est dédié aux étoiles de déclinaison supérieure à 30°.

On reproduit ci-dessous des extraits de la présentation de ces deux volumes, parue, sous signature anonyme, dans la revue de l'Institut français de Navigation au moment de leur première publication :

> *Octobre 1953, Table d'azimuts n° 902 (1re partie).*
>
> *Cet ouvrage, composé par les soins du Service Hydrographique de la Marine à l'usage des bâtiments de guerre, est destiné à remplacer, en France, les anciennes tables de Labrosse et de Decante, si longtemps appréciées des marins, et à prendre place à côté des ouvrages modernes anglo-saxons tels que les HO 71, HO 120 et les tables de Davis et Burdwood.*
>
> *Ce sont des tableaux à triple argument qui, pour les latitudes de 0 à 70°, fournissent directement toutes les dix minutes d'angle horaire local, l'azimut des astres de déclinaison inférieure à 30°, à l'approximation du dixième de degré, c'est-à-dire qu'ils évitent tous les feuilletages imposés par les carnets genre Perrin, Bertin ou Bataille, à entrées successives. Une deuxième partie, en préparation, traitera des astres de déclinaison supérieure.*
>
> *Les tableaux de la table 902 procurent également sur chaque page, les éléments heures et azimuts pour les moments des levers et couchers des astres avec, à toutes fins utiles, par une table auxiliaire, les corrections à faire subir à ces éléments pour une élévation de cinquante minutes dans la hauteur.*
>
> *Parmi les quelques tables auxiliaires disposées à la fin de l'ouvrage, l'une d'elles permettra, dans le cas du Soleil, d'éviter la consultation des Éphémérides nautiques en fournissant perpétuellement, pour la date, à l'approximation suffisante au calcul d'azimut, les éléments E_c et D qui permettent d'entrer dans la table principale (…).*
>
> *Avril 1956, Table d'azimuts n° 902 (2e partie).*
>
> *La deuxième partie de la table d'azimuts 902 fournit les azimuts des 44 étoiles de déclinaison supérieure à 30° figurant dans les Éphémérides nautiques. Seule, la table d'azimuts figure dans ce volume. Les tables auxiliaires utiles à la navigation sont à rechercher dans la première partie parue l'an dernier.*
>
> *Cette deuxième partie a été établie pour l'exploitation, à partir d'un almanach moderne fournissant les angles horaires à Greenwich et les déclinaisons des astres errants, d'une part, et les ascensions verses et les déclinaisons des étoiles, d'autre part. Désormais, tant dans les documents étrangers que dans les Éphémérides nautiques françaises, les arguments d'entrée sont à rechercher sous cette forme.*
>
> *Ce volume se compose de deux cent vingt tableaux à trois entrées, pour les latitudes comprises entre 70° N et 70° S. À la différence de la première partie, les entrées principales figurant en tête de tableaux désignent nommément l'astre, en l'espèce une étoile de déclinaison supérieure à 30°, dont les azimuts apparaissent dans des colonnes verticales relatives à chaque degré de latitude.*
>
> *Les étoiles tabulées sont au nombre de 44, soit 20 de déclinaison N et 24 de déclinaison S, classées dans l'ouvrage en partant du pôle N vers le pôle S. Ces étoiles sont celles qui figurent dans les nouvelles Éphémérides nautiques.*
>
> *Ces tableaux permettent de déterminer l'azimut d'une étoile à un instant quelconque, et de déterminer l'angle horaire local et l'azimut d'une étoile à l'instant du lever et du coucher vrais.*
>
> *Les éléments fournis : angle horaire et azimut, ont été calculés à partir des coordonnées équatoriales des étoiles, prises pour l'année 1955 à la moyenne de leurs valeurs au premier jour de chaque mois. Ces moyennes ont été calculées au dixième de minute.*
>
> *Les éléments fournis : heures et azimuts, figurent dans la table, à l'approximation de la minute de temps et du dixième de degré.*

De notre analyse des deux volumes de la table 902, il ressort quelques remarques de détail. On peut tout d'abord regretter que les angles horaires n'aient pas été exprimés en degrés, ceci étant d'autant plus regrettable que ces angles seront tous exprimés dans cette unité dans la nouvelle présentation des Éphémérides nautiques, en gestation à la même époque. Dans le second volume, les étoiles ont été classées selon l'ordre des déclinaisons, de l'étoile la plus au Nord, à celle la plus au Sud ; cet ordre est différent de celui des ascensions droites utilisé dans les

Éphémérides ; sans contester ce choix, un index alphabétique, sur un carton mobile par exemple, aurait été utile pour éviter le feuilletage. Enfin, on retrouve les mêmes difficultés pratiques d'interpolation qu'avec les tables de Labrosse ou de Burdwood et Davis ; tant que l'on se place dans les circonstances favorables au calcul de l'azimut par l'heure, le plus expéditif consiste à ne faire qu'une interpolation pour l'angle horaire et à n'utiliser que les valeurs rondes les plus voisines de la déclinaison et de la latitude. Si l'on souhaite être plus précis, il faut s'astreindre à effectuer les interpolations comme indiqué dans l'instruction d'emploi. On ajoutera pour terminer que ces instructions constituent un modèle de clarté et de rigueur scientifique.

Claires et agréables à consulter, les deux volumes de la table 902 n'ont pas eu le rayonnement attendu, essentiellement limité à la Marine nationale ; ils ne furent jamais d'usage courant à bord des navires de commerce. La table 902 constitue une version complètement aboutie de ce genre de document et fait l'objet d'un développement complémentaire en annexe 6-1.

Tables d'azimut à double argument :

D'une manière générale, ces tables permettent de résoudre la (ou les) formule(s) de trigonométrie sphérique donnant l'azimut en fonction des autres éléments connus du triangle de position, à savoir la latitude, la déclinaison et l'angle au pôle. Les trois premières tables qui seront étudiées résolvent en plusieurs étapes la formule des quatre éléments consécutifs dite encore formule des cotangentes (voir annexe 1-1) ; les deux dernières utilisent la décomposition du triangle de position en deux triangles rectangles. Les formulations utilisées ainsi que les modes opératoires sont présentés en annexe 6-2.

Tables ABC :

L'histoire des tables anglaises ABC est assez confuse et nous allons tenter de la résumer[14]. À l'origine de ces tables nous citerons, en premier lieu, le professeur d'hydrographie J.-A. Mazure-Duhamel qui publia en 1822, dans son « Mémoire sur l'Astronomie Nautique », un tableau donnant la variation d'angle au pôle ΔP d'un astre consécutive à une variation de latitude de 1' en fonction de la latitude et de l'azimut de l'astre ; ce tableau fut reproduit dans un article anonyme « On the Probable Errors in Determining Time » paru dans le Nautical Magazine en 1832. L. G. Heath intervient ensuite en 1845 ; il établit une relation, qu'il obtient par différentiation de la formule fondamentale, donnant cette même variation ΔP en fonction de la latitude, la déclinaison de l'astre et son angle au pôle. La variation ΔP est alors obtenue par une somme algébrique de deux termes que l'on détermine dans deux tableaux : le tableau A, en fonction de la latitude et l'angle au pôle, et le tableau B en fonction de la déclinaison et de ce même angle au pôle. Ces tableaux, calculés par Heath, paraîtront en 1846, dans un article du Nautical Magazine, intitulé « The Ship's Position by the Sun's Altitude. – Sumner's Method » ; les deux tableaux sont brefs et couvrent ensemble à peine une page. L'article fera l'objet d'un nouveau tirage, sans modifications, en 1860. Les tableaux figureront dans un article du Captain J. F. Trivett, toujours dans le Nautical Magazine, en 1873. En 1874, le tableau B est élargi aux déclinaisons supérieures à 22° par W. H. Bolt et fait l'objet d'un nouvel article dans le Nautical Magazine. À la fin des années 1870, les tableaux A et B sont utilisés en pratique à bord des navires de la compagnie Peninsular and Oriental (P&O) pour calculer l'azimut d'un astre : la variation d'angle au pôle obtenue est transformée en chemin EW, ou différence de longitude exprimée en milles marins, en faisant intervenir la latitude ; l'angle au zénith, d'où l'on déduira l'azimut, est déterminé à l'aide d'une table de point (traverse table). Toujours en 1878, les tableaux A et B de Heath sont recalculés, et à nouveau élargis, par R. W. Espinasse ; ils font l'objet d'une publication sous le titre « Admiral Heath Tables – reprinted and enlarged by R. W. Espinasse ». En 1883, c'est H. S. Blackburne, capitaine au long cours, et officier de la compagnie P&O, qui, dans l'ignorance des travaux d'Espinasse, publie « A and B Tables for Correcting the Longitude ans Facilitating Sumner's Method on the Chart ». Enfin, toujours en 1883 et peu de temps après la publication des tables de Blackburne, W. H. Rosser, directeur de la Norie's Nautical Academy, fait paraître un ouvrage réunissant les tables A et B et une troisième table, baptisée table C, construite sur le modèle de celle de Mazure-Duhamel, qui permettra d'extraire facilement l'azimut. Les tables ABC étaient donc nées ; elles firent très rapidement l'objet de nouvelles extensions notamment

[14] Se reporter également au chapitre 2, à propos de la rectification de la longitude, et à l'annexe 2-2 relative aux formules de Mazure-Duhamel et de Heath.

par A. C. Johnson et S. T. S. Lecky. Ce dernier personnage, haut en couleur, est incontournable dans la littérature technique maritime de la fin du XIXe siècle. Squire Thornton Stratford Lecky (1838-1902), capitaine au long cours et « Extra Master », est l'auteur des « Wrinkles in Practical Navigation » dont la première publication a lieu en 1881 ; celle-ci sera suivie de plus d'une trentaine de rééditions, jusque dans les années 1950. Les tables ABC y seront incluses à partir de la 9e édition en 1894. Lecky intégrera également les tables ABC dans ses « General Utility Tables » dont la première édition fut publiée en 1897. Les tables ABC furent d'un usage très courant chez les Britanniques et figurent dans plusieurs tables de navigation d'usage général comme les « Norie's Nautical Tables » ou les « Burton's Nautical Tables ». Elles sont également présentes dans les tables allemandes « Nautische Tafeln » de O. Fulst et dans celles de G. Rose ainsi que dans les « Tavole Nautiche » de la Marine italienne.

Quels que soient les éditions et les auteurs, la partie de table A représentative d'un certain intervalle de l'angle au pôle fait vis-à-vis avec la table B représentative de ce même intervalle. Ainsi, pour un angle au pôle donné, on relève les quantités notées A et B sur une même ouverture du livre ; celles-ci sont en général exprimées avec deux décimales. La disposition de la table C est par contre variable d'un éditeur à l'autre : la latitude figure toujours en argument vertical, l'argument horizontal étant soit l'azimut, soit la somme algébrique A + B. De même, l'argumentation des trois paramètres, angle au pôle, latitude et déclinaison est variable d'un auteur à l'autre : en général, l'intervalle d'argumentation de la latitude et de la déclinaison est de 1°, jusqu'à 65° ou 68°, avec parfois des tableaux complémentaires permettant de couvrir le quadrant entier ; l'intervalle d'argumentation de l'angle au pôle varie de 1 minute (0,25°) à 4 minutes (1°) suivant les auteurs. Les tables ABC calculées et présentées par S. T. S. Lecky et, indépendamment, par H. S. Blackburne donnent les quantités A et B avec 3 décimales ; de plus, chacun a conçu une table B spéciale pour une sélection d'étoiles, l'argument déclinaison étant remplacé par un nom d'étoile.

Table de Perrin :

Édouard Perrin (1852-1926) entre à l'École navale en 1869 et se distingue rapidement par ses qualités d'observateur et de calculateur ainsi que par ses connaissances en astronomie. Ses compétences le feront naturellement désigner pour conduire la mission chargée de l'observation du passage de Vénus sur le Soleil à l'observatoire de La Plata en 1882. Il participe à de nombreux travaux à l'observatoire de la Marine à Montsouris et est l'auteur de plusieurs études qui paraîtront dans les publications spécialisées (Annales du Bureau de Longitudes, Revue Maritime et Coloniale) ; il commandera notamment le *Borda* et l'École navale de 1905 à 1907. É. Perrin quittera le service actif en 1916 avec le grade de vice-amiral. En 1876, il publie les « Nouvelles tables destinées à abréger les calculs nautiques » chez Arthus-Bertrand dont la vocation première est le calcul de l'azimut. L'opuscule est rapidement reconnu en France et rentre dans l'usage courant, à bord des navires de guerre comme de commerce et dans l'enseignement maritime, militaire comme civil ; il est réédité, chez A. Challamel, de nombreuses fois, notamment en 1916 (5e édition) après refonte complète du recueil ; la réimpression de ces tables se poursuivra jusqu'au milieu des années 1960.

À quelques détails de présentation près, les tables de calcul de l'azimut conçues par É. Perrin sont identiques aux tables anglaises ABC. La différence essentielle entre les deux se situe dans la méthode avec laquelle le problème a été abordé. En Grande-Bretagne, on a suivi la voie de la variation de l'angle au pôle, en France, Perrin est parti de la formule des quatre éléments consécutifs (ou formule des cotangentes) qu'il a décomposée en trois termes. Ces trois termes, identiques à ceux utilisés dans la conception des tables ABC, conduisent aux trois tables mises au point par Perrin et repérées I, II et III.

Les tables de Perrin ont été conçues initialement pour le calcul de l'azimut d'un astre par l'heure ; cependant, à partir de l'édition de 1916, l'auteur développe à la suite des tables I, II et III un véritable précis de navigation astronomique et, après un rappel de définitions et de conventions, pose quatorze problèmes usuels qui peuvent être traités avec ses tables :

1) connaissant la latitude du navire, la déclinaison d'un astre et son angle horaire, calculer l'azimut de cet astre ;

2) connaissant la position estimée du navire et l'heure du bord, déterminer la variation du compas par le relèvement d'un astre ;
3) connaissant la latitude estimée du navire, la déclinaison d'un astre et son angle horaire, déterminer la variation produite sur la longitude calculée par une variation de 1' dans la latitude et tracer la droite correspondante[15] ;
4) connaissant la position estimée du navire, la hauteur d'un astre et son azimut à une heure donnée, trouver le nom de cet astre ;
5) connaissant la position estimée du navire, calculer la hauteur d'un astre pour une heure donnée ;
6) calculer l'heure du lever ou du coucher d'un astre ;
7) connaissant la latitude de l'observateur, la déclinaison d'un astre et son angle horaire, calculer l'angle parallactique du triangle de position ;
8) calculer l'influence sur l'heure d'erreurs respectivement commises sur la hauteur, la latitude et la déclinaison ;
9) calculer l'équation des hauteurs correspondantes du Soleil ;
10) connaissant le point de départ d'un navire, calculer l'angle de route initial à suivre pour se rendre par arc de grand cercle à un point déterminé du globe ;
11) connaissant les positions de deux points du globe, calculer leur distance orthodromique ;
12) déterminer la plus haute latitude qu'atteindra le navire en suivant l'arc de grand cercle ;
13) déterminer l'angle de route à suivre quand on ne veut pas dépasser un parallèle de latitude donnée ;
14) déterminer les positions d'un certain nombre de points de l'arc de grand cercle qui joint deux lieux donnés.

Chacun des problèmes fait l'objet d'une présentation et de l'explication du mode opératoire suivies d'applications numériques. Si nécessaire, l'ensemble est complété par des notes de bas de page particulièrement instructives. É. Perrin procède ensuite à l'exposé de la méthode de détermination du point par les hauteurs circumzénithales correspondantes qu'il a formalisée et fournit les tables particulières nécessaires au calcul. L'ouvrage, qui comporte au total 95 pages, se termine par une table donnant les éléments nécessaires au tracé par points de la courbe de hauteur au voisinage du point déterminatif (rectification de la droite de hauteur).

Table de Bataille :

Louis Bataille est capitaine au long cours (Brevet Supérieur) et commandant à la Compagnie des Chargeurs Réunis. Outre ses « Nouvelles Tables Nautiques », il est aussi l'auteur d'un ouvrage technique, « Problèmes de stabilité, de déplacement et d'assiette du navire » ; complété et mis à jour, après la seconde guerre mondiale, par M. Reignard, également capitaine au long cours, il apporte les compléments pratiques indispensables au cours de « Théorie du Navire ».

L. Bataille publia la première édition de ses tables en 1911 ; celle-ci est préfacée par l'Inspecteur Général d'Hydrographie, G. Massenet qui donne son agrément en ces termes :

> « *Lorsque M. Bataille (...) nous a demandé de présenter sa nouvelle table d'azimuts au public maritime, nous avons eu un moment d'hésitation facilement compréhensible, étant donné le grand nombre de tables nautiques mises en circulation depuis quelques années. Mais une lecture attentive et un essai pratique prolongé nous ont montré que cette table d'azimuts était aussi commode que bien conçue (...)* »

L'opuscule est constitué d'une trentaine de pages et permet, outre le calcul d'azimut par l'heure, de résoudre de façon approchée les divers problèmes usuels de navigation mentionnés au début de ce chapitre. Ces tables étaient d'usage courant à bord des navires de commerce et leur usage était autorisée aux examens de la marine marchande ; elles firent l'objet de nombreuses rééditions et retirages jusqu'au début des années 1970 et furent intégrées au recueil de tables de navigation[16] publié en 1963 avec la concours du Service Hydrographique de la Marine sous le titre de « Tables 900 ».

Les tables de Bataille sont construites, comme celles de Perrin, sur la base de la formule des quatre éléments consécutifs. L'utilisation d'échelles d'angles complémentaires permet d'effectuer les opérations avec seulement

[15] Coefficient Pagel.
[16] Pour les besoins de la Marine Nationale, elles furent associées aux tables de Dieumegard, dans un même recueil, dès 1943.

deux tables à double argument, au lieu de trois. Les tables de Bataille sont donc plus réduites que celles de Perrin, l'azimut y étant obtenu de façon équivalente, avec un même nombre d'opérations.

Table de Dorgueil :

Cette table, conçue et calculée par S. Dorgueil, capitaine au long cours, a été publiée en 1911, chez Augustin Challamel. En introduction, son auteur en donne la présentation suivante :

> « *L'avantage principal de cette table nautique est de donner simultanément deux éléments d'un triangle sphérique, - un côté et un angle adjacent -, connaissant les deux autres côtés et l'angle compris ; et cela sans calcul, simplement par deux entrées dans la même table. Ainsi, dans les problèmes d'azimut, on obtient simultanément l'azimut et la hauteur ; dans la recherche du nom d'un astre, la table donne en même temps l'angle au pôle et la déclinaison ; et pour la navigation orthodromique, on trouve à la fois l'angle de route et la distance à parcourir (…)* »

L'ouvrage se présente sous la forme d'un opuscule comportant 16 pages d'instructions d'emploi et 30 pages de table de résolution des triangles rectangles. Celle-ci donne l'un des côtés de l'angle droit et le complément de l'autre côté en fonction d'un angle et de la cohypoténuse ; les éléments calculés sont exprimés au dixième de degré. La table permet, de trouver, en deux entrées successives, les valeurs approchées de l'azimut et de la hauteur connaissant l'angle au pôle, la latitude et la déclinaison de l'astre ; l'auteur indique que les résultats sont toujours obtenus à 0,2 ou 0,3° près. La table de Dorgueil est de conception identique à la table III de F. Souillagouët et préfigure le Carnet Azimutal de Charles Bertin qui paraîtra quelques années plus tard.

Les principaux domaines d'emploi de la table nautique de Dorgueil sont ceux des ouvrages de Perrin ou de Bataille. Bien que facile d'emploi, bien présentée, avec une belle typographie, la diffusion de cette table restera limitée.

Table de Pitaud :

Aimé Pitaud, né en 1877, est officier de marine ; il opte pour le professorat d'hydrographie en 1908 et enseigne notamment à Agde et à Marseille. Les tables, qu'il a conçues et calculées, ont été publiées en 1939 par les Éditions de la Bibliothèque de l'Enseignement Polytechnique à Paris. La table principale donne les logarithmes des fonctions tangente et sécante permettant de résoudre, après adaptation des formules de calcul, les problèmes usuels de navigation. Les logarithmes utilisés sont exprimés selon une base particulière (1,7905) conduisant à une précision de calcul acceptable avec seulement trois décimales ; cette disposition constitue la principale originalité de ces tables. Pour les calculs demandant une précision moindre, comme le simple calcul d'azimut par l'heure, A. Pitaud propose une table de logarithmes de la même base, à deux décimales. Avec les instructions d'emploi, les exemples et les quelques tables additionnelles, l'ensemble constitue un opuscule d'une trentaine de pages.

Pour résoudre le problème du calcul des coordonnées horizontales d'un astre, azimut et hauteur, A. Pitaud décompose le triangle de position en deux triangles rectangles selon la hauteur sphérique issue de l'astre et établit les formules donnant ces deux éléments à partir des seuls rapports trigonométriques tangente et sécante. Azimut et hauteur sont ensuite calculés en utilisant les logarithmes figurant dans la table.

Le document se distingue à nouveau des autres car c'est l'un des rares qui autorise les calculs de route et de distance loxodromiques ; on trouve en effet dans les tables nautiques de Pitaud :

- une table des latitudes croissantes Λ, argumentée de 0° à 89°,
- une table des logarithmes à 3 décimales, toujours dans la même base, des nombres sexagésimaux de 0° à 180°,

chacune de ces tables étant construite avec un intervalle de 10' avec des tableaux de parties proportionnelles pour les interpolations.

Ces tables, issues d'un raisonnement original, permettent de traiter l'ensemble des problèmes courants de navigation avec une précision de résultat globalement suffisante en pratique, à l'exception de la hauteur estimée où l'incertitude peut atteindre quelques minutes. Les instructions d'emploi, accompagnées de nombreux exemples, sont concises et permettent une rapide prise en main. Néanmoins, par rapport à d'autres outils de calcul en usage à la même époque, les procédures de calcul peuvent paraître assez longues et comportent des soustractions de

logarithmes qui demandent une attention particulière (annexe 6-3). D'autre part, l'absence d'explications sur l'emploi de logarithmes particuliers – ce ne sont ni des logarithmes népériens, ni des logarithmes décimaux – est regrettable et a pu désorienter des utilisateurs potentiels cherchant à comparer ou vérifier des résultats intermédiaires avec une table de logarithmes classique. Parues à la veille de la Seconde Guerre mondiale, ces tables n'ont pu être mises à l'épreuve de la pratique comme il aurait été souhaitable ; elles restèrent méconnues et il ne semble pas que le concept en ait été repris par la suite.

Calculs d'azimut par les analogies de Neper:

Les analogies de Neper sont des relations de trigonométrie sphérique que l'on établit entre éléments d'un triangle quelconque qui permettent, connaissant deux côtés et l'angle compris, de calculer les deux autres angles ou, connaissant deux angles et le côté compris, de calculer les deux autres côtés. Ces formules, entièrement logarithmiques, sont explicitées en annexe 6-4. Elles font intervenir les demi-sommes et demi-différences des deux côtés (respectivement des deux angles) connus et la moitié de l'angle (respectivement du côté) connu ; elles donnent en résultat la demi-somme et la demi-différence des éléments recherchés. Du fait de leur relative complexité, leur emploi ne s'est pas généralisé dans les calculs de navigation ; deux auteurs ont cependant développés des tables permettant le calcul d'azimut à partir de ces formules.

G. Friocourt :

Entré dans la Marine en 1881, Georges Friocourt (1865-1929) a notamment été professeur de calculs nautiques à l'École navale en 1896 et 1897. En 1899, il publie ses « Tables de logarithmes à six décimales et tables de navigation » qui viennent se substituer aux « Tables de logarithmes et cologarithmes » de V.-M. Caillet et deviendront par la suite réglementaires aux examens de la marine marchande ainsi qu'à l'École navale.

La table XXXIX de l'ouvrage de G. Friocourt est constituée de quatre tableaux répartis sur deux pages donnant les logarithmes à deux décimales des différents rapports trigonométriques intervenant dans la formule et relatifs au demi-angle au pôle, aux demi-somme et différence de la latitude et de la déclinaison puis aux demi-somme et différence des angles au zénith et à l'astre. L'azimut est déduit, après application de règles de signe, de ces deux derniers résultats.

H. B. Goodwin :

Henry B. Goodwin, que l'on présentera plus précisément au chapitre 14, publia en 1921 un opuscule d'une soixantaine de pages intitulé « An Equatorial Azimuth Table ». L'idée développée par Goodwin est la suivante: à partir d'un lieu X_1 de coordonnées géographiques connues (position estimée), on considère un astre S_1 de coordonnées horaires données, déclinaison D_1 et angle au pôle P, et de hauteur H_1. Soit maintenant le lieu X_0, situé à l'intersection de l'équateur et du méridien de X_1 ; il est toujours possible de définir un astre fictif S_0 situé sur le cercle horaire de S_1 dont l'azimut, à partir du point X_0, soit le même que celui de S_1 à partir du point X_1. Cet astre a pour déclinaison D_0 et pour hauteur H_0, vu du point X_0. Si on connaît la déclinaison réduite D_0, le calcul d'azimut est particulièrement simple car la latitude de calcul est nulle.

Le principal problème consiste à calculer D_0 et H_0 à partir des données. C'est ici qu'interviennent les analogies de Neper qui permettent de trouver les demies somme et différence des distances polaire et zénithale réduites. Ce calcul est résolu à l'aide de la table I (ou conversion table) de l'opuscule de Goodwin qui donne directement les éléments cherchés en fonction de la latitude du lieu et des somme et différence des distances polaire et zénithale observées. Une table, repérée II (ou zenith distance and azimuth for latitude 0°) par Goodwin, permet ensuite de trouver directement l'azimut, en fonction des seuls arguments angle au pôle P et déclinaison réduite D_0, obtenue à l'issue de l'étape précédente.

Remarque : l'angle au pôle n'intervient pas dans le calcul de D_0 et H_0 ; on peut ensuite rechercher l'angle au zénith dans la table II avec la déclinaison D_0 et la distance zénithale ($90° - H_0$) réduites.

L'usage de l'Equatorial Azimuth Table de H. B. Goodwin est resté marginal de par sa démarche inhabituelle et la nécessité de connaître également la hauteur pour résoudre le problème ; la table ne peut donc être utilisée pour effectuer un simple calcul d'azimut en vue de déterminer la variation du compas par exemple. Néanmoins, cette table est intéressante sur les plans théorique et pédagogique ; d'autre part, elle rappelle les travaux d'Émile Guyou qui sont peut-être à l'origine de l'Equatorial Azimuth Table de H. B. Goodwin.

Azimut par l'heure et la hauteur :

Le calcul est particulièrement simple puisqu'il s'effectue à partir de l'analogie des sinus appliquée aux angles au pôle et au zénith du triangle de position et aux côtés qui leurs sont opposés, distances polaire (90° - D) et zénithale (90° - H) ; la formule[17] est de plus logarithmique. Cependant, si latitude et déclinaison sont de même nom, il existe une ambiguïté sur le résultat qui donne, indifféremment, l'angle au zénith ou son supplément ; il est donc nécessaire de connaître la position de l'astre par rapport au premier vertical pour lever l'ambiguïté, notamment si l'angle trouvé est voisin de 90°. D'une manière générale, le calcul s'effectue par logarithmes à deux ou trois décimales et l'ambiguïté est levée en comparant la hauteur observée à la hauteur calculée de l'astre au moment de son passage au premier vertical, cette dernière étant fournie par un tableau ou un abaque à double argument, latitude et déclinaison ; on peut également procéder en comparant l'angle au pôle considéré à celui du passage au premier vertical obtenu aussi par un tableau ou un abaque en fonction des mêmes arguments.

Cette méthode de calcul de l'azimut par l'heure et la hauteur n'a pas systématiquement fait l'objet de tables spécifiques ; les éléments de comparaison au passage au premier vertical sont parfois associés à des tables de calcul de la hauteur, comme dans l'ultime édition des tables de Martelli par Kelvin-Hughes au tournant des années 1960-70.

Commentaires :

La table d'azimut est un outil complémentaire dont le domaine d'utilisation est double : d'une part, la détermination de la variation du compas et, d'autre part, le calcul de l'azimut, fixant la direction de la droite de hauteur, lorsque la table conduisant à la détermination de l'intercept ne permet pas de le faire. Dans la marine marchande française, l'usage des tables à double argument, notamment celles de Perrin et Bataille, légères, bon marché et polyvalentes a été quasiment général ; dans la Marine nationale, elles furent concurrencées par les tables à triple argument qui faisaient partie des dotations réglementaires. À l'étranger, on note le rayonnement des tables ABC, à double argument, ces dernières semblant faire jeu égal avec les tables de Burdwood et Davis à bord des navires britanniques.

Les principales tables à double argument analysées (ABC, Perrin, Bataille), donnent des produits de lignes trigonométriques naturelles avec deux ou trois décimales ; la somme algébrique de ces produits est ensuite utilisée pour déterminer l'azimut de l'astre. Si l'on s'en tient au calcul d'azimut, dont le niveau de précision requis est le demi-degré, l'analyse conduite en fin d'annexe 6-2 montre que deux décimales sont suffisantes, dans tous les cas de figure, avec les tables ABC ou avec les tables de Perrin qui utilisent la même formulation. Les tables de Bataille ne peuvent prétendre à un même niveau de précision ; l'analyse montre en effet que la précision du demi-degré peut ne pas être toujours atteinte : d'une manière générale, la précision du calcul est d'autant moins bonne que l'angle au pôle est faible et que, simultanément, l'azimut compté par quadrant est important.

On notera d'autre part que, dans le cas des tables ABC, la présentation à trois décimales peut avoir son utilité dans la résolution de problèmes autres que le calcul d'azimut ; cette présentation est par contre gênante pour interpoler à vue. On remarquera que les tables ABC récentes (Norie 2007) expriment les différents termes avec deux décimales au maximum. Par ailleurs, on a relevé, suivant les tables, des intervalles d'argumentation variables et la

[17] Voir l'annexe 1-1, formules (3) et (3') ; la méthode est aussi particulièrement bien adaptée à l'utilisation de la règle à calculs.

relative difficulté d'exécution des interpolations doubles (ou en croix). D'une manière générale l'argumentation est plus serrée dans les différentes éditions et présentations des tables ABC, limitant ainsi les interpolations.

Annexe 6-1 : Table 902.
Annexe 6-2 : Tables ABC, de Perrin et de Bataille.
Annexe 6-3 : Table de Pitaud.
Annexe 6-4 : Analogies de Neper, tables XXXIX de Friocourt et tables de Goodwin.

Chapitre 7

MÉTHODES DIRECTES

Introduction :

On qualifie de méthode directe celle qui conduit au résultat, angle horaire ou hauteur, par l'application de la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique connaissant la latitude, la déclinaison de l'astre et sa hauteur dans un cas ou son angle horaire local dans l'autre. En annexe 7-1, on a dressé un inventaire chronologique aussi complet que possible des différentes transformations dont cette formule a été l'objet pour tenter d'en simplifier le calcul à l'aide de tables spécialement conçues. Sans entrer dès à présent dans les détails, cet inventaire permet de constater que ce n'est qu'en 1900, avec la formulation proposée par W. H. Bolt dans sa mise à jour de « A Complete Epitome of Practical Navigation » de J. W. Norie que la grandeur à calculer est devenue la hauteur, ou plus exactement la distance zénithale, en application de la méthode de Marcq de Saint-Hilaire révélée en 1875. Précédemment, l'inconnue était l'angle au pôle, donnant accès à l'angle horaire, pour calculer la longitude et construire la droite de hauteur selon la méthode dite de Lalande ou du parallèle estimé ; on remarquera que le procédé aura la vie dure puisque, parallèlement au calcul de hauteur, on continuera à imaginer des tables facilitant le calcul d'angle horaire jusqu'en 1944[18].

On remarquera la prédominance britannique dans ce domaine, tout au moins jusqu'à la première guerre mondiale, liée à l'utilisation des rapports trigonométriques verses dont l'emploi paraît traditionnel en Grande-Bretagne depuis les travaux de Cornelis Douwes de l'Amirauté d'Amsterdam en 1740, publiés en 1754 et connus en Angleterre en 1759.

À la base de ces méthodes directes figure les tables des valeurs naturelles et des logarithmes des rapports trigonométriques ; dans les ouvrages conçus pour une formulation donnée, les tables peuvent être tronquées pour ne donner que les éléments nécessaires : dans certaines formules n'apparaissent que des sécantes et des versines, dans d'autres, ce ne seront que des haversines etc, ceci permettant d'alléger le document et d'éviter les confusions de tableaux ; c'est un avantage mais il faudra faire appel à un autre document pour résoudre d'autres problèmes … Les logarithmes utilisés dans les tables de navigation sont exprimés en règle générale avec quatre, cinq ou six décimales. Ces derniers ont été abandonnées en Grande-Bretagne dès le début du XXe siècle pour passer à cinq ce qui est largement suffisant, à l'école comme en pratique ; en France, l'emploi des logarithmes à six décimales fut imposé dans les écoles de la marine marchande par l'inspection générale de l'enseignement maritime civil jusqu'à ce que les calculettes scientifiques prennent officiellement le relais (à partir de 1981). Les tables à quatre décimales sont évidemment moins précises mais, on le verra, sont suffisantes en pratique dès lors que l'on évite de les utiliser pour traiter des hauteurs supérieures à 75°. Précisons que les formulations utilisées dans la plupart des méthodes directes ne font pas appel à la notion de point auxiliaire ; les éléments de la droite de hauteur sont donc le plus souvent calculés à partir du point estimé. Enfin certaines tables comportent les éléments nécessaires au calcul de l'azimut alors que d'autres renvoient à des outils distincts.

Tables de Martelli et de Pouvreau :

En 1873, la maison d'édition Lightning Printing Office publia un opuscule d'un certain G. F. Martelli dont le titre est « Tables of Logarithms, a Simple and Accurate Method for Finding the Apparent Time ». Selon Charles H. Smiley, astronome et mathématicien américain, la préface de ce petit ouvrage d'une cinquantaine de pages, signée de l'auteur, indique que ce travail avait été achevé en 1853. Il est difficile de dire si une première publication avait été faite avant 1873 mais il a été relevé dans l'édition du Lightning que les exemples étaient datés de 1863 et 1864 et qu'il y figurait des lettres de recommandation de M. F. Maury (1806-1873, officier de l'US Navy, initiateur des

[18] La méthode sera remise au goût du jour en 1977 par Loïc Caradec dans « Une calculatrice à bord, pourquoi et comment ? » (EMOM).

cartes climatologiques dites Pilot-Charts) et d'un certain R. Maxwell (également officier de l'US Navy). Il semblerait qu'une seconde édition ait été publiée en Grande-Bretagne en 1882 ; le titre en est modifié et devient « Short, Easy and Improved Method of Finding the Apparent Time at Ship » auquel on ajouta « Rapid Calculation of Apparent Time for Finding the Longitude ».

Les tables conçues par G. F. Martelli eurent une très longue existence. À quatre décimales et d'utilisation facile, basées sur l'utilisation du point estimé, elles furent très populaires dans les marines marchandes américaine, anglaise et allemande ; elles sont également connues en France et sont mentionnées dans l' « Aide-Mémoire de l'Officier de la Marine Marchande » de Ludovic Mouret (1906) et dans l' « Aide-Mémoire du Capitaine » de B. Aillet (1920). Elles ont été rééditées en Grande Bretagne de nombreuses fois, complétées et adaptées au fil du temps pour résoudre pratiquement les différents problèmes courants de navigation astronomique. On notera par exemple les rééditions de :

- 1920 contenant des instructions en anglais, français, allemand, italien et espagnol,
- 1934 dont l'instruction indique la procédure de calcul de la droite de hauteur selon la méthode Marcq,
- 1936 dont le titre devient « Martelli's Navigational Tables »,
- 1943 comportant une extension d'argumentation en latitude et déclinaison ainsi que des compléments d'instruction, en anglais exclusivement.

D'autres éditions suivront, notamment en 1944, 1946 et 1948. Une dernière édition des Martelli's Navigational Tables paraît au tournant des années 1960-70 ; outre les tables calculées par Martelli, légèrement augmentées, l'opuscule contient tous les éléments et instructions nécessaires à la détermination complète d'une droite de hauteur par les 3 méthodes : méridien, parallèle ou vertical estimés. En une centaine d'année, l'ouvrage s'est simplement enrichi d'une dizaine de pages et reste ainsi fidèle à l'esprit de son concepteur.

Qui était G. F. Martelli ? Seules les initiales de ses prénoms semblent être connues. Ch. H. Smiley indique laconiquement dans sa revue critique de l'édition de 1946 « *To date no trace of the personnal history of G. F. Martelli has been found by the reviewer* »; le Bowditch 1977 indique brièvement qu'il était italien. On laisse aussi entendre, par le biais du Nautical Magazine en 1937, qu'il pourrait s'agir d'un pseudonyme, peut-être celui d'un certain Georges Pouvreau. On se perd en conjectures en remarquant de plus que la formulation employée (voir annexe 7-2) pour calculer l'angle au pôle n'apparaît nulle part : les instructions d'emploi sont muettes à ce sujet et l'examen des tables indique que G. F. Martelli a apporté quelques altérations à la formule de base. Celles-ci avaient très certainement pour but premier de travailler avec des logarithmes positifs et d'éviter les soustractions ainsi que les grands nombres en utilisant l'écriture sexagésimale ; il est aussi probable que G. F. Martelli ait cherché, pour des raisons indéterminées, à dissimuler la « recette » utilisée. Ce manque de transparence, associé aux doutes sur l'identité de l'auteur, sont à l'origine de l'expression « Martelli's Mysteries » employée par les britanniques à propos de ces tables. Quoi qu'il en soit, il est relativement simple, aujourd'hui, de retrouver à partir des éléments des tables la formulation utilisée.

En 1885, en France, Georges Pouvreau, capitaine au long cours, publia chez Gauthier-Villars les « Nouvelles tables de mer pour le calcul de la hauteur, de l'heure et de l'azimut » ; il dédie son ouvrage à É. Pereire, Président de la Compagnie Générale Transatlantique et indique en préface qu'il a établi et calculé ces tables « … *en grande partie à la mer, pendant mes quarts en bas*. ». L'analyse montre qu'elles sont quasiment identiques à celles de G. F. Martelli ; la différence principale entre les deux ouvrages se situe au niveau de la précision, les tables de Pouvreau donnant des résultats avec cinq décimales, contre quatre pour celles de Martelli ; on note également que les cinq tables qui constituent l'ensemble ne sont pas distribuées dans le même ordre et que, dès la première (et seule) édition, les tables de Pouvreau sont présentées sous une forme plus générale en proposant la résolution de multiples problèmes : calcul d'angle horaire, méthode Marcq de Saint-Hilaire, azimut, orthodromie etc. Enfin, G. Pouvreau indique de manière détaillée, dans ses instructions d'emploi, les altérations qu'il applique à la formule de base, qui sont aussi celles employées par Martelli. En revanche, Pouvreau ne cite nulle part Martelli.

Qu'en conclure ? Martelli et Pouvreau ne formaient-ils qu'une seule et même personne ? Pouvreau ayant trouvé les tables de Martelli intéressantes aurait-il repris le travail à son compte en construisant sur ce modèle un outil plus précis et plus général ? Peut-on considérer une totale indépendance entre les deux auteurs ? Cette dernière

assertion est bien entendue possible et il ne faut pas l'écarter mais il paraît peu probable que des constantes quasiment identiques aient été choisies indépendamment pour altérer la formulation de base ; la coïncidence est surprenante. Le décalage dans le temps entre les premiers travaux de Martelli et la publication de Pouvreau (une trentaine d'année sur la base des renseignements fournis par Ch. H. Smiley) tendrait à montrer que la première assertion est peu réaliste. Reste la seconde qui peut paraître la plus probable. Quoi qu'il en soit, les tables de G. Pouvreau n'eurent pas le succès que connurent celles de G. F. Martelli et disparurent rapidement.

La formule employée est issue de la formule fondamentale et ressemble aux formules en cosinus-versine ou haversine ; elle est ensuite modifiée par l'introduction de constantes dont la justification – quand elle peut être faite – et les valeurs précises sont indiquées en annexe 7-2. Les tables de Martelli, constituées de cinq tables à simple argument, permettent le calcul pas à pas de l'angle horaire à partir de la hauteur vraie, de la déclinaison et de la latitude estimée.

Le succès de ces tables s'explique facilement par leur commodité d'emploi, les tableaux de nombres étant disposés dans l'ordre du feuilletage, l'absence d'application de règles de signe, la quasi-absence d'interpolation et le petit nombre d'opérations à effectuer : six entrées dans les tableaux et deux opérations arithmétiques. Ajoutons que le document est de dimensions commodes (15 sur 24 cm) et que la typographie des éditions consultées est excellente.

Comme toutes les tables à quatre décimales, celles de Martelli sont imprécises ; elles firent l'objet de critiques sévères de la part d'experts reconnus comme S. T. Lecky qui ne les jugeait pas intéressantes concernant le gain en temps de calcul et peu dignes de confiance. Ces tables sont en effet relativement grossières : Ch. H. Smiley a effectué des vérifications par sondage et a relevé un nombre significatif d'erreurs d'arrondi.

G. F. Martelli a conçu ces tables pour effectuer un calcul d'angle horaire ; elles sont donc disposées dans l'ordre d'exécution de ce calcul. Elles peuvent néanmoins être utilisées pour le calcul de hauteur nécessaire à l'application de la méthode Marcq de Saint-Hilaire. Le calcul en est un peu moins commode (une addition et deux soustractions) et l'ordre d'entrée dans les tables est différent de celui de la mise en pages. Le calcul d'azimut, introduit probablement avec l'édition de 1943, utilise la formule de calcul par l'heure et la hauteur et, à l'aide d'un petit artifice, la seule première table figurant dans l'opuscule.

Peu de tables peuvent rivaliser avec celles de G. F. Martelli quant à leur durée d'existence et il est apparu utile d'évoquer l'ensemble de leur histoire car, en définitive, le document n'a pas fait l'objet de modification de fond sur une centaine d'années. Ces tables, nées sensiblement à la même époque que celles de J. T. Towson et de Sir W. Thomson, sont construites à partir de la formule fondamentale, utilisent les logarithmes et sont disposées selon plusieurs tableaux à simple entrée ; elles constituent l'archétype des tables de résolution du problème de la droite de hauteur par une méthode directe.

La formule en cosinus-versine ou cosinus-haversine :

La formule est connue depuis longtemps et ce sont des variantes qui sont utilisées notamment par Inman, Martelli, Johnson, etc. C'est H. B. Goodwin qui, dans un article paru dans le Nautical Magazine en 1899 intitulé « The Simplification of Formulae in Nautical Astronomy » proposa et normalisa l'usage de la formule en cosinus-versine permettant de trouver la distance zénithale en fonction de la latitude, la déclinaison et l'angle au pôle ; une simple division par deux permet d'obtenir la formule en cosinus-haversine, cette dernière fonction, largement mise en avant par J. Inman de par les tables dont il est l'auteur, étant d'utilisation plus courante. Dans ce même article, Goodwin précise les avantages qu'aurait une table faisant figurer côte à côte, pour toutes les valeurs de l'argument, les logarithmes et les valeurs naturelles prises par les fonctions versine ou haversine.

La formule en cosinus-versine est rapidement retenue par W. H. Bolt qui en détaille le mode d'emploi dans la nouvelle édition de l'Epitome de Norie publiée en 1900. P. L. H. Davis s'empare de l'idée de Goodwin relative à la disposition des tables et publie en 1905 les Requisite Tables qui donnent les logarithmes décimaux à 5 décimales des sinus, tangentes et sécantes d'un arc ainsi que, dans un même tableau, les valeurs naturelles des haversines et de leurs logarithmes (voir annexe 7-3). Les Requisite Tables ne comportent pas les habituelles tables usuelles de

navigation (conversions, corrections des hauteurs, etc) et sont exclusivement des tables de logarithmes destinées à résoudre la formule en cosinus-haversine ; le document comporte environ 180 pages au format 26 cm sur 18 cm, à la typographie soignée. L'intervalle d'argumentation est de 1' pour les sinus, sécantes et tangentes et de 1s (ou 15'') pour la table des haversines et leurs logarithmes. Se référant à N. Maskelyne, Davis indique en préface que :

> « (…) *five-figure logarithm were abundantly sufficient for the general purposes of navigation*. ».

Il se base ensuite sur quelques exemples de calculs comparatifs avec des logarithmes à sept décimales pour montrer que l'effet des approximations engendrées par l'usage de cinq décimales était négligeable. Après une période de rodage, la formule, et le modèle de table, deviendront la norme dans les marines, militaire et marchande, britanniques.

La disposition des tables, préconisée par Goodwin et adoptée par Davis fut reprise par William Hall (1868-1916), aumônier et Naval Instructor, qui rectifie en ce sens les tables des haversines figurant dans l'ouvrage de Inman ; l'édition mise à jour paraît en 1906. W. Hall met ensuite au point un ensemble de deux tables permettant le calcul de la formule en cosinus-versine avec quatre décimales. L'opuscule, d'une quarantaine de pages, est publié en 1913 sous le titre de « Hall's Appendix to Raper's Practice of Navigation » et constitue la mise à jour relative à la nouvelle navigation astronomique du document de référence écrit par H. Raper dont la première édition remonte à 1840. L'introduction et les instructions d'emploi de l'opuscule de W. Hall sont particulièrement claires et concises, détaillant les calculs relatifs aux trois méthodes de détermination du point déterminatif selon le parallèle (Lalande), le méridien (Borda) et le vertical (Marcq de Saint-Hilaire) estimés, qualifiées, nous l'avons déjà fait remarquer, respectivement de :

> « *Good on large bearings – fails near the meridian / good near the meridian – fails on large bearings / good on all bearings – fails in no case*. »

L'opuscule de Hall, qui, outre les instructions d'emploi, ne contient qu'une table des logarithmes des cosinus et la table des versines, logarithmes et valeurs naturelles, n'est pas spécialement prévu pour faire le calcul de l'azimut (quoique possible en utilisant l'analogie des sinus et des valeurs d'arcs complémentaires) ; il conviendra donc d'avoir recours à une table d'azimut.

On relève ensuite une nouvelle mise à jour des Norie's Nautical Tables permettant de calculer la formule en cosinus-haversine, la table de cette dernière fonction reprenant exactement la disposition des Requisite Tables de Davis ; le document permet le calcul complet des éléments de la droite de hauteur puisque les tables d'azimut ABC y figurent intégralement. Du côté britannique, on note enfin la publication des Burton's Nautical Tables en 1936 suivie des Burton's Four-Figure Navigation Tables en 1944 ; le premier ouvrage permet de travailler avec la formule en cosinus-haversine, le second avec celle en cosinus-versine. Comme leur titre l'indique, ces tables ont été réunies et présentées par S. M. Burton, capitaine au long cours, et s'adressent plus particulièrement aux officiers de la marine marchande ; les tables d'azimut ABC y figurent intégralement ainsi que toutes les tables usuelles de navigation.

La disposition des Requisite Tables de Davis a été reprise dans plusieurs pays, notamment aux États-Unis, dans le Bowditch, et en Allemagne dans les tables de Fulst ainsi que dans celles de Rose pour ne citer qu'eux. Au Brésil, F. Radler de Aquino reprend la formule en cosinus-versine et il intègre les tables de calcul nécessaires à ses Altitude and Azimuth Tables à partir de l'édition de 1912. Avec le même document, l'utilisateur a ainsi le choix entre deux procédures de calcul, l'une utilisant un point auxiliaire et la décomposition du triangle de position en triangles rectangles, l'autre partant du point estimé et basée sur une méthode de calcul direct. La formulation adoptée par Radler de Aquino est équivalente à celle proposée par Goodwin et Davis mais, curieusement, utilise des logarithmes à six décimales rendant difficile la lecture des tables.

En France, on est resté fidèle à la forme naturelle de la formule fondamentale, en sinus et cosinus. La méthode réglementaire, à l'École navale comme dans l'enseignement maritime civil, passe par l'utilisation des logarithmes à six décimales relevés dans les tables de Friocourt. Bien que, selon le lieutenant de vaisseau Perret, professeur à l'École navale au début du XXe siècle, les calculs de position à la mer peuvent s'effectuer avec cinq ou quatre décimales, les tentatives pour passer aux cinq décimales (tables de A. Le Mée en 1920 puis de P. Constan en 1930)

n'auront qu'un modeste succès quoiqu'il semble que ces tables aient été autorisées à une époque aux épreuves d'application des examens de la marine marchande. De même, les traités de navigation en usage en France semblent ignorer superbement l'usage des fonctions trigonométriques verses, ce qui est dommage car la formule fondamentale écrite sous forme de cosinus et versine ou haversine ne fait pas appel à des règles de signe, à la différence de la forme naturelle ; de même, à nombre égal de décimales, l'exécution de ces formules par logarithmes est un peu plus courte que celle de la forme naturelle. Cette désaffection perdurera jusqu'à la première publication[19] des Petites Tables de Point Astronomique de J.-B. Dieumegard (1910-1969). Ce dernier est breveté capitaine au long cours en septembre 1935 et effectuera toute sa carrière au sein de la compagnie Dreyfus où il exercera successivement les différentes fonctions d'officier : lieutenant, second capitaine puis capitaine à partir de 1941 ; il se retirera en 1965 alors qu'il est capitaine d'armement. Les tables dont il est l'auteur donnent les logarithmes des sécantes et des versines ainsi que les valeurs naturelles nécessaires avec quatre décimales. Elles sont disposées de façon beaucoup plus aérée que les tables de Hall, en quatre tableaux au lieu de deux. On trouve d'abord la table des logarithmes des versines (pour l'angle horaire) puis celle des logarithmes des sécantes (pour la déclinaison et la latitude) ; la table suivante permet de passer du logarithme d'un versine (pour l'arc auxiliaire θ) à sa valeur naturelle et enfin, la dernière table permet de trouver le versine de la distance zénithale méridienne ($\varphi - D$) puis d'extraire la hauteur à partir de son versine en utilisant une échelle d'arc complémentaire. L'ensemble constitue un opuscule d'une trentaine de pages au format d'environ 26 cm sur 20 cm ; après une courte et rigoureuse instruction d'emploi, les tableaux sont disposés dans l'ordre de leur utilisation. L'ouvrage eut une très grande popularité dans les marines militaire et marchande ainsi qu'à la plaisance ; elles ont été d'usage réglementaire dans la Marine nationale et, associées aux tables d'azimut de Bataille, ont fait l'objet de tirages spéciaux durant la Seconde Guerre mondiale. Elles ont ensuite été rééditées plusieurs fois, notamment en 1949, 1961 et 1970 ; elles sont intégrées au recueil de tables de navigation, référencé sous le titre de Tables 900, publié en 1963, avec le concours du Service hydrographique de la Marine.

La critique qui est couramment faite aux tables de Dieumegard (et qui s'applique aux tables de Hall et aux Burton's Four-Figure Navigation Tables) concerne leur imprécision, conséquence directe de la réduction du nombre de décimales à quatre. L'analyse montre que l'incertitude de calcul résultante sur la hauteur estimée atteint couramment 2', voire plus (voir annexe 7-3), sur l'intervalle pratique d'utilisation des tables ; cette valeur n'est pas gênante au large mais il faut en connaître l'ordre de grandeur dans les circonstances d'un atterrissage. Outre leur faible encombrement, la principale qualité de ces tables réside dans leur commodité d'emploi ; l'impression générale qu'elles laissent est résumée en 1954 dans la revue de l'Institut français de Navigation par P. Marchand, capitaine au long-cours et commandant à la Société Navale Delmas-Vieljeux :

> « *(…), après avoir essayé diverses tables, nous sommes revenus à la table Dieumegard qui, bien qu'un peu imprécise aux limites, a le gros avantage d'être très simple et très claire, ce qui est appréciable lorsque l'on est fatigué après un chargement pénible, ou par mauvais temps. Absence de règle de signe, utilisation du point estimé, peu de feuilletages, quatre chiffres, interpolations à vue, faible encombrement et possibilité pour chaque officier d'avoir sa table personnelle (…)* »

On pourrait y ajouter les commentaires aussi louangeurs venant d'O. Stern-Veyrin, de l'amiral de Kerviler ou encore de l'Institut français de Navigation au moment de la publication de la réédition de 1961. Mais, tous ne le sont pas et ce même Institut publie, dans sa chronique des livres et revues d'avril 1964, une critique acerbe des Tables 900 qui viennent de paraître :

> « *Ces tables, d'après leur présentation par l'auteur, se sont proposé un but louable qui semblera avoir été atteint plus ou moins bien. Elles visaient, en effet, à fournir à l'officier de quart un recueil « personnel, maniable et peu encombrant » et elles doivent permettre à celui-ci de résoudre « aussi simplement, sûrement et rapidement que possible tous les problèmes courants de navigation ».*
>
> *Il faut remarquer de suite que le format n'est pas tellement plus maniable que celui des autres documents de passerelle. Quant au contenu, il consiste surtout dans la reproduction des tables des Éphémérides nautiques – avec une dilatation inattendue quant à l'estime –, dans la reproduction des tables de Dieumegard et de Bataille et de tables complémentaires où l'on retrouve la forme traditionnelle et un peu périmée des circumméridiennes.*
>
> *On retrouve, en effet, ici, ces tables de Dieumegard qui avaient été adoptées pendant la guerre, il y a vingt ans, pour l'usage des chefs de quart et par suite de pénurie de documents. On sait qu'elles ne sont en réalité qu'une forme sans supériorité des*

[19] Probablement à la veille de la seconde guerre mondiale et à compte d'auteur.

tables de cosinus-haversines qui étaient autrefois réglementaires dans les marines britannique et allemande. L'analyse qui les complète dans le recueil s'étend avec une franchise brutale sur leur imperfection. On sait que l'on peut comprimer toutes les tables, ne prendre, comme ici, que quatre décimales, mais qu'il faut s'attendre à des erreurs supérieures à trois milles dans des conditions normales, ce qui, en navigation rapide, est une tare gênante. On peut être surpris, enfin, de les voir accouplées avec les tables de Bataille qui n'ajoutent vraiment rien en remplaçant les tables de Perrin, tout à fait semblables, tout aussi périmées, mais si longtemps réglementaires à l'École navale. »

Il est exact qu'au début des années 60, il existait des tables bien plus performantes, et guère plus volumineuses, que celles de Dieumegard et Bataille, on le constatera dans les chapitres suivants, et on comprend la réaction du rédacteur anonyme (mais dont l'identité est à peine voilée pour les familiers de la revue de l'IFN) de cette note de lecture, esprit critique averti, ouvert aux techniques modernes de navigation issues de la Seconde Guerre mondiale.

Calculs d'angle horaire :

Jusqu'à la seconde guerre mondiale, le « calcul d'heure » est resté traditionnel pour construire la droite de hauteur à partir du point déterminatif Lalande et calculer le point de midi. Plusieurs auteurs ont donc continué à proposer des tables facilitant ce calcul ; on relève notamment les noms de A. Rust, H. B. Goodwin, C. C. Soule et J. Y. Dreisonstok et enfin, P. V. H. Weems.

Armistead Rust était officier de l'US Navy. Il publia, en 1908, un premier ouvrage « Ex-Meridian, Altitude, Azimuth and Star Finding Tables » dans lequel figure le célèbre diagramme d'azimut dont il est l'auteur et sur lequel on reviendra au chapitre 12 consacré aux diagrammes et abaques. En 1918, il publie d'autres tables plus spécialement conçues pour le calcul de l'angle horaire : « Practical Tables for Navigators and Aviators » ; sous un format commode, 24 cm sur 16 cm, l'ouvrage d'environ 120 pages permet de résoudre l'ensemble des problèmes courants de navigation, maritime et aérienne. Pour calculer l'angle au pôle, A. Rust utilise une formule analogue à celle choisie par Martelli, qu'il résout par logarithmes. L'ouvrage de Rust donne les différents logarithmes avec quatre décimales, une première table étant relative aux sécantes, argumentée toutes les minutes d'arc, une seconde est à double argument, hauteur et distance zénithale méridienne, argumentée respectivement toutes les 10' et tous les degrés entiers et enfin, une troisième table est relative aux logarithmes et valeurs naturelles des haversines, argumentée toutes les 15' d'arc soit toutes les minutes de temps. L'azimut de l'astre s'évalue ensuite à l'aide d'un diagramme figurant à la fin de l'ouvrage. L'ouvrage contient de plus l'ensemble des tables usuelles de correction des hauteurs et de conversion ainsi que des tableaux donnant les logarithmes des autres rapports trigonométriques d'un arc et les logarithmes des nombres ; il est donc aussi possible de calculer la hauteur pour construire la droite de hauteur selon la méthode de Marcq de Saint-Hilaire On trouve enfin un tableau relatif au calcul de la latitude circumméridienne. La table est donc complète et polyvalente en ce sens qu'elle permet de traiter tous les problèmes de navigation astronomique ; il est par contre dommage que l'auteur ait cherché à contracter le contenu au maximum ce qui rend difficile la lecture des tables ; on y associera la nécessité d'effectuer des interpolations fastidieuses compte tenu des divers intervalles d'argumentation.

En 1921, c'est au tour de Henry B. Goodwin de publier « The Alpha, Beta, Gamma Navigation Tables », ouvrage permettant le calcul de l'angle au pôle à partir de la formule en cosinus-versine utilisant des logarithmes à quatre décimales. L'ouvrage donne deux tables principales dans lesquelles figurent les logarithmes et les valeurs naturelles des cosinus pour l'une (table $\alpha\beta$) et les logarithmes des inverses des versines pour l'autre (table γ) ; l'intervalle d'argumentation est de 1' pour la table $\alpha\beta$ et de 5 s pour la table γ. Leur originalité principale réside dans l'écriture des valeurs naturelles des cosinus résultant d'une multiplication par 10^3 et d'une conversion dans le système sexagésimal pour éviter la confusion de lecture avec le logarithme ; ainsi, $\cos 60° = 0{,}5$ s'écrira 8' 20'' (= 500''). Ces tables furent rééditées en 1926 mais il ne semble pas qu'elles eurent un grand succès. Cependant, comme les tables de Martelli ou de Rust, elles peuvent aussi être utilisées pour calculer la hauteur.

J. Y. Dreisonstok était officier de l'US Navy ; il publia, en 1928, les « Navigation Tables for Mariners and Aviators » (HO 208) relatives au calcul des éléments de la droite de hauteur selon la méthode de Marcq de Saint-Hilaire ; ces tables seront étudiées au chapitre 8. Il apporta ensuite sa collaboration à C. C. Soule, pour concevoir des tables d'angle horaire qui seront connues en 1932. L'opuscule, sans titre, d'une cinquantaine de page ne semble

pas avoir bénéficié d'une grande diffusion, ni avoir fait l'objet d'une forme de dépôt légal (copyright) ; il figure cependant dans l'inventaire de tables de navigation du Bowditch et a fait l'objet de mentions au dos de « pilot charts » en 1943 et 1948. L'opuscule est édité par D. J. Pegg en 1982, sous le titre « Line of Position by the Sumner Method ». Les auteurs ont utilisé directement la formule de Borda, en remplaçant le $(\sin P/2)^2$ par son équivalent, le haversine, et en faisant intervenir les rapports sécante et cosécante au lieu des cosinus et sinus. L'expression trouvée permet de calculer l'angle horaire ainsi que l'azimut, par le jeu d'échelles complémentaires. L'opuscule comporte deux tables principales, l'une donnant les logarithmes des sécantes et cosécantes, l'autre ceux relatifs aux haversines ; elles sont argumentées toutes les minutes d'arc, les logarithmes étant exprimés avec cinq décimales.

P. V. H. Weems, ancien officier de l'US Navy, est un expert américain en navigation, maritime et aérienne, de notoriété internationale ; nous reviendrons sur son personnage au chapitre 8. Durant le second conflit mondial, il exerce les fonctions de Commodore de convoi de navires de commerce et remarque que de nombreux officiers de marine marchande utilisent toujours l'ancienne méthode du calcul de longitude ou « time sight method ». Souhaitant offrir à ces marins un outil de calcul équivalent à ceux qui existent pour traiter une observation selon la méthode Marcq de Saint-Hilaire, il conçoit un petit recueil de tables qu'il dédie aux « Merchant Marine Navigators » et publie en 1944 sous le titre « The Secant Time Sight ». Comme Soule et Dreisonstok, Weems part de la formule de Borda qu'il transforme pour ne faire intervenir que les rapports trigonométriques sécante et cosécante. Le document se réduit donc essentiellement à des instructions d'emploi et une table des logarithmes des sécantes et cosécantes à cinq décimales, argumentée toutes des minutes d'arc ; on y trouve également les tables usuelles de corrections des hauteurs et conversions, un diagramme d'azimut de Rust et une table d'évaluation des latitudes circumméridiennes.

Utilisation de la seule fonction haversine :

Les tables de Roméo Braga, officier de la marine brésilienne, calculées au début des années 1920 et publiées en France en 1924, sous le titre de « Tables de hauteurs pour le calcul de la droite de hauteur Marcq Saint-Hilaire », sont tout à fait particulières : suite à une astucieuse transformation de la formule fondamentale, la hauteur se calcule par une formule de la forme (voir annexe 7-4) :

$$\mathrm{hav}(90° - \mathrm{H}) = \mathrm{A} + \mathrm{B}$$

expression dans laquelle A et B sont deux nombres fonctions des valeurs naturelles du haversine de l'angle au pôle et, respectivement, de la somme et de la différence de la latitude et de la déclinaison ; le résultat est obtenu sans avoir recours aux logarithmes, avec deux tables de valeurs naturelles et l'exécution d'une seule interpolation. Dernière particularité pour des tables utilisant une méthode directe, le recours au point auxiliaire pour effectuer simplement le calcul de la hauteur[20].

Les tables de R. Braga sont constituées de deux séries de tableaux. La première, intitulée « Table I », à double arguments, donne les valeurs naturelles de A et B avec cinq chiffres significatifs. Elle est argumentée de degré en degré ; c'est la raison pour laquelle on choisira un point auxiliaire dont les coordonnées conduisent directement aux arguments du tableau donnant A, l'interpolation ne sera alors requise que pour B. La seconde table, ou « Table II », donne, à un facteur près, les valeurs naturelles de la fonction haversine pour déterminer la hauteur auxiliaire. Le calcul de l'azimut nécessite d'utiliser un abaque ou une table particulière.

Ces tables, basées exclusivement sur l'emploi de valeurs naturelles sont précises, grâce à l'emploi de cinq décimales, et simples d'emploi : deux ouvertures de tables, pas de règles de signe et une seule interpolation ; elles conduisent très rapidement au résultat cherché. Elles auraient mérité d'être étendues ; en effet, l'emploi de la table I est limité aux arguments inférieurs à 90°, ce qui recouvre les observations de tous les astres du système solaire sous une latitude maximale de 60°. Par contre, l'observation d'une étoile de grande déclinaison sous une latitude moyenne peut sortir des limites d'utilisation de la table. Il reste néanmoins possible d'effectuer le calcul avec la

[20] Ce recours n'est pas obligatoire ; on peut effectuer le calcul à partir du point estimé au prix d'une interpolation supplémentaire.

table I telle que présentée au prix d'un petit artifice. On regrette la brièveté de la notice d'utilisation dans laquelle on aurait aimé trouver la formulation employée ainsi que les limites d'emploi des tables.

Une autre transformation judicieuse de la formule fondamentale, mise en évidence par l'ingénieur hydrographe Victor Georges (1917-1998), probablement sur les conseils de Pierre Hugon, conduit à utiliser exclusivement les fonctions haversine et cohaversine (ou haversine de l'arc supplémentaire). La méthode est développée dans ses « Tables de Logarithmes et de Navigation » publiées en 1944 et dont la diffusion semble avoir été limitée aux élèves de l'École navale repliée à Casablanca, en remplacement des tables de Friocourt et de Bertin, introuvables sur place à l'époque. Le document est conçu pour le calcul de cette dernière version de la formule fondamentale. La formulation est ensuite reprise en 1947 par P. Hugon.

Pierre Hugon est admis par concours à l'École navale en 1917 ; il n'achève pas son cursus de formation et sert dès 1918 à bord de divers petits bâtiments en qualité de quartier-maître puis d'officier marinier. Il quitte la Marine en 1920 avec le grade de second-maître manœuvrier chef de quart. Il entame ensuite une carrière dans la marine marchande et est breveté capitaine au long cours en 1924 ; il intègre le corps des professeurs d'hydrographie en 1930. La Seconde Guerre mondiale le conduira à reprendre du service actif dans la Marine Nationale : il commande une division de dragueurs de mines à Boulogne où l'atteint l'invasion allemande. Grièvement blessé, il est prisonnier de guerre en Silésie puis rapatrié. Il reprend ensuite dans le courant de la guerre sa carrière de professeur à Marseille, Alger, Casablanca puis, en 1945, à Brest à l'École navale. Il est affecté en 1946 au Service Hydrographique de la Marine, chargé des problèmes de radionavigation. Membre fondateur de l'Institut français de Navigation en 1953, c'est un expert internationalement reconnu : au-delà des multiples études et expérimentations dont il est l'auteur, on lui doit en 1955 la présentation toujours actuelle des Éphémérides nautiques, la rédaction du Guide du Navigateur, ses participations, auprès de l'OMCI[21], à l'étude des routes recommandées du pas de Calais (aujourd'hui « dispositifs de séparation du trafic ») et à la rédaction du règlement international pour prévenir les abordages en mer de 1972 (colreg72).

P. Hugon reprendra la rédaction de l'ouvrage de V. Georges qu'il publiera sous son nom en 1947 sous le titre de « Nouvelles tables pour le calcul de la droite de hauteur à partir du point estimé » ; il présente ainsi son ouvrage :

> « *En présentant ce petit ouvrage aux navigateurs, on s'est proposé de mettre à leur disposition un outil de mer maniable et efficace permettant le calcul rapide d'une droite de hauteur à partir du point estimé avec le maximum de simplicité et le minimum de débats, de façon à suppléer, quand cela est nécessaire, à l'absence de tables à triple entrée.*
>
> *Dans la disposition de la table et des brefs tableaux d'interpolation qui la complètent, on a évité toute apparence d'une précision à la fois illusoire, inutile et dangereuse, tant à cause de l'imprécision des formules que de l'incertitude moyenne des observations. Toutefois, l'approximation du mille, seule intéressante à la mer y est strictement sauvegardée sauf dans les cas limites, communs à toutes les tables, où les hauteurs supérieures à 80° ne permettent pas cette approximation.*
>
> *(…) Étant donné l'objectif limité à la recherche du point à la mer qu'on s'est proposé, on ne saurait rechercher dans ces tables, à l'aide d'habiles substitutions, la solution de multiples problèmes particuliers à la navigation. Elles visent avant tout, à devenir un instrument de travail quotidien dont l'habitude est facile à prendre, à conserver et à retrouver à la mer.* »
>
> « *Le but que se propose cette table est le calcul de la hauteur d'un astre en fonction de l'heure, à partir du point estimé par le moyen logarithmique appliqué à une seule fonction trigonométrique : la fonction haversine qui apparaît seule dans l'expression de la hauteur après transformation de la formule fondamentale*. »

L'ouvrage se présente sous la forme d'un opuscule d'une centaine de pages au format de 22 cm sur 16 cm comportant une instruction d'emploi détaillée et bilingue (anglais et français), une table de corrections des hauteurs, un abaque d'azimut sur lequel on reviendra et une table donnant les logarithmes à cinq décimales des haversines et cohaversines, argumentée toutes les minutes d'arc. La formulation utilisée pour calculer la hauteur estimée, ainsi que la disposition et l'usage des tables sont explicités en annexe 7-5.

[21] Organisation Maritime Consultative Internationale, devenue aujourd'hui OMI, Organisation Maritime Internationale.

Le commentaire du professeur d'hydrographie A. Le Calvé reflète précisément l'impression que nous avons eue à l'analyse des tables de Hugon :

> « (…) *Mon ami P. Hugon a transformé d'une manière heureuse la formule donnant* $\sin H_e$ *, de façon telle que cette formule ne comporte plus qu'une seule ligne trigonométrique, la fonction haversine (…). Le nombre de logarithmes est ainsi réduit à quatre ; toutes les règles de signe sont supprimées, tous les facteurs et tous les termes étant positifs ; et l'on n'a plus qu'une seule table à feuilleter. Un abaque d'azimut, joint à la table, permet de trouver d'une façon très commode l'azimut*. »

L'éloge a d'autant plus de valeur que, nous l'avons déjà souligné, Le Calvé n'appréciait guère les outils de calculs, quels qu'ils soient, qui auraient eu « *la prétention de simplifier la détermination d'une droite de hauteur* ». Nous pouvons compléter en faisant remarquer la qualité et la rigueur de la rédaction des instructions d'emploi qui constituent un modèle de concision. L'ouvrage est malheureusement desservi par la piètre qualité de la typographie et de l'impression. Ces tables furent-elles utilisées à bord des navires ? De toute évidence, et pour les inconditionnels du point estimé, elles n'ont pas acquis la popularité des tables de J.-B. Dieumegard. Elles firent l'objet d'essais et de comparaisons – qui reviennent à leur avantage – dans la Marine nationale et à bord des frégates météorologiques *Laplace* et *Le Brix* en 1948. Concernant la marine marchande, un seul témoignage mentionne leurs qualités mais reproche leur mauvaise qualité d'impression, cause possible de leur désaffection. D'autres facteurs peuvent être évoqués : manque de publicité, concurrence des « tables américaines » à triple argument, ou, plus simplement, routine et absence de curiosité.

Utilisation des logarithmes d'addition et de soustraction :

On appelle logarithme d'addition, log (a + b), et de soustraction, log (a – b), ceux résultant respectivement de la somme et de la différence de deux nombres a et b et dont on connaît les logarithmes, log (a) et log (b). Ces nombres ont été étudiés pour la première fois par l'architecte et mathématicien italien Zecchini Leonelli (1776-1847) ; ils firent l'objet d'une partie d'un petit ouvrage publié à Bordeaux en 1803 sous le titre de « Supplément Logarithmique » dans lequel figure un simple extrait d'une table donnant ces logarithmes en fonction du logarithme du rapport des deux nombres. La première table complète, publiée en 1812, est due à Karl F. Gauss (1777-1855) ; c'est la raison pour laquelle les logarithmes d'addition et de soustraction sont aussi appelés logarithmes gaussiens (gaussian logs). Ces logarithmes peuvent être utilisés dans les calculs de navigation lorsque tout ou partie de l'expression à calculer se présente sous la forme $y = a \pm b$ tout en ayant déterminé précédemment les logarithmes des deux nombres a et b (voir annexe 7-6).

On relève une première étude relative à leur utilisation pour le calcul d'angle horaire dans la Revue Maritime et Coloniale de mai 1879, sous la signature de l'enseigne de vaisseau Vignot ; il s'agit d'une simple analyse comparative à partir d'une formule de Borda, sans qu'y figure de table particulière. L'avantage semble revenir aux logarithmes d'addition et de soustraction malgré le recours à des soustractions de logarithmes, opération toujours risquée. Ce ne sera que bien plus tard qu'une table simplifiée donnant ces logarithmes figurera dans un recueil destiné spécialement à la navigation : Georges Friocourt les intégrera dans ses tables en 1899 ; on les trouvera également, selon D. H. Sadler, dans les « Tábuas Náuticas » portugaises de Abel Fontera da Costa et Victor H. de Azevedo Coutinho publiées au début du XXe siècle.

C'est probablement le croate Ciro Carić (1882-1962) qui tirera le meilleur parti de l'usage des logarithmes gaussiens. Ce dernier était capitaine au long cours (Triestre, 1907) puis professeur de mathématiques et navigation à partir de 1915 dans les établissements de formation maritime de Kotor puis, de 1929 et jusqu'à sa retraite en 1950, de Dubrovnik. Il est l'auteur des « Nautičke Table » en 1923 qui seront publiées en italien en 1926 sous le titre de « Tavole Nautiche ». C. Carić calcule la hauteur en utilisant une formule analogue à celle mise au point plus tard par P. Hugon[22], la fin du calcul faisant intervenir les logarithmes d'addition et de soustraction. Ces tables sont à quatre décimales et comportent une douzaine de pages donnant les logarithmes des haversines et co-haversines et une page et demie donnant les logarithmes gaussiens ; ces derniers dispensent de l'usage d'une table

[22] P. Hugon a découvert les tables de Carić suite à une courte communication de B. R. Keir Moilliet parue dans le Journal of Navigation du Royal Institute of Navigation en 1951, donc postérieurement à la publication de ses propres tables (1947).

des valeurs naturelles des haversines. Le temps et les écritures de calculs sont équivalents à ceux nécessaires à la résolution de la formule en cosinus haversine (ou versine) avec quatre décimales. Malgré la présentation qu'en a faite H. B. Goodwin dans le Nautical Magazine de septembre 1926, il apparaît que ces tables restèrent quasiment inconnues du monde maritime.

En 1930, on relève la publication aux États-Unis des tables de L. M. Berkeley donnant les logarithmes d'addition et de soustraction avec cinq décimales. Ces tables sont conçues pour un usage général mais on y remarque des instructions détaillées visant à la résolution de la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique. En 1946, c'est au tour de l'officier de l'US Navy George W. D. Waller de travailler à la conception d'un ouvrage comportant les tables des logarithmes à cinq décimales des sécantes, cosécantes et gaussiens pour calculer les éléments de la droite de hauteur par le biais d'une nouvelle transformation de la formule fondamentale. Le projet ne sera pas poursuivi après le décès prématuré de l'auteur et l'ouvrage ne sera donc pas publié.

Table miniature de Doniol :

Robert Doniol (1903-1989) est licencié ès-sciences et ès-lettres, officier de marine puis ingénieur hydrographe ; c'est donc simultanément un marin, un scientifique et un chercheur dont les talents se sont exercés dans de nombreux domaines. En 1955, il fait paraître dans la revue de l'Institut français de Navigation un article dans lequel il explique, décrit et fait figurer intégralement les tables dont il est l'auteur et qu'il présente comme suit :

> « *La table de point « Miniature » provient d'une étude dont le but était de rechercher le moyen d'obtenir une table aussi brève que possible qui n'exigerait, pour la détermination complète du point, que des calculs de longueur acceptable. Nous savons, en effet, que ce que l'on gagne en brièveté tabulaire on le perd généralement en allongeant les opérations. Dans ce domaine, par conséquent, pas de miracle. Après adoption d'une formule permettant de réaliser une telle table, nous avons cherché le maximum de simplifications, tant dans la présentation des tableaux que dans la disposition des calculs.* »

Partant de la formule fondamentale, R. Doniol établit une expression (voir annexe 7-4) dans laquelle le sinus de la hauteur est obtenu en fonction des cosinus de la somme et de la différence entre latitude et déclinaison et du haversine de l'angle au pôle. À l'instar des tables de R. Braga, celles proposées par Doniol donnent exclusivement des valeurs naturelles avec cinq décimales : celles des cosinus, avec un intervalle d'argumentation de 30', et celles des haversines selon une argumentation telle que le nombre calculé ne comporte qu'un minimum de chiffres significatifs différents de zéro, ceci afin de faciliter une multiplication qui devra être exécutée « à la main ». Il est, ici aussi, recommandé de travailler à partir d'un point auxiliaire dont les coordonnées géographiques, aussi proches que possible de celles du point estimé, conduisent, pour l'angle au pôle et la différence (ou la somme) entre latitude et déclinaison, à des arguments directs de la table ; une interpolation sera donc à effectuer pour l'autre valeur de somme (ou différence) entre latitude et déclinaison et il faudra en effectuer une dernière pour l'extraction finale de la hauteur.

Les tables proposées se réduisent à deux pages et donnent, outre les éléments déjà évoqués ci-dessus, les coefficients de variations relatifs aux cosinus nécessaires à l'interpolation ainsi que les valeurs naturelles des tangentes et les autres quantités nécessaires au calcul de l'azimut par la formule des cotangentes. Dans l'état, et comme l'auteur le laissait prévoir, s'il n'y a pas de feuilletage puisqu'il n'y a que deux pages, le nombre d'opérations à effectuer pour arriver aux résultats – notamment celui de l'azimut – est relativement important.

On note en définitive qu'à partir d'un document très léger et développé à partir de valeurs d'angle au pôle auxiliaire particulièrement bien choisies, R. Doniol a conçu, pour la hauteur, une méthode conduisant à un résultat précis résultant d'opérations simples aux règles de signe réduites, mais relativement peu habituelles puisqu'une multiplication devra être effectuée manuellement. Le calcul d'azimut est par contre long et délicat, comportant notamment deux sommes de produits et une division à effectuer « à la main », ou à la règle à calculs.

Il semble que les tables conçues par Robert Doniol en soient restées au stade expérimental avant de tomber dans un certain oubli. La méthode, ainsi que la formule, figurent cependant en bonne place dans l'inventaire figurant dans l'édition 1977 du Bowditch ce qui a éveillé la curiosité de passionnés de navigation astronomique aux États-Unis qui remirent à l'honneur la méthode de Doniol : la formule est transformée pour n'utiliser que la fonction

haversine, ce qui est facile à partir des cosinus employés par Doniol et l'azimut est évalué à l'aide d'un petit abaque. La méthode, rebaptisée « Haversine-Doniol », est directement exécutable à partir d'une simple table des valeurs naturelles des haversines ; la table des haversines proposée occupe deux pages, l'argument variant de 0° à 180° avec un intervalle constant de 2' ; les valeurs naturelles sont exprimées avec quatre décimales.

Un calcul manuel de la forme naturelle de la formule fondamentale :

Au début des années 1990[23], la société Digipoche, installée aux environs de Bordeaux, publia une simple table des valeurs naturelles des sinus et cosinus à quatre décimales et proposait un calcul manuel de la formule fondamentale. Pour alléger les opérations, il convenait de travailler à partir d'un point auxiliaire de façon que latitude et angle au pôle correspondent directement à des arguments de la table, c'est-à-dire à des nombres de degrés entiers. Dans ces conditions, il restait seulement à interpoler le sinus et le cosinus de la déclinaison à l'aide d'une table des parties proportionnelles. Les éléments (rapports trigonométriques, interpolations et instructions comprises) figurent en totalité sur le recto d'une feuille de format A4. Une fois relevé les différents rapports trigonométriques, le calcul complet (voir annexe 7-7) exige de faire trois multiplications à quatre chiffres au multiplicateur comme au multiplicande suivi d'une addition algébrique et de l'extraction de la hauteur avec une interpolation. Le calcul d'azimut par l'analogie des sinus demandera une multiplication et une division avec des rapports trigonométriques qui pourront être arrondis à deux ou trois décimales et sans interpolation finale. On peut se demander si le concept était réaliste à la fin du XXe siècle : le calcul est long et les risques d'erreur nombreux pour un calculateur non formé à l'ancienne école. La méthode est par contre très facilement applicable avec une simple calculette à quatre opérations. Cette pratique est aussi indiquée par le pilote de ligne Jean Rigot dans son « Aide-mémoire pour une navigation astronomique d'urgence ».

Commentaires :

On ne peut que constater la multiplicité des formulations présentées et il est probable que l'on a exploité toutes les transformations possibles de la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique ; on relève en effet, dans l'édition française de l' « Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées » :

> « *(...) la forme primitive de la formule de la hauteur a subi plus de 80 transformations ayant pour but de la rendre plus commode dans les applications ou de faciliter sa mise en table.* »

On remarquera la simplification qu'apporte la formule en cosinus-versine ou haversine et leurs équivalents par rapport à la forme naturelle : déroulement du calcul plus simple, quasiment sans application de règle de signe. On arrive de plus à une solution tout à fait satisfaisante, tant sur le plan de la précision que sur celui de la durée de calcul, si on exécute cette formule avec des logarithmes à 5 décimales.
Les tables à 4 décimales du type Martelli, Hall, Dieumegard et Burton, construites sur la base de cette même formule en cosinus-versine ou haversine, sont certes imprécises mais ont finalement été utilisées en permanence au cours de l'ensemble du XXe siècle, à bord de tous genres de navire : le calcul est bref et le résultat sûr, la précision de calcul étant du même ordre de grandeur que celui de la mesure de hauteur.
Enfin, si les logarithmes d'addition et de soustraction n'ont pas apporté les simplifications espérées, on ne peut que rester admiratif devant les méthodes mises au point par le brésilien Braga et le français Doniol qui utilisent des valeurs naturelles de rapports trigonométriques : concernant le seul calcul de la hauteur, les deux procédés sont les plus rapides d'exécution. Les tables de Braga n'ont probablement pas été connues au-delà d'un cercle d'initiés avant de tomber dans l'oubli ; quant à celles de Doniol, elles en sont restées au stade expérimental jusqu'à leur redécouverte récente outre-Atlantique.
Reste le calcul manuel lié à l'emploi des tables Digipoche. Fut-il pratiquement utilisé ? Ne s'agissait-il pas simplement d'honorer la réglementation en plaçant la feuille de papier dans la boîte du sextant ? Le calcul est

[23] Probablement 1991.

évidemment possible et utilisable avec profit si on maîtrise la technique de la « multiplication réduite » pour n'opérer qu'avec un minimum de chiffres.

Annexe 7-1 : Méthodes directes, essai d'inventaire.
Annexe 7-2 : Tables de Martelli et de Pouvreau.
Annexe 7-3 : Formulation en cosinus-versines et haversines, tables de Davis, Hall et Dieumegard.
Annexe 7-4 : Utilisation des valeurs naturelles, tables de Braga et de Doniol.
Annexe 7-5 : Tables de P. Hugon.
Annexe 7-6 : Utilisation des logarithmes d'addition et de soustraction.
Annexe 7-7 : Table digilog (digipoche).

Chapitre 8

SUR LE MODÈLE DE SOUILLAGOUËT

De Souillagouët à Ogura :

Fernand Souillagouët a mis au point en 1891 des tables de calcul de la hauteur construites à partir de la décomposition du triangle de position de l'astre en deux triangles rectangles selon la hauteur sphérique issue du zénith (figure 8-1). Celles-ci donnent, en fonction de l'angle au pôle P de l'astre et de la latitude φ du lieu la colatitude β du pied L de la hauteur sphérique et le logarithme du cosinus de l'arc de hauteur sphérique ZL noté b. La hauteur de l'astre se calcule ensuite en utilisant directement ce logarithme auquel on ajoute celui du cosinus de l'arc de méridien AL égal, dans le cas de figure représenté ci-dessus, à (90° - (β + D)), ce dernier élément étant à rechercher dans une table des logarithmes des rapports trigonométriques.

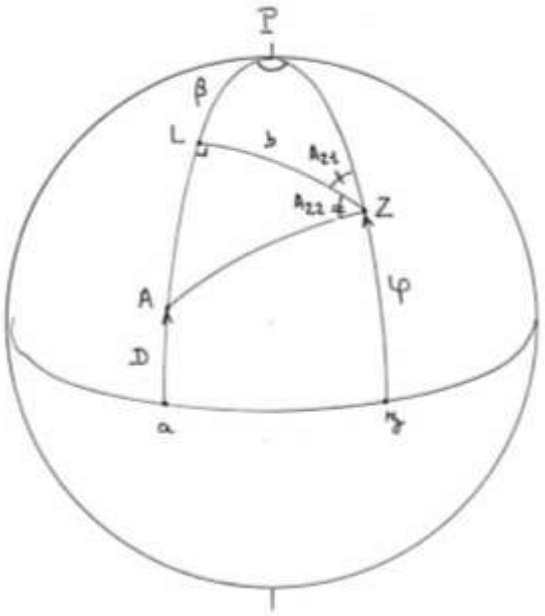


Fig : 8-1

La méthode fait appel à un point auxiliaire dont les coordonnées, voisines du point estimé, sont telles qu'elles correspondent directement à des arguments de la table évitant ainsi d'avoir à interpoler ; dans ces conditions, le calcul de la hauteur ne demande que trois entrées dans les tables, une somme algébrique avec application d'une règle de signe concernant la détermination de l'arc AL, et une somme de deux logarithmes : on ne peut guère faire plus simple. Cependant, de toute évidence, la méthode n'a pas fait recette en France ; on a vu qu'elle s'était exportée en Amérique du Sud, probablement grâce à l'entremise de F. Radler de Aquino, sans retombées perceptibles.

C'est en 1920 que l'ingénieur hydrographe japonais Sinkiti Ogura (1884-1937) remet au goût du jour la méthode initiée par F. Souillagouët. Son approche est différente puisqu'il aboutit à la formulation de Souillagouët par un raisonnement algébrique (voir annexe 1-1) et non géométrique tout en choisissant de faire apparaître la latitude du pied de la hauteur sphérique, qu'il note K, et non plus sa colatitude β (figure 8-1) ; il élargit ensuite les intervalles d'argumentation qui passent de 15' (ou 30') à 1° ; enfin, Ogura préconise l'utilisation des tables ABC pour calculer l'azimut. Les tables d'Ogura paraissent au Japon en 1920, sous le titre de « New Altitude and Azimuth Tables », au sein d'un recueil de tables de navigation. Il est difficile de savoir si Ogura connaissait l'ouvrage de Souillagouët et on ne se prononcera pas sur ce sujet ; quoi qu'il en soit, le lourd volume de notre précurseur se trouve maintenant

transformé en un document de travail commode – la table principale occupe 18 pages – incluant une table d'azimut éprouvée d'usage beaucoup plus aisé que la table III figurant dans les tables du point auxiliaire de Souillagouët.

La publication des tables de Sinkiti Ogura marque la renaissance du concept initié par Fernand Souillagouët une trentaine d'années plus tôt et l'origine d'une suite d'ouvrages, tous construits sur le même modèle, dont on propose un inventaire et les caractéristiques principales en annexe 8-1.

L'engouement britannique :

Les Britanniques s'empareront des travaux d'Ogura dès leur publication. C'est H. B. Goodwin qui en fera la promotion dans le Nautical Magazine en 1921 et proposera que ces tables soient intégrées aux recueils de tables de Inman et de Norie, ce qui sera fait, pour ces dernières, en 1924 sous le titre de « Short Method for Zenith Distance » puisque les tables, appelées familièrement « A and K Tables », conduisent aux logarithmes des cosécantes des distances zénithales au lieu de ceux des sécantes de la hauteur. En 1922, William M. Smart, professeur d'astronomie à Cambridge puis Glasgow, et Francis N. Shearme, officier de la Royal Navy, publient les « Position Line Tables » qui reprennent exactement – à la symbolisation près – la formulation de Souillagouët. Ces tables ne seront intégrées aux « Inman's Nautical Tables », réglementaires dans la Royal Navy, qu'au début des années 1940. La pratique de la méthode d'Ogura se développera donc principalement chez les officiers de la marine marchande britannique pour lesquels les tables de Norie constituent l'un des outils de calcul usuel.

Il faudra ensuite attendre 1938 pour voir réapparaître en Grande-Bretagne de nouvelles tables construites sur le procédé de calcul initié par Souillagouët et modernisé par Ogura. Entre temps, le concept s'est exporté aux États-Unis où il a inspiré plusieurs émules, et non des moindres.

Les publications américaines :

Le premier à s'intéresser aux travaux de Souillagouët et Ogura fut Philip Van Horn Weems (1889-1979), officier de l'US Navy. Personnage hors du commun[24], il termine sa formation à l'US Naval Academy d'Annapolis en 1912 et sert dans l'US Navy jusqu'en 1930. Il fonde ensuite la société « The Weems System of Navigation » dont la vocation est simultanément la conception et le développement d'outils de navigation et de calcul, la publication d'ouvrages techniques et la formation. P. V. H. Weems reprend du service actif en 1942 et fait fonction de commodore de convoi ; il quitte le service en 1946 et se consacre à des activités liées à l'expertise, l'enseignement et la recherche en navigation aérienne, maritime et spatiale. C'est l'un des co-fondateurs de l'Institute of Navigation US en 1945.

P. V. H. Weems est l'auteur de nombreux travaux et publications dont le « Weems Line of Position Book » (voir annexe 8-2) dont la première édition est publiée en 1927. Cet élégant petit livret d'une quarantaine de pages reprend en première partie la table d'Ogura, avec un intervalle d'argumentation de 1°, et en seconde partie une table des logarithmes des sécantes à 5 décimales dont l'intervalle d'argumentation est de 1'. L'azimut de l'astre est évalué à l'aide du diagramme d'Armistead Rust figurant à la fin du document. Ce diagramme, construit à partir de la formule donnant l'azimut par l'heure et la hauteur (analogie des sinus), sera étudié au chapitre 12 consacré aux méthodes graphiques. Le document est léger, d'un format commode (25 cm sur 15 cm) et est conçu simultanément pour la navigation maritime et aérienne. Il est de plus servi par une excellente typographie et une qualité de papier à toute épreuve.

En 1928, un autre officier de l'US Navy, Joseph Y. Dreisonstok publie « Navigation Tables for Mariners and Aviators », répertorié HO208 dans la nomenclature du service hydrographique américain (voir annexe 8-3). L'ouvrage comporte essentiellement deux tables, repérées I pour la table principale et II pour celle des logarithmes des rapports trigonométriques. Celles-ci sont suivies d'un ensemble de tables courantes de navigation et

[24] Pour de plus amples informations sur la biographie de P. V. H. Weems, on se reportera à l'article de G. D. Dunlap cité en bibliographie.

d'instructions d'emploi assez touffues relatives au traitement de divers problèmes de navigation. La présentation est d'une qualité comparable à celle du « Weems Line of Position Book », le format est sensiblement identique, le nombre de pages passant à une bonne centaine. L'ensemble reste malgré tout d'un maniement aisé dans l'espace restreint de l'habitacle d'un avion. La table I donne, en fonction de valeurs entières de la latitude et de l'angle au pôle, l'arc noté β, les logarithmes des sécante et cosécante de l'arc noté b et l'angle A_{z1}. La table II donne les logarithmes des cosécantes et cotangentes de l'argument. L'ensemble permet de trouver la hauteur et l'angle A_{z2}. L'azimut résulte d'une somme ou d'une différence, selon le cas de figure, entre les angles A_{z1} et A_{z2}. Malgré une relative complexité, notamment au niveau des règles de nom (N ou S) que Dreisonstok affecte à β, A_{z1} et A_{z2}, ces tables furent populaires aux USA et firent l'objet de nombreuses rééditions puis de publications commerciales après l'arrêt de leur diffusion par le service hydrographique américain.

C'est ensuite en 1931 que John E. Gingrich, également officier de l'US Navy, publie « Aerial and Marine Navigation Tables » qui combine la formulation d'Ogura et celle des tables d'azimut de type ABC (voir annexe 8-4). La présentation du document, d'une soixantaine de pages, est équivalente aux productions précédentes. Bien que d'un emploi très commode, notamment pour le calcul d'azimut, les tables de Gingrich ne semblent pas avoir été rééditées. À l'image des précédentes, ces tables sont conçues pour la navigation maritime et aérienne et la qualité technique du document reste excellente.

Enfin, en 1942, Arthur A. Ageton, officier de l'US Navy et professeur de navigation à l'US Naval Academy d'Annapolis publie « Manual of Celestial Navigation ». Ce petit ouvrage n'est pas un manuel de navigation astronomique comme son titre semble l'indiquer mais un recueil de tables de navigation permettant le calcul des éléments d'une droite de hauteur selon deux méthodes, la première relevant d'une formulation originale imaginée par Ageton et destinée à être appliquée à partir du point estimé ; cette méthode fit l'objet d'une première publication en 1931 sous la référence HO211 du service hydrographique (voir chapitre 9). La seconde s'inscrit dans la continuité des procédés initiés par Souillagouët et Ogura et permet le calcul de la hauteur et de l'azimut à partir d'un point auxiliaire. La table I donne les mêmes éléments que la table d'Ogura ainsi que l'angle noté A_{z1} et la table II donne les logarithmes des sécante et cosécante de l'argument qui permettent le calcul de la hauteur et de l'angle A_{z2}, l'azimut de l'astre étant ensuite obtenu par somme ou différence, selon le cas de figure, des angles A_{z1} et A_{z2}. On remarque que la démarche est sensiblement équivalente à celle proposée par Dreisonstok mais la formulation est différente. Les intervalles d'argumentation de la table I restent de 1° ; l'intervalle d'argumentation de la table II est de 0,5', permettant d'éviter, le cas échéant, l'interpolation sur la hauteur comme indiqué ci-après.

Retour en Europe :

Le premier à reprendre l'idée, du côté européen, semble avoir été le portugais J. Carlos Pinto, capitaine au long cours, qui publie en 1933, à Fayal, « The Simplex Navigation and Avigation Tables ». Cet ouvrage, destiné, comme son titre l'indique, à la navigation maritime et aérienne, contient l'ensemble des tables usuelles de navigation dont les tables I et II d'Ogura et les tables ABC. Leur particularité essentielle réside dans l'argumentation de la table I dont l'intervalle est de 15', limitant ainsi la distance entre points estimé et auxiliaire ; on y gagne évidemment en précision mais l'ouvrage atteint alors presque 380 pages.

En 1937, la marine allemande reprend, avec les F-Tafel de la Deutsche Seewarte, la formulation de Souillagouët avec un intervalle d'argumentation de 1°. Un procédé original, qui n'est malheureusement pas des plus simples, est retenu pour le calcul d'azimut (voir annexe 8-5). La polémique autour du point auxiliaire existait aussi en Allemagne, notamment du côté de l'enseignement maritime commercial, aussi deux petites tables ont été ajoutées permettant de corriger la hauteur calculée à partir du point auxiliaire pour obtenir celle qui aurait été calculée à partir du point estimé. Ces tables allemandes, conçues exclusivement pour la navigation maritime, ont été reproduites par la marine italienne et éditées sous le titre de Tavole-F puis modifiées en 1947 et publiées sous celui de Tavole-H.

En 1938, c'est le mathématicien et astronome néo-zélandais Leslie J. Comrie (1896-1950), Superintendant du HM Nautical Almanac Office de 1930 à 1936, qui met au point un recueil de tables intitulé « Hughes' Tables for Sea

and Air Navigation » ; ce dernier est un scientifique de haut niveau, spécialiste de l'analyse numérique et pionnier du calcul mécanique par cartes perforées. L'initiative de la mise en chantier d'une nouvelle table résulte d'une suggestion faite par P. V. H. Weems lors d'un déplacement en Angleterre en 1936. Dans sa préface, L. J. Comrie indique qu'il n'a pas cherché à faire œuvre originale mais que son principal souci était de présenter des tables précises, clairement disposées, avec une typographie aérée identique à celle utilisée dans les publications relevant du Nautical Almanac, et accompagnées d'instructions d'emploi simples et aussi complètes que possible. Ces dernières occupent une cinquantaine de pages en début de volume et constituent simultanément un résumé concis des différentes notions nécessaires à la pratique de la navigation astronomique, un mode d'emploi des tables et un regard critique sur les différentes pratiques. On y trouve notamment énoncées les règles d'arrondi ainsi que des causes d'inexactitude rencontrées dans certaines tables : ainsi une table destinée à résoudre un problème de navigation avec 5 décimales doit être élaborée avec une table de logarithmes à 7 décimales au moins. Sur un plan plus pratique, L. J. Comrie précise que le navigateur aérien se doit de travailler à la minute d'arc près et le marin à la demi-minute près, indiquant que le dixième de minute d'arc ne se justifie pas ; il présentera donc une table des logarithmes des rapports trigonométriques à 5 décimales argumentée avec un intervalle de 0,5' que l'on utilisera sans interpoler. Enfin, sur la base d'une étude mathématique faite par W. M. Smart (voir en bibliographie), L. J. Comrie préconise une limite à l'emploi du point auxiliaire, dont les coordonnées conduisent directement aux arguments de la table principale, qui est de ne pas utiliser les observations d'astres dont la hauteur est supérieure à 75°, cette limite étant étendue à 80° pour la navigation aérienne. Concernant les tables proprement dites, L. J. Comrie utilise directement la formulation d'Ogura ; l'azimut est évalué par combinaison des deux angles A_{z1}, fourni directement en table principale, et A_{z2} que l'on calculera avec des logarithmes à trois décimales. Le recueil est ensuite enrichi d'autres tables : logarithmes des nombres à 4 décimales, latitudes croissantes, point estimé, corrections des hauteurs à l'usage des marins comme des aviateurs et tables diverses. L'ouvrage, qui totalise environ 230 pages, constitue donc un document de référence complet sous un volume raisonnable, à jour des dernières théories de calcul, notamment concernant les corrections de hauteur ; il a été réédité plusieurs fois, en 1943, 1944, 1946 et 1950.

En 1939, ce sont les capitaines au long cours anglais W. Myerscough et W. Hamilton qui publient « Rapid Navigation Tables ». Sous une présentation différente, ces tables sont identiques à celles de Gingrich. Comme pour les tables allemandes F-Tafel, on y trouve des éléments de réduction de la hauteur calculée pour se ramener au point estimé. Ces tables, populaires dans la marine marchande britannique, seront rééditées plusieurs fois jusqu'en 1965.

En 1945, les professeurs E. E. Benest et E. M. Timberlake publient en Grande-Bretagne « Astro-Navigation Tables for the Common Tangent Method ». Les formules de calcul de la hauteur sont celles utilisées par Ogura, la droite de hauteur étant construite à partir de deux points auxiliaires. Cette droite est une tangente à deux arcs de cercles centrés sur les points auxiliaires et dont les rayons sont égaux aux intercepts respectifs (voir la méthode de la tangente commune au chapitre 10). Il n'est donc pas nécessaire d'effectuer un calcul d'azimut.

Enfin, en 1949, J.-C. Lieuwen, professeur de mathématiques à l'école de navigation d'Amsterdam conçoit et calcule les « Kortbestek Tafel » puis en 1953 les « Record Tables » qui seront rééditées en 1957 et 1982. Ces tables, à quelques « astuces » de calcul près, sont d'une conception identique à celles de L. J. Comrie et étaient d'usage réglementaire à bord des bâtiments de la marine royale hollandaise ainsi que dans les écoles de la marine marchande.

Commentaires :

La méthode de calcul de la hauteur, mise au point par F. Souillagouët et simplifiée par S. Ogura, est particulièrement simple et économe en opérations comme en recherche dans les tables. On l'a écrit plus haut, il est difficile de faire plus simple tout en gardant un excellent niveau de précision grâce à l'emploi de logarithmes à 5 décimales, ce que tous les auteurs mentionnés ont mis en place. Les difficultés – et les complications qui en résultent – résident dans le calcul de l'azimut ; toutes les solutions ont été essayées avec plus ou moins de bonheur et, sans vouloir faire de classement de valeur, le plus simple nous paraît être la solution adoptée par S. Ogura et

quelques autres, dont P. V. H. Weems, qui consiste à utiliser un document spécialement dévolu au calcul d'azimut tel que le diagramme de Rust (ou celui de Weir, plus performant) ou des tables de type ABC (ou Perrin) par exemple. Dans ce domaine, un bon compromis a été trouvé par J. E. Gingrich qui a su allier en trois tables et de façon commode les tables de type Ogura et ABC. Il y a enfin lieu, pour terminer, de remarquer les travaux d'Ageton et de Comrie qui proposent une table des logarithmes des rapports trigonométriques argumentée avec un intervalle d'une demi-minute évitant ainsi les interpolations si on opte pour une expression du résultat à 0,5' près. L. J. Comrie a également prononcé un avis solidement argumenté sur la validité de l'emploi du point auxiliaire qui vient ici sérieusement simplifier les calculs … mais il semble que son emploi reste d'une certaine façon « coupable » puisque plusieurs auteurs font figurer dans leurs ouvrages des éléments permettant la réduction, par le calcul, de la hauteur trouvée au point estimé ; l'intérêt d'une méthode de calcul simplifiée (ou short method) se trouve alors amoindri par ce dernier calcul qui vient inutilement alourdir le processus alors qu'il est très simple de déterminer graphiquement l'intercept à partir du point estimé, après tracé de la droite de hauteur sur le canevas selon les éléments auxiliaires.

Reste une dernière interrogation. On a constaté que ces tables étaient d'un format commode, peu volumineuses, précises et faciles d'utilisation ; elles ont été conçues en France par F. Souillagouët, l'idée s'est exportée ou a été redécouverte ailleurs, mais n'est jamais revenue au pays d'origine. L'insuccès de ces tables au moment de leur publication en France (1891) peut s'expliquer simplement : trop volumineuses à cause d'un intervalle d'argumentation faible, calcul de l'azimut délicat et recours nécessaire à une autre table de logarithmes pour les premières éditions ; ajoutons à cela l'usage du point auxiliaire sujet, on l'a déjà vu, de nombreuses polémiques. Simplifiées par S. Ogura puis copiées, avec ou sans modifications, dans de nombreux pays anglo-saxons dès les années 1920, il est difficile de croire que ces tables ne tombèrent jamais entre les mains d'un officier français qui aurait pu en apprécier les qualités et en faire la publicité ou mieux, se les approprier en vue d'une édition française ; cela aurait été un juste retour des choses. Il est probable qu'à l'époque nous étions encore trop attachés à notre point estimé ; ajoutons à cela le possible refus d'avoir l'impression de perdre en précision de calcul du fait de l'utilisation de documents souvent conçus également pour la navigation aérienne, nécessairement plus expéditive.

Annexe 8-1 : Essai d'inventaire et caractéristiques principales des tables de type Souillagouët-Ogura.
Annexe 8-2 : Line of Position Book, P. V. H. Weem.
Annexe 8-3 : Navigation Tables for Mariners and Aviators, HO208, J. Y. Dreisonstok.
Annexe 8-4 : Aerial & Marine Navigation Tables, J. E. Gingrich.
Annexe 8-5 : F-Tafel, calcul de l'azimut.

Chapitre 9

DÉCOMPOSITION EN TRIANGLES RECTANGLES

SUITE et FIN

Introduction :

A la fin des années 1920, les différentes possibilités de résolution d'un triangle sphérique quelconque par décomposition en deux triangles rectangles n'ont pas encore toutes été exploitées et les recherches vont se poursuivre. Ce chapitre est consacré à l'examen d'innovations, évitant pour certaines le recours au point auxiliaire, de perfectionnements, ou de simples variantes de méthodes déjà existantes ainsi que d'une ultime solution, originale et performante, qui, malheureusement, en restera à l'état de projet.

Les Tables Nautiques de Charles Cornet :

Charles Cornet (1882-1954) est entré à l'École navale en 1900 et opte rapidement, semble-t-il, pour le professorat d'hydrographie ; on note qu'il succède à Charles Bertin à la tête de l'École nationale de navigation de Saint-Malo de 1922 à 1925 ; il prend ensuite la direction des études du navire école Jacques-Cartier de la Compagnie Générale Transatlantique. Il est l'auteur d'un cours de cosmographie et navigation en trois volumes (1925) ainsi que de plusieurs ouvrages techniques relatifs aux mathématiques, à la mécanique et à l'électricité. En 1928, il publie chez Gauthier-Villars les « Tables Nautiques » ; ces tables, accompagnées de leurs instructions d'emploi, sont réunies dans un opuscule d'environ 35 pages que Ch. Cornet présente comme suit dans son avertissement :

> « *Les calculs nautiques que l'on effectue couramment à la mer sont :*
>
> 1. *Des calculs approchés, au degré près, tels que l'azimut des astres, le problème de l'identification, la route et la distance orthodromiques ;*
> 2. *Les calculs plus précis, à la minute de degré près, relatifs à la droite de hauteur.*
>
> *Les deux tables de cet ouvrage permettent de résoudre le triangle sphérique avec sûreté et rapidité par décomposition en deux triangles rectangles ; elles ont été étudiées pour éviter les erreurs, faciliter les entrées, éviter de feuilleter.*
>
> *La table I, qui contient 6 pages, permet d'effectuer tous les calculs approchés.*
>
> *La table II, qui contient 9 pages, permet le calcul logarithmique précis de la droite de hauteur, le point déterminatif pouvant être obtenu par l'une quelconque des méthodes en usage.*
>
> *Ces deux tables avec celles que contiennent les Éphémérides nautiques permettent d'effectuer tous les calculs utiles à la mer.*
>
> *Une petite table en une page a été ajoutée pour le calcul rapide des circumméridiennes*. »

En fin de document figure une notice relative à un diagramme d'azimut que l'on présentera au chapitre 12.

Table I : elle permet de résoudre les formules du triangle rectangle, dites du premier groupe par Ch. Cornet, issues de la règle du pentagone de Neper (voir annexe 1-1) indiquant que le cosinus d'un côté du pentagone est égal au produit des cotangentes des côtés adjacents. Ainsi, dans cette table, la cotangente d'un arc est égale au produit de la cotangente de l'argument pris en haut par le cosinus de l'argument pris à gauche, avec possibilité, grâce à des échelles complémentaires, de prendre l'argument en bas (au lieu du haut) s'il intervient par sa tangente, ou à droite (au lieu de la gauche) s'il intervient par son sinus. La table est à double argument, exprimés en degrés entiers ou en heures en minutes avec un intervalle variable, l'élément calculé étant donné au dixième de degré près. Elle sera utilisée notamment pour le calcul d'azimut par l'heure ; trois entrées successives dans les tables seront alors nécessaires, soit autant qu'avec les tables de type Perrin ou ABC. On remarquera que le Carnet Bertin, publié la même année, ne demande que deux entrées successives dans les tables pour arriver au même résultat.

Table II : elle permet de résoudre les formules du triangle rectangle, dites du second groupe, issues de l'autre règle du pentagone stipulant que le cosinus d'un côté est égal au produit des sinus des côtés opposés. Cette table II est à simple argument, exprimé principalement de 0° à 90° et comportant des échelles secondaires d'arcs complémentaires et supplémentaires avec un intervalle de 1' ; elle donne les cologarithmes des sinus et des cosinus de l'argument (ou les logarithmes des cosécantes et sécantes, ce qui revient au même) multipliés par 10^5 (équivalent à 5 décimales). Ces dispositions, déjà rencontrées avec certaines tables du type Souillagouët-Ogura, permettent d'éviter les caractéristiques négatives et l'écriture des virgules et des zéros inutiles. Les tables sont ainsi d'usage général et permettent de résoudre n'importe quel triangle sphérique rectangle.

Concernant la recherche des éléments de la droite de hauteur, Ch. Cornet utilise la décomposition du triangle de position selon la hauteur issue de l'astre en utilisant exclusivement la table II. L'exposé de la méthode de calcul figure en annexe 9-1 et demande la recherche et l'écriture de 7 logarithmes, d'effectuer 2 sommes et 2 différences de logarithmes et de rechercher deux arcs en lecture inverse, la hauteur et l'azimut ; les règles de signe et de détermination de l'azimut sont limitées. Le calcul est cependant assez rapide avec un minimum d'entraînement et adoption d'un type de calcul standard permettant de limiter les opérations de feuilletage. Charles Cornet reste assez discret sur la question des interpolations, indiquant simplement à la fin de ses instructions :

> « *Dans tous les cas, la hauteur H est obtenue à la minute près, et même à quelques dixièmes près, si l'on se donne la peine d'interpoler à vue*. »

On reviendra sur cette question à propos des tables de A. A. Ageton, identiques dans leur principe, à celles de Ch. Cornet. La table II de Ch. Cornet permet de trouver, après adaptation des formules, les éléments de la droite de hauteur suivant les trois méthodes : Marcq de Saint-Hilaire, Lalande et Borda, à partir des coordonnées de n'importe quel point de calcul, notamment celles du point estimé ce qui constitue son principal avantage.

La méthode d'Ageton :

La méthode de calcul conçue par Arthur A. Ageton (1900-1971), officier de l'US Navy[25], repose sur une décomposition du triangle de position en deux triangles rectangles selon la hauteur sphérique issue de l'astre. Les tables qui en résultent furent publiées en 1931 par le US Navy Hydrographic Office sous le titre « Dead Reckoning Altitude and Azimuth Tables » et répertoriées sous la référence HO211, l'ensemble constituant un livret d'une cinquantaine de pages au format réduit (16 cm sur 23,5 cm).

L'analyse montre (voir annexe 9-1) que la méthode développée par Ageton est quasi-identique à celle de Cornet à partir des formules dites du 2e groupe : elles ne diffèrent que par l'arc auxiliaire représentatif de la hauteur sphérique du triangle dont Cornet emploie le complément, ce qui entraîne la permutation des rapports sinus et cosinus de cet arc. Les formules utilisées par Ageton sont en tous points équivalentes à celles de Cornet, utilisant les seuls rapports trigonométriques cosinus et sinus inversés, soit sécantes et cosécantes ; la série des quatre formules utilisées a été baptisée « Ageton's formulae » dans les divers ouvrages de navigation américains de l'époque.

La table d'Ageton HO211 est cependant plus développée que son homologue de Cornet : d'une part, l'argumentation est plus serrée, l'intervalle étant réduit à 0,5', et, d'autre part, celle-ci est plus étendue puisque la table est clairement argumentée jusqu'à 180°, sans faire appel à des arcs supplémentaires. Comme la table II de Ch. Cornet, celle d'Ageton donne les logarithmes des sécantes et cosécantes de l'argument (ou les cologarithmes des cosinus et sinus) multipliés par 10^5 ; il n'y a donc pas de différence dans le principe, notamment de par le fait que le calcul peut s'effectuer à partir des coordonnées de n'importe quel point, tout particulièrement celles du point estimé, ce qui fut, aux États-Unis, l'une des causes du succès de la méthode d'Ageton. Notons au passage que le concept et la formulation seront repris en 1936 au Portugal par A. Fontoura da Costa et F. Penteado dans leur « Tàbuas de Altura et Azímute », avec un intervalle d'argumentation de 1'.

[25] Il terminera sa carrière dans l'US Navy au grade de contre-amiral.

Cependant, en 1942, ne voulant sans doute pas être en reste par rapport à d'autres auteurs américains (Weems, Dreisonstok et Gingrich notamment), Arthur A. Ageton publie le « Manual of Celestial Navigation » qui regroupe le contenu de la table HO211, qui permet le calcul des éléments de la droite de hauteur à partir du point estimé, et deux tables permettant le calcul de ces mêmes éléments par rapport à un point auxiliaire selon la méthode Souillagouët-Ogura ; le navigateur a ainsi le choix, à partir d'un même document, de la méthode et du point de calcul, estimé ou auxiliaire.

De toute évidence, la méthode d'Ageton fut d'usage très courant à bord des navires américains. La table HO211 a en effet été publiée sans discontinuer par le service hydrographique US jusqu'en 1971 puis a été intégrée, dans sa totalité, dans le tome II du Bowditch (édition 1975), sous le titre de « Table 35, the Ageton Method » ; elle a aussi été reproduite dans plusieurs cours de navigation et modifiée. On relève tout d'abord la version simplifiée par Allan E. Bayless, neurochirurgien et expert reconnu[26] en navigation astronomique, qui revient – probablement sans le savoir – à la forme donnée par Ch. Cornet, en limitant l'argumentation à 90° et élargissant l'intervalle à 1'. En 1992, Mike Pepperday, auteur de logiciels de navigation[27], publie la « Table S » qui n'est autre qu'une table II de Cornet (ou d'Ageton simplifiée) dans laquelle les logarithmes des sécantes et cosécantes sont multipliés par une constante (voir annexe 9-1) afin de satisfaire à des impératifs de mise en page.

Le reproche principal qui fut fait à la méthode d'Ageton est l'imprécision du résultat lorsque l'angle au pôle est voisin de 90°. On note en effet, dans les premières éditions du document HO211 :

> « *When the hour angle approaches 90°, a significant error of 1 or 2 miles may occur when computing the altitude of celestial bodies. It is a good plan to discard those sights, where the value of K*[28] *is found to lie between the limits of 87° 30' and 92° 30'* ».

Une certaine méfiance s'est ensuite installée à partir de 1942 où il a été constaté que l'avertissement ne figurait plus dans le Manual of Celestial Navigation et était également absent de certains manuels de navigation explicitant la méthode d'Ageton. Un article paru dans le n° 331 du volume 56 (1944) de « Publication of the Astronomical Society of the Pacific », signé de Samuel Herrick[29] du Dept of Astronomy de l'Université de Californie, fournit une analyse critique sur le niveau de précision du résultat trouvé, dans les conditions d'utilisation données par Ageton. S. Herrick y indique tout d'abord que les tables d'Ageton sont devenues rapidement d'usage courant du fait d'un mécanisme d'utilisation simple à retenir, d'un calcul fondé sur l'utilisation du point estimé et d'un intervalle d'argumentation de 0,5' qui a renforcé l'idée de l'inutilité de l'interpolation. Il conduit ensuite une analyse qui l'amène à conclure :

- que la source principale d'erreur provient de la détermination du logarithme de la sécante de l'arc de hauteur sphérique à partir du logarithme de sa cosécante en négligeant l'interpolation ;
- que l'erreur maximale sur la hauteur calculée, variable selon les valeurs de déclinaison et de latitude, peut atteindre 30', pour un angle au pôle voisin de 90°, si l'on néglige les interpolations et que cette erreur maximale pouvait atteindre 6' aux bornes de l'intervalle précisé par Ageton ;
- qu'enfin l'interpolation ci-dessus pouvait seule réduire l'incertitude à 2' lorsque l'arc noté K est égal à 90° et 0,8' lorsqu'il vaut 80°.

Ces conclusions ne semblent finalement pas avoir assombri la popularité de la méthode d'Ageton dont l'emploi s'est pérennisé. Plus récemment[30], une étude statistique basée sur la simulation d'un très grand nombre de calculs de hauteur (l'auteur évoque le million de tests aléatoires), fait état d'une erreur quadratique moyenne de 1,23' dont 14,6 % excèdent la demi-minute et dont le maximum peut atteindre 31,3', ceci sans interpolation. Dès lors que l'on interpole au passage de la cosécante à la sécante ci-dessus, l'erreur quadratique moyenne tombe à 0,55', et les erreurs supérieures à la demi-minute ne représentent plus que 8,8 % des résultats mais, contrairement aux affirmations de S. Herrick, la valeur maximale de l'erreur atteint 25,0'. Il ressort également des différentes études que l'erreur est fonction des trois paramètres, angle au pôle, déclinaison et latitude et qu'il est impossible d'établir

[26] Il est cité dans la préface du volume II du Bowditch pour sa participation à la relecture de l'édition 1975 de l'ouvrage.
[27] Concepteur du Merlin Navigation Computer dans les années 1980.
[28] K représente la latitude du pied de la hauteur sphérique sur le méridien de l'observateur (voir annexe 9-1).
[29] Samuel Herrick est également l'un des membres fondateurs de l'Institute of Navigation US en 1945.
[30] Etude « HO211 sight reduction accuracy », faite en juin 2016 par Paul Hirose, parue sur le forum NavList/Fer3.

une règle simple. La sûreté du résultat impose donc l'interpolation dans tous les cas et le changement de méthode de calcul dès lors que l'angle au pôle est trop proche de 90°. Pour ce dernier cas, un palliatif est apporté par Donald H. Sadler (1908-1987), qui fut Superintendant du Nautical Almanac Office de 1936 à 1971, et qui mit au point une formulation (voir annexe 9-1) permettant le calcul de la hauteur avec la table HO211, sans risque d'imprécision. La procédure en est expliquée dans la table de Bayless, accompagnée d'un graphique repéré en angle au pôle et déclinaison indiquant la zone dans laquelle la méthode d'Ageton est inapplicable et où il faut employer la formule de Sadler.

Table de M. R. Pierce, HO209 :

Les « Position Tables for Aerial and Surface Navigation » furent mises au point par M. R. Pierce, officier de l'US Navy, alors qu'il était navigateur à bord du dirigeable USS *Los Angeles* en 1925. Elles furent soumises à l'approbation du service hydrographique US en 1928 et publiées en 1931 sous la référence HO209, l'ensemble constituant un ouvrage d'environ 220 pages.

La formulation repose sur une décomposition du triangle de position de l'astre en deux triangles rectangles selon la hauteur sphérique issue de l'astre et sur l'usage successif de deux tables.

Table 1 : donne l'angle au pôle de l'astre et la latitude du pied K de la hauteur sphérique correspondant à des valeurs entières de l'arc représentatif de cette hauteur et à des valeurs de déclinaison comprise entre 0° et 30°, argumentée tous les dixièmes de degrés entiers. Il sera nécessaire d'interpoler l'angle au pôle et la latitude du point K en fonction de la valeur considérée de déclinaison entre deux valeurs argumentées. Pour 23 étoiles principales sélectionnées, on utilisera la table 1A dans laquelle l'argument déclinaison est remplacé par le nom de l'étoile, évitant ainsi l'interpolation. Les valeurs de déclinaison utilisées pour effectuer les calculs sont celles de 1935, l'auteur indiquant qu'il n'y a pas d'erreurs significatives à craindre avant 1941.

Table 2 : donne directement la hauteur et l'azimut en fonction des deux côtés du second triangle rectangle exprimés en degrés entiers de 0° à 89°.

La méthode de calcul nécessite l'utilisation d'un point auxiliaire dont la latitude, combinée à la latitude du point K, correspond à un argument de la table 2 et dont la longitude conduit à l'angle au pôle relevé en table 1 (ou 1A), ces deux coordonnées étant aussi proches que possible de celles du point estimé.

Le calcul est particulièrement expéditif pour les étoiles sélectionnées puisqu'il n'y a aucune interpolation à faire. Il est par contre fastidieux dans le cas du traitement d'observations d'autres astres puisque le document ne donne aucune aide à l'exécution des interpolations. De toute évidence, les tables HO209 ont été conçues essentiellement pour la navigation aérienne où l'arrondi de la déclinaison au dixième de degré serait admissible ; le calcul est alors très rapide quel que soit l'astre observé. Le Bowditch confirme par ailleurs que ces tables furent peu utilisées en navigation maritime.

Tables LSD de Jean-Émile Le Soudéer :

En 1978, J.-É. Le Soudéer, ingénieur hydrodynamicien, publie un élégant ouvrage regroupant une présentation et un bref historique de la théorie de la droite de hauteur, des éléments de calcul approché d'éphémérides du Soleil et des principales étoiles et une table de calcul des éléments de la droite de hauteur qu'il intitule LSD. À l'analyse, cette table se révèle identique, dans sa conception et sa présentation, aux tablettes Bertin de 1919 et 1929 permettant de résoudre un triangle sphérique rectangle connaissant un angle et la cohypoténuse. La table LSD est moins précise que les tablettes Bertin du fait d'un intervalle d'argumentation de 1° (au lieu de 20'), les résultats étant arrondis à la minute d'arc près (au lieu du dixième de minute). Le principe de l'interpolation est identique.

Tables 1-2-3 de Paul Domenjoud :

Ancien élève de l'École des Mines (promotion 1938), Paul Domenjoud a enseigné la navigation astronomique à un public de plaisanciers dans le cadre du « Groupe International de Croisière » ainsi que, probablement, dans d'autres structures comme les clubs nautiques. Son expérience, et ses idées, l'ont conduit à concevoir la table qu'il a publiée à compte d'auteur en 1984. Il s'est également intéressé à la conception d'éphémérides simplifiées réunies dans un livret annuel de volume réduit. Dans un article paru en 1990 dans la revue de l'Institut français de Navigation, Paul Domenjoud écrit :

> « *Je fais travailler mes auditeurs principalement sur des photocopies d'une page journalière des E.N., d'une ou deux pages des tables d'interpolation et des tables de corrections de la hauteur observée. Pour déterminer hauteur et azimut au point estimé, une minorité s'intéresse à la calculette. Tous veulent savoir utiliser des tables, pour leur sécurité, et ils ont raison. Je leur montre comment se servir des tables HO249, mais je leur fournis la table 1-2-3 pour qu'ils puissent faire des exercices à la maison, sans les engager dans des dépenses doublant le prix du cours* ».

La table 1-2-3 se présente sous la forme d'un opuscule en papier glacé de format carré (20 sur 20 cm), d'environ 25 pages, à la typographie claire et aérée.

La formulation utilisée par P. Domenjoud repose sur une décomposition du triangle de position de l'astre en deux triangles rectangles selon la hauteur sphérique issue de l'astre, les deux triangles étant successivement résolus en utilisant des formules dans lesquelles interviennent les produits ou quotients des rapports trigonométriques sinus, cosinus et tangente (voir annexe 9-2) ; la solution adoptée sera donc ici logarithmique, à l'image de la table d'Ageton, mais avec une formulation différente évitant l'imprécision lorsque l'angle au pôle est voisin de 90°. La table de Domenjoud est à simple argument, exprimé de 0° à 90° avec un intervalle de 1' et donne trois éléments représentatifs des cologarithmes du sinus, du cosinus et de la tangente de l'argument soit encore, ce qui est équivalent, des logarithmes de la cosécante, de la sécante et de la cotangente de l'argument. En fait, afin d'éviter les caractéristiques négatives et de respecter un certain format, les logarithmes népériens des sécantes et cosécantes sont multipliés par une constante de façon à ce que les nombres correspondants figurant dans la table restent à l'intérieur d'un intervalle [0, 50.000] ; le troisième élément calculé résulte de la différence entre les deux premiers auquel on ajoute la constante 50.000, sa valeur numérique reste ainsi toujours positive et inférieure à 10^5.

Le calcul de la hauteur et de l'azimut requiert l'écriture de huit logarithmes, deux additions et deux soustractions de logarithmes, une addition algébrique de deux arcs et l'extraction de trois arcs en lecture inverse de la table ; les règles de signes et de détermination sont simples et le calcul facile après un peu de pratique et adoption d'un type standard. S'agissant d'un calcul par logarithmes, sans élément pré-calculé, la détermination des éléments de la droite de hauteur peut se faire à partir des coordonnées de n'importe quel point, notamment celles du point estimé, ce qui constitue l'un des avantages de la table de Paul Domenjoud. La précision du calcul de la hauteur est de l'ordre de la minute, sans interpolation, sauf, exceptionnellement, à vue.

NAO Sight Reduction Tables :

Ces tables ont été conçues par le contre-amiral Thomas D. Davies de l'US Navy et publiées en août 1984 sous le titre « Davies Concise Tables for Sight Reduction ». Selon Geoffrey Kolbe, auteur de « Long Term Almanac 2000-2050 » dans lequel figure lesdites tables, l'amiral Davies aurait légué ses droits au Nautical Almanac Office (NAO) au nom de la Navigation Foundation et au bénéfice de tous les marins. En conséquence, et depuis 1989, ces tables sont annexées au Nautical Almanac publié chaque année conjointement par Her Majesty's Nautical Almanac Office (UK Hydrographic Office) et The Nautical Almanac Office (US Naval Observatory) ; elles sont désormais intitulées « NAO Sight Reduction Tables ». Dans le Nautical Almanac, elles occupent 36 pages, instructions d'emploi et type de calcul inclus.

Ces tables sont conçues pour calculer les éléments de la droite de hauteur à partir d'un point auxiliaire et d'une décomposition du triangle de position selon la hauteur sphérique issue du zénith ; elles sont à double argument, un angle et la cohypothénuse, et donne en résultat les deux côtés de l'angle droit, à la minute près, et l'autre angle, au dixième de degré près. Les arguments sont des nombres entiers de degrés, variant de 0° à 90° avec un intervalle

de 1°. À l'analyse, on constate qu'elles sont identiques – à l'argumentation et à la présentation des résultats près – à la Tablette de Point Sphérique de Charles Bertin dans le cas de la résolution du problème selon la « décomposition Souillagouët » et que les deux interpolations obligatoires sont exécutées de la même façon, à l'aide d'une table d'usage cependant plus simple dans les tables NAO que dans la Tablette (voir chapitre 5 et annexe 5-2).

Un projet de Pierre Hugon :

Le professeur d'hydrographie Pierre Hugon a consacré une très large partie de sa vie à l'étude des différents problèmes de navigation et à leur enseignement. Expert dans le domaine des tables de navigation, il présente dans la revue de l'Institut français de Navigation de juillet 1954 un nouveau projet destiné à calculer rapidement les éléments de la droite de hauteur. Après avoir longuement cherché et étudié les solutions déjà existantes P. Hugon a choisi d'utiliser la décomposition du triangle de position en deux triangles rectangles selon la hauteur sphérique issue du zénith. Il énonce comme suit le principe général de la nouvelle table :

> « *Le but que nous poursuivions avec ténacité était, avant tout, d'éviter tout feuilletage et de faire en sorte que, si deux entrées étaient inévitables, elles se fassent à la même ouverture du volume. Les deux entrées devaient donc se faire sur un argument commun aux deux triangles rectangles qui ne pouvait être que la hauteur appelée ici g_0 du triangle de position. Pour n'avoir qu'une interpolation il ne fallait introduire la déclinaison qu'à la deuxième lecture et adopter comme sommet du triangle de position résolu le point de longitude lu dans la table*[31]*. Enfin dans notre projet, la formule est d'un type unique, commun aux deux entrées et aux quatre lectures principales (…) Enfin, les deux parties de l'azimut sont obtenues, lors des deux lectures, par une formule commune en tangentes (…) Comme le mode d'emploi et les exemples présentés plus loin peuvent le faire ressortir, la manipulation de cette table est extrêmement rapide :* ***les arcs fournis par les deux entrées sont écrits directement à la lecture, sans interpolation intermédiaire***. »

Le calcul sera basé sur la définition d'un point auxiliaire qui restera proche du point estimé compte tenu de l'adoption d'un faible intervalle d'argumentation (15').

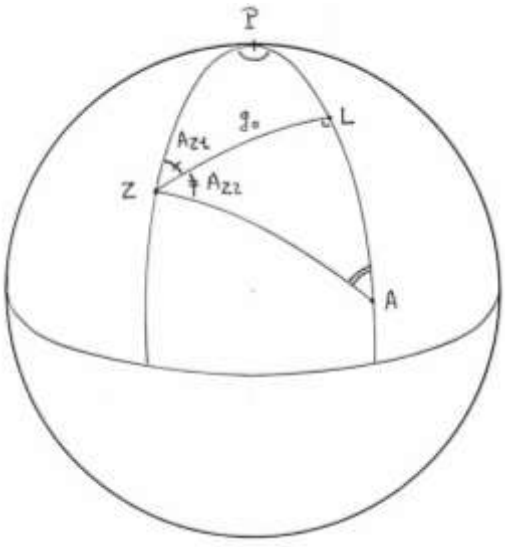


Fig : 9-1

Le premier élément à déterminer est la valeur de l'arc g_0, hauteur sphérique du triangle (figure 9-1). Une première table, dite table index, permet d'en trouver la valeur arrondie à 15' près en fonction de la latitude et de l'angle au pôle estimés. On utilise ensuite la table principale, dont les arguments d'entrée sont la cohypoténuse (latitude ou hauteur) et un côté (la hauteur sphérique g_0), et qui donne en résultat les deux angles non droits et le second côté. On effectuera donc une première entrée avec g_0 et la latitude du point auxiliaire correspondant directement à un argument vertical de la table ; cette première entrée donne directement l'angle au pôle auxiliaire, l'angle en Z, A_{z1},

[31] C'est-à-dire la valeur d'angle au pôle lue dans la table.

et le côté PL ou, plus exactement son complément. On effectue ensuite une seconde entrée, pour la même valeur de g_0 (donc, à la même page), et de la hauteur auxiliaire H_a, valeur de cohypoténuse argumentée la plus proche de la hauteur vraie : on relève directement les valeurs de l'angle à l'astre A de l'angle en Z, A_{z2} et du complément du côté LA.

La combinaison des côtés PL et LA donne ensuite accès à la déclinaison auxiliaire D_a, peu différente de la déclinaison réelle de l'astre, la différence des déclinaisons et l'angle à l'astre permettant ensuite, à l'aide d'une table auxiliaire, de corriger la hauteur calculée. L'intercept final est la différence entre hauteur vraie et hauteur calculée corrigée. La procédure opératoire est exposée en détail en annexe 9-3.

L'argumentation de la table principale avec un intervalle de 15' assure d'obtenir un point auxiliaire toujours proche du point estimé – l'éloignement maximal est de moins de 11 milles – de même qu'un intercept toujours compatible avec les limites d'utilisation de la droite de hauteur puisqu'inférieur à 7,5' avant correction de la hauteur auxiliaire. Il est intéressant de donner à nouveau ici le point de vue de P. Hugon sur cette question du point auxiliaire :

> « *La question de la faveur du point auxiliaire n'est pas épuisée par les discussions. À la vérité, on ne peut ramener un quadrillage qu'à des coordonnées préparées à l'avance et sans méconnaître les bienfaits de l'estime qui, au fond, n'est qu'un fruit de l'imagination du navigateur, on peut admettre que le point auxiliaire est tout aussi satisfaisant que le point estimé à condition qu'il ne s'en éloigne pas trop, d'une part, pour éviter les constructions graphiques incommodes et, d'autre part, pour que de grands intercepts ne faussent pas, dans les régions de courbure, la position de la droite de hauteur. Ici, la latitude d'entrée et la longitude de l'astre*[32] *cherchée dans la table ne sont pas, dans presque tous les cas, plus éloignées que 7,5' d'arc des coordonnées de l'estime ; c'est dire que ce point auxiliaire peut faire figure d'une estime aussi maniable et vraisemblable que l'estime réelle*. »

Notons pour terminer que P. Hugon étudie également les limites de précision, notamment les conditions dans lesquelles le recours à un terme correctif de la hauteur du second ordre, donné dans une table spécifique, est nécessaire ; une autre correction est également prévue pour rectifier, le cas échéant, l'angle A_{z2} en fonction de l'écart en déclinaison.

L'ensemble des objectifs que l'auteur s'était fixé ont été atteints – limitation du feuilletage, lecture directe des éléments et respect de la précision requise – avec un ouvrage d'un volume raisonnable (255 pages prévues). Il subsiste cependant une unique interpolation finale, qui ne peut être éliminée mais qui s'effectue facilement à l'aide de la table auxiliaire (ou d'un carton d'interpolation). D'une manière générale, les diverses règles de signe à appliquer restent du domaine courant.

Commentaires :

Les solutions logarithmiques présentées dans ce chapitre ont l'avantage de pouvoir être développées à partir de n'importe quel point, notamment le point estimé. C'est ce qui fit le succès de la méthode d'Ageton aux États-Unis, malgré le handicap de l'imprécision lorsque l'angle au pôle est voisin de 90°. Ces solutions logarithmiques sont assez lourdes en calcul, entrées multiples dans les tables, sommes et différences de logarithmes et, là encore, on peut s'étonner de constater, toujours aux États-Unis, l'engouement pour la méthode d'Ageton, modernisée à la fin du XXe siècle par A. Bayless et M. Pepperdays, au détriment de la solution Souillagouët-Ogura qui y fut pourtant largement développée. La méthode de Paul Domenjoud est comparable, en procédure et temps de calcul, à celle d'Ageton et présente sur cette dernière l'avantage d'être applicable sans risque d'imprécision dans toutes les circonstances ; l'usage de cette méthode, née tardivement, semble être resté confidentiel et limité à la navigation de plaisance. Charles Cornet est surtout connu pour son cours de cosmographie et de navigation ainsi que pour son graphique d'azimut qui fera l'objet d'une présentation au chapitre 14 ; l'usage de ses tables, dont la seconde présente le même défaut que celle d'Ageton, semble aussi avoir été assez limité.

Les tables de M. R. Pierce, relativement peu adaptées à la navigation maritime, n'apportent rien de réellement nouveau. On saluera par contre l'initiative des services du Nautical Almanac, britannique comme américain, de faire figurer dans leurs éphémérides une table de calcul rapide de la hauteur et de l'azimut. Le choix s'est porté

[32] L'angle au pôle.

sur les tables de l'amiral Davies, équivalentes à une Tablette Bertin simplifiée ; le calcul est relativement simple, lié à des instructions d'emploi succinctes mais rigoureuses et à la fourniture d'un type de calcul. Outre la question des droits d'auteur, on peut se demander pourquoi ce choix sachant qu'il existe d'autres méthodes performantes plus économes en nombre de pages ; on pense notamment à la méthode Doniol en haversine, remise à l'honneur aux États-Unis accompagnée d'un diagramme d'azimut.

La table de Pierre Hugon, conçue à partir d'une heureuse sélection des formules du triangle rectangle, et qui fait de la hauteur auxiliaire un argument d'entrée (et non de sortie comme usuellement), réunit les avantages de l'interpolation unique et de l'argumentation rapprochée. On arrive sans doute ici au stade de perfectionnement ultime de ce type de table. Sans doute née trop tard, ou encore trop volumineuse, cette table ne fit jamais l'objet d'une publication. P. Hugon prévoyait un volume de 255 pages ce qui pouvait encore paraître assez lourd ; une argumentation toutes les 20', comme les tablettes Bertin, aurait permis de réduire encore la taille et le coût de l'ouvrage sans pour autant altérer sensiblement le compromis choisi par Hugon en ce qui concerne le point auxiliaire.

Annexe 9-1 : De Cornet à Pepperday.
Annexe 9-2 : Table de P. Domenjoud.
Annexe 9-3 : Projet de table de P. Hugon.

Chapitre 10

MÉTHODE DE LA TANGENTE COMMUNE

Introduction :

Le procédé, comme on va le voir, est simple mais fut relativement peu employé car il reste approximatif et n'apporte guère de simplification même s'il dispense du calcul de l'azimut ; on en relève une première mention dans les instructions d'emploi des tables[33] de F. Radler de Aquino sous le titre de « Lines of Position Determined without Azimuth » accompagnée de limites, assez larges, d'emploi. L'idée fut reprise par les professeurs britanniques E. E. Benest et E. M. Timberlake au début des années 1940 ainsi que par l'officier de marine espagnol J. Garcia qui mit au point un procédé original. D'une manière générale, la méthode revient à déterminer deux points du lieu de position que l'on assimilera à la droite passant par ces points ; la méthode est donc à rapprocher à celle de Sumner.

La tangente commune :

Avant de se lancer dans les calculs, deux cas de figures sont à distinguer selon que l'azimut de l'astre A_{ZQ}, compté par quadrant, à partir du Nord ou du Sud, vers l'Est ou vers l'Ouest, est inférieur ou supérieur à 45°. Dans le premier cas, $A_{ZQ} < 45°$, on adoptera pour les deux points auxiliaires A_1 et A_2 une latitude commune φ_a, évidemment voisine de la latitude estimée φ_e et on choisira des longitudes auxiliaires G_{a1} et G_{a2} distantes de 1° encadrant la longitude estimée G_e (figure 10-1). Dans le second cas, $A_{ZQ} > 45°$, on adoptera alors pour les deux points une longitude commune G_a et on choisira deux latitudes auxiliaires φ_{a1} et φ_{a2} entières distantes de 1° et encadrant la latitude estimée (figure 10-2).

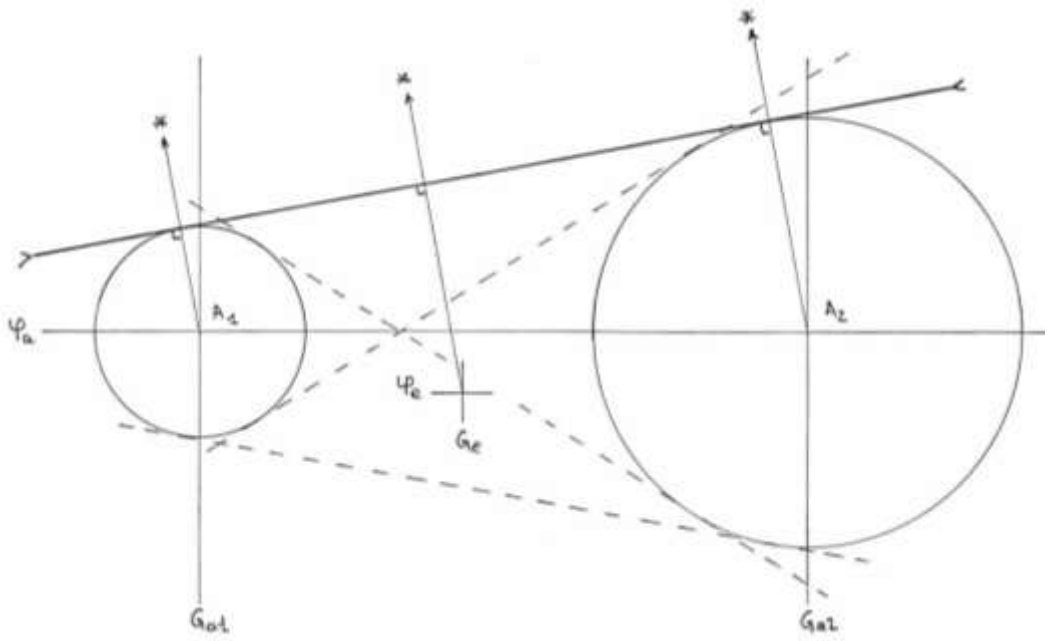


Fig : 10-1

[33] Altitude and Azimuth Tables, the simplest and readiest in solutions, 3e edition 1924.

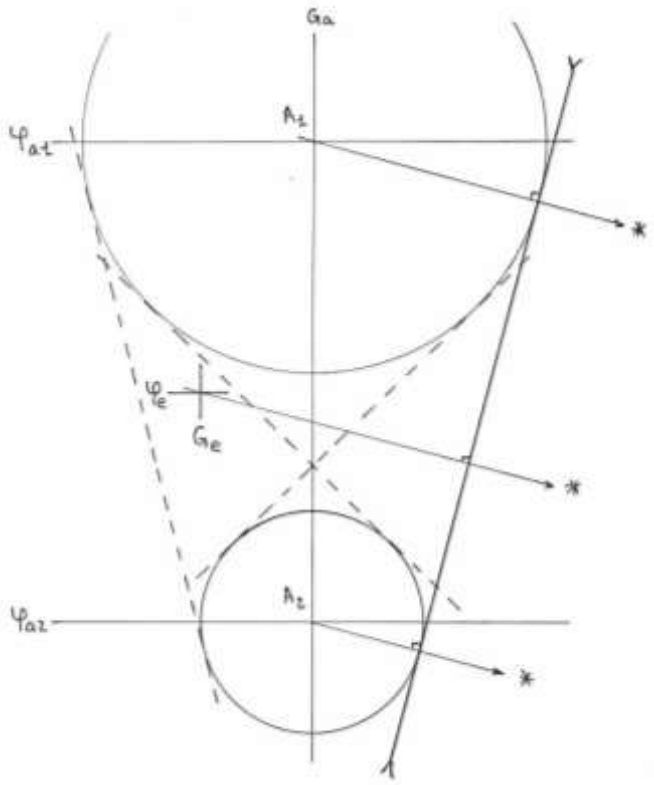


Fig : 10-2

Une fois les points auxiliaires définis, on calcule les deux hauteurs et les intercepts correspondants puis on trace les cercles centrés sur les points auxiliaires dont les rayons sont égaux aux intercepts respectifs. Le lieu de position cherché peut alors s'assimiler à l'une des tangentes aux deux cercles. Le levé de doute entre les deux tangentes – si les deux cercles se coupent – ou les quatre tangentes possibles s'effectue avec le signe des intercepts et la connaissance approximative de l'azimut de l'astre au moment de l'observation, ce dernier élément pouvant être renseigné par un relèvement sommaire de l'astre au compas.

Cette méthode est retenue par E. E. Benest et E. M. Timberlake qui publient en 1945 « Astro-Navigation Tables for the Common Tangent Method ». Celles-ci permettent le calcul de la hauteur selon le procédé Souillagouët-Ogura étudié au chapitre 8. Selon Charles H. Smiley qui en a fait la recension[34], les tables ont très probablement été publiées trop hâtivement, sans mise au point d'ensemble, notamment concernant la présentation des éléments calculés. Le Bowditch donne également un commentaire assez réservé sur l'ouvrage, mettant en avant le risque – et le danger – de ne pas sélectionner la « bonne » tangente. Les tables n'ont pas été rééditées.

Les tables de J. Garcia :

Les « Tablas de líneas de posición de altura » ont été mises au point par Juan Garcia, officier de la marine espagnole et ingénieur géographe. Elles ont été publiées en Espagne en 1944, en trois volumes, les volumes I et II étant dévolus aux astres de déclinaison inférieure à 25° (N et S) et limités respectivement aux zones de latitude 0°-30° (N et S) et 30°-60° (N et S) ; le volume III est consacré aux principales étoiles utilisées en navigation, dont la déclinaison est connue pour une époque donnée, et pour toute latitude inférieure à 60° (N et S). Ces tables permettent de construire une droite de hauteur selon le procédé dit des involutes qui dérive de celui de la tangente commune.

[34] Voir bibliographie.

La hauteur vraie H_v de l'astre étant connue, J. Garcia considère la valeur entière H_0 la plus voisine de H_v et le cercle de hauteur correspondant dont on sait calculer la longitude d'un point si on en connaît la latitude et vice versa. La table imaginée par J. Garcia permet de calculer l'une des deux coordonnées de deux points du cercle de hauteur au voisinage du point estimé E dont on fixe les longitudes, si l'azimut par quadrant est inférieur à environ 45°, ou dont on fixe les latitudes si cet azimut est supérieur à environ 45°. Sur la carte marine, on peut faire passer par ces deux points, P_1 et P_2 (figure 10-3) une corde sous-tendant l'arc de courbe de hauteur relative à l'observation de l'astre à la hauteur H_0. Maintenant, la hauteur à considérer étant H_v, on trace les cercles centrés les points P_1 et P_2 dont le rayon est égal à la valeur absolue de l'intercept ($H_v - H_0$). Le lieu de position pratique est alors la tangente commune aux deux cercles, parallèle à P_1P_2, tracée du côté fixé par le signe de l'intercept.

La figure 10-3 est commune, dans le principe, aux deux cas de figure ; l'intercept est ici positif.

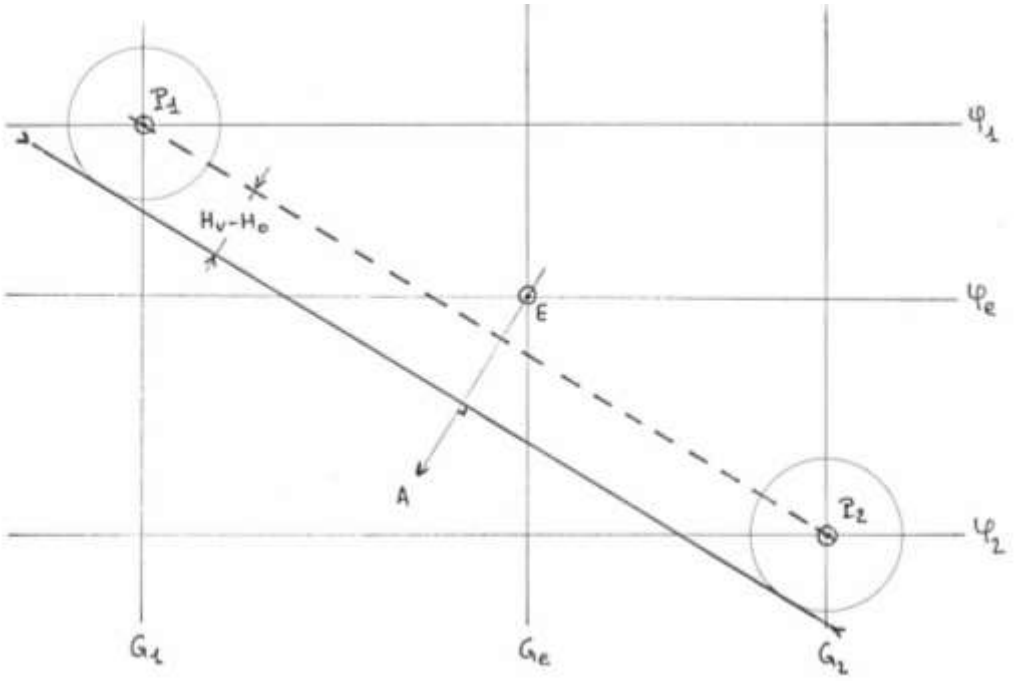


Fig : 10-3

La méthode est appelée par les Britanniques « involutes method » car, sur la sphère terrestre, le cercle de hauteur H_v est l'enveloppe[35] (extérieure ou intérieure selon le signe de l'intercept) de petits cercles de rayon $|H_v - H_0|$ centrés sur le cercle concentrique de hauteur H_0.

Le volume II des tables de J. Garcia[36] se présentent sous la forme d'un élégant petit livre relié d'environ 120 pages à la typographie claire et aérée. Les tables sont à triple argument, les entrées se faisant par tableau, colonne et ligne ; l'entrée tableau est la hauteur H_0 et l'entrée colonne est la déclinaison ; deux séries de tableaux sont prévues suivant que la déclinaison est de même nom ou de nom contraire à la latitude. L'entrée ligne est la latitude ou l'angle au pôle sans qu'il ne puisse y avoir de choix à faire entre les deux. Dans le cas de l'argumentation en latitude, celle-ci va de 30° à 60° (volume II) ; dans le cas de l'argumentation en angle au pôle, elle débute à 0° et peut s'étendre, suivant les tableaux, jusqu'à 50°. L'élément calculé se présente sous la forme d'un groupe numérique bicolore donnant :

- pour une entrée en latitude, l'angle au pôle (en noir) et son taux de variation (en rouge) pour une augmentation de 10' de la déclinaison ;

[35] Au sens mathématique du terme.
[36] Nous n'avons pas eu accès aux volumes I et III.

- pour une entrée en angle au pôle, la latitude (en noir) et son taux de variation (en rouge) pour une augmentation de 10’ de la déclinaison.

Les taux de variation permettent l’interpolation de l’élément calculé en fonction des minutes de déclinaison ; un carton mobile d’interpolation permet d’effectuer très rapidement ce dernier calcul. Les éléments calculés sont exprimés à la minute près avec une codification (dernier chiffre souligné ou non) permettant l’expression à la demi-minute près. Une description plus précise des tables ainsi que le traitement de deux exemples figurent en annexe 10-1.

Commentaires :

On ne retiendra ici que la méthode des involutes, celle de la tangente commune pouvant être pratiquée avec n’importe que type de table tout en sachant qu’elle n’apporte pas de simplification particulière par rapport à la méthode Marcq de Saint-Hilaire.

L’avantage principal de la méthode des involutes pratiquée avec les tables de J. Garcia réside dans la rapidité du calcul qui ne requiert qu’une seule ouverture de table, une seule interpolation et aucune règle de signe : c’est probablement l’une des méthodes les plus brèves, sur le plan du calcul. En revanche, il faut disposer d’une carte ou d’un canevas Mercator couvrant une zone importante pour effectuer la construction graphique qui demande soin et attention. Dans le cas d’un point d’étoiles, il conviendra d’être particulièrement attentif pour effectuer correctement l’ensemble des tracés : pour chaque observation, il faut reporter deux points sur le canevas, tracer les arcs de petits cercles dans la bonne direction puis tracer les tangentes communes et, le cas échéant, effectuer les transports pour l’heure de la dernière observation. Pour un point par trois étoiles, il faudra donc reporter 6 points, tracer 6 arcs de cercles, effectuer 2 transports et tracer les 3 lieux.

L’étendue de la zone sur laquelle on est amené à admettre que les arcs de courbes de hauteur se confondent avec les cordes sous-tendues entre les deux points de calcul peut aussi être abusive dans le cas où les hauteurs sont importantes sachant que les tables de J. Garcia permettent de traiter les hauteurs de 80° et plus. Celui-ci indique néanmoins que cette approximation ne saurait conduire à des erreurs supérieures à 0,5 mille.

Malgré une excellente typographie, et l’avancée que constitue l’écriture des angles au pôle en degrés et minutes d’arc, les tables en elles-mêmes sont d’une présentation assez obscure : les instructions d’emploi – en espagnol et en anglais – sont succinctes et ne détaillent qu’un exemple représentatif d’un seul cas de figure. Si l’entrée en déclinaison est toujours clairement indiquée, les entrées en latitude ou en angle au pôle ne sont pas faciles à bien distinguer. Enfin, la règle relative aux décimales de l’élément calculé, permettant, selon l’auteur, d’évaluer cet élément à 0,25’ près constitue une complication et une source d’erreurs. Compte tenu d’un traitement graphique, sur un canevas à nécessairement petite échelle, il paraît plus sûr de s’en tenir à des calculs partout arrondis à la minute.

Pour terminer, remarquons que l’on pourra calculer les éléments d’une droite de hauteur de façon très rapide en associant une table d’azimut (ABC, Perrin, Bataille etc) aux tables de J. Garcia. On effectuera alors le calcul d’un seul des points P_1 ou P_2 par rapport auquel on tracera la droite de hauteur.

Annexe 10-1 : Tables de J. Garcia.

Chapitre 11

TABLES A TRIPLE ARGUMENT

Introduction :

En 1871, Sir W. Thomson s'était ému devant le côté répétitif de la résolution d'un triangle sphérique pour trouver les éléments de la droite de hauteur et de la perte de temps et d'énergie que cela occasionnait ; d'où l'idée d'une sorte de dictionnaire dans lequel un très grand nombre de triangles sphériques quelconques se trouveraient résolus une fois pour toutes. Devant l'impossibilité de réaliser un tel projet à la fin du XIXe siècle, Thomson a dû se rabattre sur la résolution de triangles sphériques rectangles dont les deux côtés de l'angle droit prennent toutes valeurs comprises entre 0° et 90° avec un intervalle de 1°. Au passage, pour limiter les interpolations, il « invente » le point auxiliaire et préfigure la découverte de Marcq de Saint-Hilaire. Sur la voie du triangle rectangle pré-résolu, il sera suivi, comme on l'a vu dans les pages précédentes, par de nombreux autres chercheurs.

D'un autre côté, il existait depuis la fin du XVIIIe siècle, des tables d'angles horaires à triple argument. Ces dernières étaient incomplètes, avec des intervalles d'argumentation d'au moins 1°, et nécessitaient le recours à l'interpolation, opération compliquée, rébarbative et souvent approximative lorsqu'il faut y faire intervenir les parties fractionnaires – nombre de minutes ou résidus – des trois arguments. Pour les rendre plus facilement utilisables et précises, il convenait tout d'abord de les compléter, d'en parfaire les aides à l'interpolation et de les transformer pour passer du calcul d'angle horaire à celui de la hauteur et de l'azimut. Leur usage pratique sera fondé sur l'utilisation d'un point auxiliaire de calcul et leur précision, adaptée suivant le cas à la navigation maritime ou aérienne, nécessitera la résolution de 1,25 à 1,5 million de triangles sphériques. Cette impressionnante masse de calcul, dont l'essentiel, dans le principe, a été traité durant la décennie 1935-1945, a nécessité des moyens, tant humains que financiers, que les États-Unis étaient seuls en mesure de fournir à l'époque. On parlera donc longtemps des « Tables Américaines », sorte de solution miracle, parfois regardée avec méfiance, mais qui constituent probablement l'aboutissement ultime de la recherche dans le domaine d'une solution tabulaire.

D'autres tables d'angles horaires :

Rappelons que ces tables permettent l'évaluation directe de l'angle horaire d'un astre en fonction de sa déclinaison, de sa hauteur et de la latitude de l'observateur. Cet angle horaire conduit ensuite à la détermination de la longitude du point déterminatif Lalande de la droite de hauteur.

Percy L. H. Davis, Chief Assistant au Nautical Almanac Office, auteur de plusieurs tables de navigation (Requisite Tables, Altitude-Azimuth Tables, Ex-Meridian Tables) publia en 1899 les « Chronometer Tables ». Dans sa préface, il cite les travaux de Lalande, Lynn et Hommey dont il a cherché, probablement avec la contribution de H. S. Blackburne, à simplifier le processus d'interpolation. Il indique également que cette table est conçue exclusivement pour le calcul rapide d'un angle horaire, ce qui élimine les questions d'interpolation du second ordre ainsi que les utilisations multiples souvent sujettes au risque d'erreur. La table est construite selon le même principe que les précédentes, à savoir un calcul d'angle au pôle pour des valeurs entières de la latitude et de la déclinaison, argumentées respectivement de 0° à 50° et de 0° à 23°, en distinguant les cas où elles sont de même nom et de noms contraires. La hauteur de l'astre est argumentée selon 30 valeurs entières espacées de 1° (sauf sous les latitudes les plus hautes et dans le cas de noms contraires où l'intervalle d'argumentation est de 0,5°) ; ces 30 valeurs successives sont choisies pour respecter simultanément les critères de hauteur suffisante et de voisinage des circonstances favorables au calcul d'heure. Davis précise cependant que ce but ne peut être atteint dans les dernières pages de la table relatives aux latitudes supérieures à 45° et aux déclinaisons de nom contraire à la latitude. La présentation, usuelle, est la suivante : chaque page est représentative d'une latitude, de même nom ou de nom contraire à la déclinaison, la déclinaison figure en tête de chaque colonne, la hauteur figure en entrée de ligne. Les éléments calculés sont l'angle au pôle et les taux de variations de cet angle pour une variation de 1' de

l'argument considéré. Ces derniers sont calculés pour la valeur moyenne de l'argument sur l'intervalle suivant. Le signe de ces facteurs correspond au sens de variation de l'angle au pôle lorsque l'argument considéré augmente en valeur absolue.

Harold S. Blackburne, capitaine au long cours, est aussi l'auteur de plusieurs tables de navigation ; on reviendra sur sa personnalité au chapitre 14. Il aurait commencé à mettre au point une table d'angles horaires vers 1876 et terminé l'essentiel du manuscrit une dizaine d'années plus tard. Ce document aurait ensuite été transmis au Captain W. R. Martin, Naval Instructor au Greenwich College, pour vérification et finalisation en vue d'une publication. Apparemment, le manuscrit n'a pas été retouché et a été rendu à son auteur, sur sa demande, en 1894. Par contre, il a été très certainement communiqué à P. L. H. Davis, puisque ce dernier est entré en contact avec Blackburne, en 1895 ou 1896, en vue d'un projet de publication. De toute évidence les points de vue sur la conception de la table n'étaient pas les mêmes et les deux hommes ne purent mener à bien le projet en commun : Davis a publié ses propres tables dès 1899 et, simultanément, il semblerait qu'il ait été interdit à Blackburne de faire paraître les siennes en Grande-Bretagne. Il lui fallut attendre 1914 pour qu'elles soient publiées, sous le titre de « Tables of Calculated Hour-Angles and Altitude Azimuth Table » ou, selon les éditeurs, de « The Excelsior Azimuth and Position Finding Tables » . L'ouvrage est en fait un recueil réunissant des tables usuelles (conversions, corrections des hauteurs, etc), des tables d'azimuts et de réduction au méridien et la table d'angles horaires, nous y reviendrons au chapitre 14. Il paraît néanmoins établi que H. S. Blackburne est le premier[37] à avoir employé les taux de variation de l'élément calculé pour 1' de variation de l'argument.

Les tables d'angles horaires de Blackburne sont construites sur le même modèle que celles de Davis, les latitudes, déclinaisons et hauteurs étant argumentées, avec un intervalle de 1°, respectivement de 0° à 30°, 0° à 23° et 0° à 30° ou 40°. Pour chaque triplet des arguments d'entrée, la table donne l'angle au pôle, exprimé au 1/10 de seconde de temps près et les taux de variations de cet angle, exprimés au 1/100 de seconde près, pour 1' de variation de la déclinaison, de la latitude et de la hauteur. Pour une valeur donnée de l'argument, ces taux sont calculés à partir de la différence tabulaire prise sur un intervalle de 2° centré sur la valeur considérée de l'argument. Ainsi, par exemple, le taux de variation de l'angle au pôle pour une hauteur de 8° (à latitude et déclinaison fixées) est la différence des angles au pôle tabulés pour des hauteurs de 7° et 9° divisée par 120. Dans ces conditions, H. S. Blackburne indique que l'angle horaire peut être évalué à la demi-seconde de temps près.

Tables stellaires de G. De Lannoy :

Ancien officier de marine, Georges De Lannoy (1860, [38]?) était professeur d'hydrographie ; il a notamment dirigé l'École de Saint-Malo entre 1896 et 1904. En 1903, ses Tables stellaires sont publiées chez l'éditeur A. Challamel ; celles-ci donnent directement la hauteur et l'azimut d'une étoile en fonction de son angle horaire local et de la latitude du lieu d'observation. L'usage de la table fait naturellement appel au point auxiliaire, l'angle horaire et la latitude étant argumentés en degrés entiers (plus précisément toutes les 4 minutes de temps pour l'angle horaire). Les tables sont publiées en 4 volumes, couvrant successivement les latitudes de 32° à 35° N, puis 36° à 44° N, 45° à 50° N et enfin 51° à 54° N. G. De Lannoy indique :

> « *L'ouvrage complet permet de naviguer entre les parallèles 31° 30' et 54° 30' de latitude nord. Le parallèle extrême sud passe à peu près par Port-Saïd, Madère, Charleston, Chang-Haï, etc, Le parallèle extrême nord passe à peu près par Kiel, Belfast, Vancouver, cap Elisabeth, etc* ».

Dans chaque volume, 32 étoiles, choisies parmi les plus reconnaissables, sont sélectionnées pour le calcul de hauteur et d'azimut. Les résultats de calcul sont donnés dès lors que la hauteur est supérieure à environ 4,5° pour 20 étoiles dites principales ; pour 12 autres étoiles, dites secondaires, les résultats ne sont donnés que lorsque l'astre est au voisinage du méridien. Les éléments du calcul approché de la latitude par la Polaire sont également inclus dans chaque volume ce qui porte le nombre d'étoiles traitées à 33.

[37] Voir Bowditch 1977, page 563.
[38] Date de décès inconnue mais postérieure au 29/01/1960, date à laquelle les insignes d'officier de la légion d'honneur lui ont été remis.

Les calculs de hauteur et d'azimut, dont les résultats sont exprimés respectivement à la minute et au degré près, sont effectués avec une valeur moyenne de la déclinaison de l'étoile considérée sur la période s'étendant de 1903 à 1910 ; des éléments de corrections sont donnés pour prolonger la validité de l'emploi des tables jusqu'en 1915. G. De Lannoy indique que les hauteurs calculées peuvent être entachées d'une erreur maximale de 2' ; il conclue comme suit son avertissement de présentation :

> « *Nous croyons que l'on peut se contenter de cette précision, puisque, d'après l'amiral Fleuriais, une précision de quatre ou cinq milles dans le point est bien suffisante (…) Les personnes qui trouveront des erreurs en dehors des limites que nous indiquons sont priées de vouloir bien en informer l'éditeur*. »

Il est à remarquer que ces tables sont conçues pour l'application directe de la méthode Marcq de Saint-Hilaire et que, sous réserve d'admettre l'imprécision mentionnée ci-dessus, la recherche des éléments de la droite de hauteur ne fait appel à aucune interpolation. On relève de plus que, grâce aux petites tables auxiliaires figurant dans chacun des volumes, il n'est nécessaire de recourir aux Éphémérides nautiques qu'une fois par mois pour noter la valeur du temps sidéral au premier jour du mois considéré à zéro heure de temps moyen.

L'usage des Tables stellaires de Georges De Lannoy semble être resté très limité ; à notre connaissance, elles ne firent pas l'objet d'article dans les publications techniques maritimes de l'époque pas plus que de mention dans les divers cours et traités de navigation[39]. Elles n'ont pas été rééditées. Elles constituent néanmoins une avancée remarquable qui sera adaptée aux besoins de la navigation aérienne par les Britanniques 35 ans plus tard et sera publiée sous la référence AP1618 (HO218 aux États-Unis).

Altitude Tables de F. Ball et Alt-Azimuth Tables de P. L. H. Davis :

Frederick Ball, aumônier de la Royal Navy et Naval Instructor, publia en 1907, à Londres, la première édition des tables dont le titre complet est « Altitude Tables Computed for Intervals of Four Minutes, Designed for the Determination of the Position Line at all Hour Angles without Logarithmic Computation ». Dans cette première édition, les tables sont rassemblées en deux forts volumes de 244 et 240 pages, couvrant respectivement les latitudes de 0° à 30° et de 31° à 60° ; elles permettent, dans leur mode d'utilisation normal, de traiter les observations d'astres dont la déclinaison n'excède pas 24°. Le champ d'application direct des tables sera ensuite augmenté, notamment avec la 3e édition, en 1915, où la déclinaison maximale sera portée à 60°. Dans leur forme définitive, les Altitude Tables de F. Ball comporteront 3 volumes totalisant environ 800 pages.

Ces tables sont à triple argument et donnent directement la valeur d'un angle ou d'un arc calculé à partir des trois arguments. Elles sont conçues en premier lieu pour le calcul de la hauteur dans les limites de latitude et de déclinaison données ci-dessus mais il est possible d'étendre leur champ d'application en permutant les arguments d'entrée. À la suite d'une brève instruction d'emploi dans laquelle figurent quelques exemples, l'ouvrage de Ball contient les tables de conversions et d'interpolation nécessaires ainsi que les éléments permettant de faire un calcul approché de l'azimut par une méthode différentielle. Les tables de F. Ball permettent de trouver, par simple lecture[40], l'une des 4 variables intervenant dans la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique connaissant les trois autres. Les formules considérées faisant intervenir soit la hauteur (H), la latitude (φ), la déclinaison (D) et l'angle horaire ou l'angle au pôle (AHag ou P), soit encore[41] la déclinaison (D), la latitude (φ), la hauteur (H) et l'azimut ou l'angle au zénith (Z ou A_z).

[39] Les Tables stellaires de G. De Lannoy ne figurent pas dans l'inventaire très complet de l'édition 1977 du Bowditch ; de même, elles ne sont pas répertoriées dans « Chronological and Analytical List of Various tables ans Treatises on Navigation » de H. Bencker (1943).
[40] D'où l'expression anglaise « inspection table » pour désigner ce type de table ; en France, on utilise parfois l'expression de « table dictionnaire ».
[41] On pourrait aussi étendre à la troisième relation faisant intervenir latitude, déclinaison, hauteur et angle à l'astre.

L'accès, par trois arguments, se fait en page, en colonne et en ligne, comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

Plage d'argumentation		Intervalle d'argumentation	Arguments cas n° 1	Arguments cas n° 2	Arguments cas n° 3
Page	0° à 60°	1°	φ	D	φ
Colonne	0° à 24°	1°	D	φ	H
Ligne	0 à 24 h (0° à 360°)	4 min (1°)	AHag	AHag	Z
Elément calculé		→ →	H	H	D

Le cas n° 1 correspond à l'utilisation normale de la table, pour une latitude φ et une déclinaison D respectivement inférieures à 60° et à 24° ; l'élément calculé est la hauteur H.

Le cas n° 2 correspond à une permutation des entrées φ et D et sera utilisé pour le calcul de H lorsque la déclinaison est comprise entre 24° et 60°, la latitude étant nécessairement inférieure à 24°.

Le cas n° 3 est celui du calcul d'azimut : la hauteur H est l'argument colonne, la déclinaison D figure en élément calculé et l'azimut Z est l'argument ligne ; on remarquera que ce calcul n'est possible que si la hauteur est inférieure à 24°.

L'intervalle d'argumentation étant de 1°, l'utilisation de la table, que l'on détaille en annexe 11-1, est fondée sur l'emploi d'un point auxiliaire dont les coordonnées, aussi voisines que possible de celles du point estimé, conduisent à des arguments de la table. La recherche de la hauteur calculée se fera donc sur la base de ces deux nombres entiers qui définissent, dans le cas n° 1, la page (latitude) et la ligne (angle horaire local) à considérer, tout en veillant aux noms respectifs de la latitude et de la déclinaison. La recherche en colonne se fera pour les deux valeurs entières de déclinaison encadrant la valeur considérée ; le calcul s'achèvera par celui de l'interpolation pour les minutes et dixièmes de la déclinaison pour laquelle il faudra rechercher la différence tabulaire (elle n'est pas indiquée) puis calculer la partie proportionnelle à l'aide d'une table figurant en début d'ouvrage ou encore en utilisant les logarithmes proportionnels ou logarithmes logistiques[42], également mis en table. La procédure de calcul relative au cas d'utilisation n° 2 est détaillée en annexe 11-1.

Si la hauteur de l'astre est inférieure à 24°, son azimut peut être déterminé directement avec la table grâce à la formule le déterminant par la hauteur, mise en œuvre dans le cas n° 3 d'utilisation des tables. Si la hauteur est supérieure à 24°, F. Ball préconise alors une méthode approchée qui permet le calcul quelle que soit la hauteur. Cette méthode, différentielle, est basée sur une évaluation de la variation de hauteur consécutive à une variation unitaire de latitude ou d'angle au pôle. Les différents calculs d'azimut sont explicités en annexe 11-1.

F. Ball est le premier à publier une table d'usage général[43] à triple argument permettant de trouver, par simple lecture du document puis une unique interpolation, une hauteur calculée qui sera comparée à la hauteur vraie pour déterminer l'intercept et ainsi construire une droite de hauteur à partir d'un point auxiliaire selon le procédé de Marcq de Saint-Hilaire. La présentation de ces tables préfigure ce qui deviendra d'usage courant moins de 40 ans plus tard avec les tables américaines et leurs homologues britanniques. En 1907, l'élément manquant, tout au moins directement, aux tables de Ball est l'azimut calculé de l'astre.

Percy L. H. Davis réunira calcul de la hauteur et de l'azimut dans un unique document, sous le titre de « Alt-Azimuth Tables » en 1918. Cet ouvrage est de présentation analogue à la table d'azimut de Burdwood et Davis[44] ; la latitude et la déclinaison sont exprimées en degrés entiers, avec un intervalle d'argumentation de 1°, la latitude étant comprise entre 30° et 64° et la déclinaison entre 0° et 24°. La table est construite en deux parties : la première

[42] Voir l'annexe 1-3.
[43] L'usage des Tables stellaires de G. De Lannoy est limité à des étoiles sélectionnées observées dans une partie de l'hémisphère nord.
[44] Voir chapitre 6.

est relative aux latitudes et déclinaisons de même nom, la seconde aux latitudes et déclinaisons de noms contraires ; l'angle au pôle, exprimé en heures et minutes, est argumenté toutes les quatre minutes. Pour chaque valeur d'angle au pôle, la table donne l'azimut ou la hauteur de l'astre ; en effet, un triplet d'arguments d'entrée ne donne donc accès qu'à une coordonnée : azimut ou hauteur alternativement. Ainsi, pour une latitude et une déclinaison données, l'azimut est calculé avec un intervalle d'argumentation de l'angle au pôle de 8 minutes (00, 08, 16 minutes etc par exemple), le calcul de hauteur venant s'intercaler avec le même intervalle (04, 12, 20 minutes, etc). Bien que la hauteur soit calculée à la minute près et l'azimut au dixième de degré près, cette table n'est pas conçue pour déterminer les éléments d'une droite de hauteur : l'intervalle d'argumentation est trop important et aucune disposition particulière n'est prévue pour l'interpolation en déclinaison. Elle est en fait destinée à compléter les tables d'azimut de Burdwood et Davis et a été conçue principalement pour le calcul de l'azimut par l'heure, la recherche des coordonnées horizontales approchées en préparation d'observations et l'identification d'un astre. La table sera complétée d'un second volume, en 1921, pour les latitudes comprises entre 0° et 30°. Il semble que l'extension en déclinaison, permettant de travailler avec toutes les étoiles utilisables en navigation, n'ait jamais été réalisée.

Tables de G. W. Littlehales HO203 et HO204 :

Georges W. Littlehales était ingénieur hydrographe à l'US Navy Hydrographic Office à Washington DC. Déjà auteur d'une méthode graphique de détermination du lieu de position au début du XXe siècle, il élabore, au lendemain de la Première Guerre mondiale, une table d'angles horaires sur le modèle de ses prédécesseurs, notamment Lalande et Lynn qu'il cite dans son texte introductif. Les tables sont publiées en 1923, en deux volumes, sous le titre « The Sumner Line of Position, fursnished ready to lay down upon the chart by means of Tables of Simultaneaous Hour Angle and Azimuth of Celestial Bodies ». Les deux volumes sont publiés par l'US Navy Hydrographic Office sous les références HO203 et HO204 ; ils comptent respectivement 847 et 675 pages et couvrent les latitudes allant de 64° N à 64° S et les déclinaisons comprises entre 27° N et 27° S. Comme pour les autres tables, chaque page est représentative d'une latitude entière, de même nom ou de nom contraire à la déclinaison, et une valeur entière de la déclinaison figure en tête de chaque colonne. Le tableau de chaque page comporte environ 60 à 70 lignes[45] argumentées selon les valeurs de la hauteur, allant de 3° à 5° jusqu'à la valeur de hauteur méridienne fonction de la latitude et la déclinaison considérées, avec un intervalle d'argumentation de 1° en général se réduisant aux extrémités (10' à 30' pour les faibles hauteurs, 30' à l'approche du passage au méridien). Aux intersections lignes-colonnes, la table donne l'angle horaire et l'azimut accompagnés de leurs taux de variation respectifs pour une augmentation de 1' de la déclinaison ; l'azimut est compté à partir du pôle élevé, vers l'E ou vers l'W. Les taux de variation sont calculés pour le milieu de l'intervalle tabulaire borné par la valeur de déclinaison D_0 figurant en tête de colonne et la valeur $D_0 + 1°$; ils représentent donc les taux moyens de variation de l'angle horaire et de l'azimut sur l'intervalle de 1° considéré.

Ces tables ont été conçues pour construire la droite de hauteur consécutive à une observation à partir d'un point situé sur un parallèle auxiliaire dont la latitude φ_a est le nombre entier de degrés le plus proche de la latitude estimée à l'instant de l'observation. La hauteur vraie de l'astre, résultant de la mesure, étant H_v, la procédure de calcul des éléments de la droite de hauteur, dont un exemple est donné en annexe 11-2, se décline simplement. En fonction de la latitude auxiliaire φ_a et des valeurs entières de la déclinaison et de la hauteur H_0 les plus voisines des valeurs considérées, la table donne l'angle horaire et l'azimut de l'astre ainsi que leurs taux de variation respectifs. On interpole ces deux valeurs en fonction des minutes de déclinaison et on obtient l'angle au pôle P et l'azimut Z de l'astre dont la hauteur argumentée est H_0 ; de cet angle au pôle, on déduit une longitude auxiliaire G_a. Sur la carte ou le canevas, on porte le point auxiliaire de coordonnées φ_a et G_a par où passe le cercle de hauteur H_0 de l'astre. La droite de hauteur cherchée se construit ensuite à partir de ce point selon la méthode Marcq de Saint-Hilaire, l'intercept étant égal à $H_v - H_0$ et l'azimut Z étant celui déterminé précédemment. On remarquera que le procédé utilisé, qui combine parallèle et vertical auxiliaires, est celui mis au point par Sir William Thomson lorsqu'il a conçu les « Tables for facilitating Sumner's Method at Sea » au début des années 1870.

[45] Sauf en latitude élevée, lorsque la déclinaison est de nom contraire, où le nombre de lignes est réduit.

Le principe de la méthode retenue par G. W. Littlehales reposant sur un calcul de longitude ne peut conduire à un résultat précis que si l'astre est relativement éloigné du méridien du lieu. Dans ces dernières conditions, l'angle horaire est obtenu aisément et précisément avec une seule interpolation. Dans le cas où l'astre est proche du méridien, l'auteur préconise une méthode de calcul de l'angle horaire basée sur la théorie des observations circumméridiennes présentée au chapitre 13.

Les publications américaines 201, 214 et 229 :

En suivant la voie ouverte par le Révérend Frederick Ball en 1907 puis Percy L. H. Davis en 1918, le US Navy Hydrographic Office s'est attaché, sensiblement à la même époque, à mettre au point une table à triple argument donnant directement, par simple lecture, la hauteur et l'azimut d'un astre permettant ainsi la détermination rapide des éléments d'une droite de hauteur par la méthode de Marcq de Saint-Hilaire. En 1919, ce service publie la table « Simultaneous Altitudes and Azimuths of Celestial Bodies » sous la référence HO201 : hauteur et azimut sont calculés simultanément en fonction des trois arguments, angle au pôle, latitude et déclinaison, les éléments de la droite de hauteur étant ensuite évalués par rapport à un point auxiliaire. La table comporte 606 pages, la latitude étant limitée à 60° et la déclinaison à 24° avec des intervalles d'argumentation de 1° ; l'angle au pôle n'est argumenté que tous les 2,5°, ce qui pourra conduire à des intercepts importants ; de plus, le document HO201 ne comporte aucune aide à l'interpolation de la hauteur en fonction des minutes de déclinaison : la table est donc encore embryonnaire. Dans les années 1930, le US Navy Hydrographic Office reprit ses travaux en resserrant les intervalles d'argumentation et en visant un niveau de précision du dixième de minute pour la hauteur et du dixième de degré pour l'azimut. Le travail est gigantesque puisqu'il s'agit de résoudre plusieurs centaines de milliers de triangles sphériques[46] à une époque où le calcul électronique n'existait pas encore. Le projet est cependant à la portée des États-Unis qui ont, d'une part, la volonté de réaliser un document définitif sur le sujet et qui, d'autre part, disposent de l'ensemble des moyens, humains et financiers, nécessaires.

La table référencée HO214 est publiée entre 1936 et 1946 ; elle est constituée de 9 volumes de grand format (24 sur 30 cm), l'ensemble pesant un peu plus de 8 kg. Chaque volume couvre un secteur de 10° d'ouverture en latitude avec un intervalle d'argumentation de 1° ; la couverture de la surface de la Terre est donc complète (volume 1 : 0° à 9° ; volume 2 : 10° à 19° ; etc.). Les arguments d'entrée dans la table et les éléments calculés sont ceux du triangle de position de l'astre construit à partir du pôle élevé de l'observateur. L'azimut calculé est donc compté à partir de ce pôle, vers l'E ou vers l'W selon la valeur de l'angle horaire local. Comme dans le cas de la table de F. Ball, le document HO214 est conçu pour être utilisé à partir d'un point auxiliaire ; cependant, la hauteur calculée peut être réduite, par le calcul, aux coordonnées du point estimé.

Chaque volume est constitué de dix tableaux, chaque tableau étant représentatif d'une valeur entière de la latitude ; un tableau occupe plusieurs pages et se décline en deux parties selon les noms respectifs de la latitude et de la déclinaison (SAME ou CONTRARY). L'entrée latitude est donc l'un de ces tableaux.

La déclinaison constitue l'entrée en colonne du tableau, ou l'argument horizontal. Les valeurs exprimées de déclinaison vont de 0° à 29° avec un intervalle d'argumentation de 0,5° ; au-delà, les concepteurs de la table ont sélectionné 37 valeurs de déclinaison, arrondies au demi-degré entier, afin de pouvoir traiter les observations de toutes les étoiles figurant dans le Nautical Almanac, à l'exception de l'Étoile polaire. Il y a donc au total 96 entrées « déclinaison » allant de 0° à 74° 30'.

L'angle horaire constitue l'entrée en ligne du tableau, ou l'argument vertical ; l'intervalle d'argumentation est de 1°. Les valeurs exprimées d'angle au pôle commencent à 0° et peuvent aller jusqu'à 180° si l'astre est circumpolaire visible tout en gardant une hauteur supérieure à 5° ; s'il n'en est pas ainsi, la tabulation est interrompue dès que la hauteur calculée est inférieure à 5°. Les éléments calculés, hauteur et azimut, sont respectivement exprimés au dixième de minute et au dixième de degré près ; les taux de variations figurent entre les éléments calculés. La table couvre donc les observations de tous les astres utilisables en navigation repérés

[46] Les tables HO214 et 229 comportent respectivement environ 1,25 et 1,5 millions d'entrées. Les calculs furent effectués à l'aide de tables de logarithmes à 7 décimales pour les HO214.

dans le Nautical Almanac, à partir de n'importe quelle position de la surface de la terre, dès lors que la hauteur de l'astre considéré est supérieure à 5°.

La table HO214 donne la hauteur calculée pour des valeurs entières des arguments d'entrée, latitude et angle horaire, résultant des coordonnées du point auxiliaire choisi ; la déclinaison étant prise au demi-degré entier le plus proche de la valeur considérée, il sera nécessaire de corriger la hauteur trouvée de l'effet du « résidu », c'est-à-dire de la différence entre l'argument et la valeur réelle de déclinaison ; cette différence, ou résidu, ne saurait excéder 15'. La correction de hauteur correspondante se calcule très facilement à l'aide d'une table de multiplication figurant à la fin de chaque volume à partir du taux de variation indiqué. Il n'est pas nécessaire d'interpoler l'azimut. Les procédures opératoires sont décrites en annexe 11-3.

Dans chaque volume figure des instructions d'emploi concises accompagnées d'exemples adaptés aux latitudes du volume considéré ainsi que des tables permettant d'effectuer les interpolations. Pour chaque valeur de latitude figure également une table permettant l'identification d'un astre. Des tables de corrections des hauteurs figuraient dans les premières éditions (notamment celles de 1940-41) ; elles ont été supprimées par la suite, pour éviter le double emploi avec celles du Nautical Almanac. La table HO214 a été dupliquée par l'Amirauté britannique entre 1951 et 1953 et publiée sous la référence HD486 en 6 volumes ; à la même période, elle sera aussi reproduite par les marines italienne, espagnole et française[47] ; elle fera enfin l'objet d'une dernière réédition en 1962 pour tenir compte des évolutions de présentation du Nautical Almanac.

Le document, débarrassé des nombreuses erreurs qui entachaient les premières éditions, a atteint, dans sa dernière édition, un niveau de confiance presque total mais, les techniques ayant évolué, il est apparu nécessaire de l'adapter aux nouveaux procédés de calcul électronique et d'impression automatique associée : une refonte s'est donc avérée nécessaire et le document a été entièrement repensé et recalculé par les services américain et britannique[48] pour donner naissance à la table américaine HO229 et à sa version britannique NP401 qui seront publiées en 6 volumes à partir de 1970. Si le principe opératoire reste identique, la présentation du document diffère notablement de celle de la table HO214.

Chaque volume couvre un secteur de 15° d'ouverture en latitude avec un intervalle de 1° et est scindé en deux parties de 8° ; ainsi le volume 1 se décompose-t-il de 0° à 7° puis de 8° à 15°. À chaque paire de pages disposées en vis-à-vis correspond une valeur de l'angle au pôle et de son supplément, soit 4 valeurs de l'angle horaire local ; sur chaque page, les 8 valeurs de latitude figurent en entrée colonne (argument horizontal), la déclinaison, argumentée de 0° à 90°, figurant en entrée ligne (argument vertical) ; il y a donc, par page, 728 intersections lignes-colonnes à l'intérieur desquelles sont calculées trois éléments : la hauteur, exprimée au dixième de minute près, le taux de variation de cette hauteur pour une augmentation de 1° de la déclinaison et l'azimut, exprimé au dixième de degré près. La disposition, présentée en annexe 11-4, est telle que la même double page donne les résultats relatifs aux deux configurations de noms entre latitude et déclinaison (même nom et noms contraires). La table HO229 vient pallier les dernières faiblesses de son aînée, notamment dans les cas limites (voir annexe 11-4). Le document constitue donc l'aboutissement ultime de ce type de table qui allie précision – l'erreur maximale qui peut entacher une hauteur calculée imprimée dans la table est de 0,05' –, simplicité d'emploi et rapidité d'exécution du calcul, tout en prévoyant tous les cas de figure.

Tables conçues pour la navigation aérienne et utilisées en navigation maritime :

En navigation aérienne, le calcul des éléments de la droite de hauteur s'effectue dans un espace exigu et doit être rondement mené quitte à admettre une certaine dégradation de la précision. Faisant suite à l'utilisation de documents de calcul issus de la navigation maritime, d'autres outils vont être progressivement mis au point pour s'adapter aux besoins des nouvelles générations d'aéronefs mises en service dans le contexte militaro-politique de la fin des années 1930 ; les recherches s'orienteront vers la conception de documents de faible encombrement permettant un calcul expéditif. Outre la publication d'Éphémérides aéronautiques (Air Almanac) adaptées, à partir

[47] Tables 901.
[48] US Naval Oceanographic Office, US Nautical Almanac Office, HM Nautical Almanac Office.

de 1935[49], on relève l'initiative du ministère de l'Air britannique qui initia la conception de tables spécifiques. Les premiers volumes d'une série de 15 parurent en 1938 sous la référence AP1618. En 1941, les 14 premiers volumes furent reproduits directement, pour des besoins militaires, par l'US Navy Hydrographic Office et publiés sous la référence HO218 ; leur ensemble couvre une importante partie de la sphère terrestre allant de l'équateur jusqu'aux latitudes de 69° N et S. Les volumes sont repérés par une lettre caractéristique du secteur de latitude (A de 0° à 4°, B de 5° à 9° etc.). Chaque volume est léger, environ 500 g pour 230 pages, et de petit format : 17 cm sur 25 cm pour l'édition anglaise, 16 cm sur 23,5 cm pour l'édition américaine.

Dans les années 1940, l'instrument de navigation astronomique courant à bord des avions est le sextant à bulle qui permet la mesure de la hauteur d'un astre par rapport à une référence horizontale indiquée par la bulle d'un niveau de faible rayon de courbure. Le sextant à bulle est un appareil délicat dont la précision de mesure est de l'ordre de la dizaine de minutes pour une observation unique. Ces sextants étaient en général munis d'un dispositif permettant de déterminer la valeur moyenne d'une série d'observations et ainsi d'améliorer la précision qui pouvait être ramenée à quelques minutes. La hauteur ainsi mesurée doit ensuite être corrigée d'une éventuelle erreur instrumentale, de l'effet de réfraction du dôme (astrodôme) et de l'effet de la « force » de Coriolis, fonction de la vitesse de l'avion et de la latitude. Cette hauteur corrigée est appelée, dans les ouvrages de navigation, « hauteur apparente réfractée » H_{ar} puisqu'elle n'a pas été corrigée de la réfraction astronomique R ; elle sera ensuite ramenée au centre de la Terre par application de la correction de parallaxe, la hauteur est alors géocentrique réfractée puis, dans le cas de la Lune et du Soleil, au centre de l'astre en appliquant la correction de demi-diamètre. Notons que, compte tenu de la précision exigée (la minute), la correction de parallaxe ne sera nécessaire que pour les observations de la Lune. La table HO218 donne accès à la hauteur géocentrique réfractée du centre d'un astre en fonction de l'angle horaire local, de la latitude et de la déclinaison. En effet, la hauteur tabulée résulte du calcul selon les trois éléments d'entrée auquel est ensuite affectée la réfraction astronomique R. Pour évaluer l'intercept, il est donc inutile de se préoccuper de cette réfraction puisque la hauteur calculée la prend en compte. Les instructions d'emploi de la table HO218 résument ainsi le procédé : « *The tabulated altitude includes the effect of atmospheric refraction and is directly comparable with that seen by an observer*. » Précisons enfin que les valeurs de réfraction utilisées dans la table HO218 sont celles correspondant à une altitude de l'avion de 5000 pieds (environ 1500 m) ; ces valeurs sont très peu différentes de celles relatives au niveau de la mer.

Le sextant à bulle est inutilisable à bord d'un navire à cause des mouvements de plate-forme ; il est de plus insuffisamment précis. À la mer, la hauteur mesurée au sextant et corrigée de l'erreur instrumentale est la hauteur observée H_o ; pour la rendre comparable à celle tabulée dans la table HO218, il convient de la corriger de la dépression apparente de l'horizon puis, le cas échéant, de la parallaxe et du demi-diamètre. La table comporte les éléments permettant d'effectuer ces différentes corrections autorisant ainsi son usage à la mer.

La table HO218 permet, dans les secteurs de latitude Nord et Sud correspondant au volume utilisé, de calculer la hauteur et l'azimut d'un astre en fonction des trois éléments d'entrée : l'angle horaire local (AHag ou HA), la latitude (φ ou LAT) et la déclinaison (D) ou encore le nom d'une étoile. Dans tous les cas, ce calcul s'effectue à partir d'un point auxiliaire dont la définition est celle déjà rencontrée avec les tables du type HO214 ou 229. L'intervalle d'argumentation adopté est, partout, de un degré entier. Les tableaux sont tronqués dès que la hauteur calculée excède 80°, éliminant ainsi la question du traitement des grandes hauteurs, ou devient inférieure à 10°, condition dans laquelle les observations sont souvent incertaines du fait de la réfraction.

La première partie de la table HO218 est relative au traitement d'observations de 22 étoiles choisies pour leur éclat et leur répartition dans le ciel ; ces étoiles sont classées par ordre alphabétique et numérotées de 1 à 22. Une suite de 4 pages est dévolue à chacune de ces étoiles donnant, en fonction de la latitude, de l'angle horaire local et de la déclinaison de l'étoile considérée :

- la hauteur calculée, intégrant la réfraction astronomique,
- la variation algébrique annuelle de cette hauteur en vue de la correction de date,
- l'azimut calculé, exprimé de 0° à 180°, à partir du pôle élevé.

[49] Allemagne en 1935, France en 1936 et Grande-Bretagne en 1937 ; USA en 1941.

Pour chaque étoile, les deux premières pages concernent le secteur de latitude N (30° à 34° N pour le volume G par exemple), les deux suivantes le secteur de latitude Sud (30° à 34° S pour ce même volume G). On sait que les coordonnées équatoriales d'une étoile, ascension droite (ou verse) et déclinaison, sont lentement variables sous l'effet de la précession des équinoxes. Sur une année, elles peuvent toujours, à une minute près, être considérées comme constantes. La première partie de la table HO218 a été établie à partir des déclinaisons des étoiles choisies calculées pour le milieu de l'année 1940 : en toute rigueur, les hauteurs calculées ne sont donc valables que pour cette année 1940. Cependant, si l'instant d'observation se place dans une autre année, la table donne les éléments permettant d'évaluer la correction à apporter à la hauteur à la date considérée, ceci jusqu'à l'année 2000.

La seconde partie de la table est relative au traitement des observations des astres du système solaire ainsi que des étoiles de déclinaison inférieure à 29°. Sont calculés, en fonction de l'angle horaire local, de la latitude et de la déclinaison, exprimés en valeurs entières avec des intervalles d'argumentation de 1° :

- la hauteur, intégrant la réfraction astronomique,
- la variation algébrique de hauteur pour une variation de déclinaison de 1° (ou 60'),
- l'azimut, exprimé de 0° à 180° à partir du pôle élevé.

Pour chaque valeur entière de la déclinaison, de 0° à 28°, il est consacré quatre pages, deux étant relatives au cas où cette déclinaison est de même nom que la latitude et deux au cas contraire. Les instructions d'emploi de la table HO218 prévoient de travailler exclusivement à partir d'un point auxiliaire. Il n'y a donc qu'à considérer l'interpolation de la hauteur pour les minutes de la déclinaison qui s'effectue facilement à l'aide d'une table particulière figurant dans le document.

La collection de tables HO218, conçue pour la navigation aérienne, remplit l'ensemble des conditions de simplicité, rapidité et sûreté d'emploi exigé mais le feuilletage, obligatoire dès lors qu'il y a plusieurs observations quasi-simultanées à préparer et à traiter, reste un handicap ; de plus, si le petit format de la table est commode pour une manipulation dans un cockpit d'avion, le nombre de volumes qui la constituent (14) est rédhibitoire. Les recherches vont donc s'orienter vers une présentation des résultats de calcul d'observations d'étoiles sur une même page, dans une table qui restera de format commode et constituée d'aussi peu de volumes que possible. En octobre 1941, George G. Hoehne, instructeur à l'école de navigation de la Pan American Airways à Miami, propose à l'US Navy Hydrographic Office un projet de table, « Star Air Navigation Tables », qui présente la caractéristique essentielle recherchée : sur une double page, relative à une latitude fixée, les coordonnées horizontales de 10 étoiles soigneusement sélectionnées pour leur éclat et leur répartition dans le ciel sont calculées en fonction de valeurs entières de l'angle horaire sidéral local (angle horaire local du point vernal AHsg ou LHAγ) . Une telle présentation :

- supprime la recherche des ascensions verses ainsi que le calcul spécifique de l'angle horaire local de chaque étoile : on entre directement dans la table avec LHAγ, qui est un argument commun aux observations,
- donne, sans avoir à feuilleter, les coordonnées horizontales, hauteur et azimut, des étoiles observables et/ou observées au lieu considéré,
- indique les meilleurs recoupements d'observations.

En s'appuyant sur les calculs de la table HO218, G. Hoehne publia deux tables dont, notamment, en 1943 « Practical Celestial Air Navigation Tables ». Cette table, qui servira de modèle au document HO249, est utilisable sur la période 1942-1990 grâce à deux corrections permettant de s'affranchir des effets de la précession ; ces tables ont été éditées jusqu'en 1970. A la même époque, d'autres tables, du même genre, furent élaborées notamment au Japon (« Celestial Navigation Observation Table », pub. N° 351, en 1940-42, puis « Simplified Celestial Observation Table », pub. N° 603, en 1943), en Allemagne (« Hohentafeln nach Sternzeit » en 1944), en Argentine (« Calculo del Punto » de Ménéclier et Chevalier en 1945) et en France (« Table de Hauteur et d'Azimut, A. A. F. type 10 » en 1946). Aux États-Unis, la future table HO249, conçue par C. H. Hutchings (US Navy) en utilisant la présentation imaginée par G. Hoehne, fut publiée à titre expérimental en 1947 ; le volume est unique et est consacré aux étoiles : son titre est alors « Star Tables for Air Navigation ». Après une période d'essais et de mise au point, la première édition du volume I des « Sight Reduction Tables for Air Navigation », référencées sous le n° 249, est

publiée en 1951 avec le sous-titre « Selected Stars » ; cette publication fut suivie l'année suivante de celle des volumes II et III couvrant la sphère terrestre dans son ensemble et concernant les astres de déclinaison comprise entre 0° et 29° N et S. Ces trois volumes furent ensuite dupliqués par l'Amirauté britannique et publiés en 1952 et 1953 sous la référence AP3270 puis NP303. Ces tables ont été, depuis leur première édition, rééditées aux États-Unis comme en Grande-Bretagne, sans interruption. La table HO249, en trois volumes, a été conçue, initialement, pour la navigation aérienne ; les éléments calculés sont donc exprimés à la minute près pour la hauteur et au degré près pour l'azimut. À la différence de la table HO218, la correction de réfraction astronomique n'est pas intégrée à la hauteur calculée : cette hauteur est donc rapportée à l'horizon vrai ainsi qu'à la direction réelle (et non réfractée) de l'astre ; le traitement d'une observation à la mer s'effectue selon la procédure usuelle. Enfin, le calcul des éléments de la droite de hauteur s'effectuera toujours par rapport à un point auxiliaire dont la définition est celle indiquée dans l'utilisation des tables HO214 et 229.

Du fait de la précession et de la nutation de l'axe de rotation de la Terre, les coordonnées horizontales des étoiles calculées dans le volume I de la table HO249 le sont pour une année donnée ; un tableau donne les corrections à apporter pour une année différente située au maximum 4 ans avant ou après l'année de calcul ; le volume a donc une validité de 9 ans et doit être remplacé à l'échéance.

La présentation et le mode opératoire des trois volumes de la publication 249 sont détaillés en annexe 11-5.

Commentaires :

Le principal handicap des tables d'angles horaires de Davis et de Blackburne à triple argument – comme d'ailleurs de celles de leurs illustres prédécesseurs, Cassini et Lalande – est celui de l'interpolation, opération qu'il faut reconduire trois fois si on souhaite déterminer précisément le point déterminatif pour construire une droite de hauteur ; notons qu'il faudra, de plus, évaluer l'azimut de l'astre. Ce commentaire conduit à conclure que le calcul logarithmique basé sur l'une des formules générales donnant accès à l'angle au pôle est préférable. Le concept employé dans les tables de Littlehales HO203 et 204 est plus séduisant : les tables donnent accès simultanément à l'angle au pôle et à l'azimut et utilisent le procédé de détermination du point déterminatif conçu par Sir W. Thomson ; avec l'utilisation du point auxiliaire les interpolations sont réduites aux seules minutes de déclinaison. Il est cependant dommage que le domaine d'emploi de la table n'ait pas été mieux circonscrit pour éviter les circonstances de calcul éminemment défavorables : l'angle au pôle calculé d'un astre dans le voisinage de méridien n'a, en effet, qu'une valeur toute théorique, le procédé étant non seulement compliqué, puisque l'interpolation linéaire doit être remplacée par un autre artifice, mais aussi dangereux. On aura donc tout intérêt à traiter l'observation par la méthode de Marcq de Saint-Hilaire ou comme une circumméridienne, selon la méthode du méridien estimé.

Frédérik Ball et, dans une moindre mesure du fait de la diffusion confidentielle de ses tables, Georges De Lannoy sont probablement les précurseurs les plus directs des futures publications américaines modernes. L'usage du point auxiliaire et d'un intervalle d'argumentation assez large ont probablement dû faire réagir mais, dès la publication des tables de F. Ball, en 1907, ses détracteurs ont plutôt choisi de s'élever contre l'encombrement de l'ouvrage et le coût de l'ensemble. Il est exact que l'ouvrage peut être considéré comme lourd – quoique d'autres tables, comme les HO203-204 et 214, le seront beaucoup plus – et coûteux, mais ces arguments sont-ils pertinents face à l'excellente précision de ces tables et à la rapidité du calcul après choix d'un point auxiliaire ? Remarquons tout d'abord qu'en navigation courante, la latitude varie lentement d'un jour sur l'autre : un seul volume est donc en utilisation, les autres restants rangés dans la bibliothèque contenant les documents nautiques. En second lieu, on sait que, à bord d'un navire de commerce, la chambre des cartes et la table associée sont de dimensions en général largement suffisantes ; les facteurs encombrement et poids ne sont réellement gênants qu'à bord des petits navires – voilier de plaisance par exemple – ou de certains navires de guerre dont la table – souvent une simple boîte – à cartes est de petite dimension et à bord desquels la place était comptée. Ces deux cas mis à part, l'encombrement et le poids de l'ouvrage ne sauraient être retenus comme un défaut majeur. La caractéristique de coût est plus pénalisante, tout au moins dans la marine marchande, où, bien souvent à cette époque, l'armateur ne fournissait que l'équipement minimal nécessaire à la bonne marche de son navire. On sait que les usages étaient différents

d'une compagnie de navigation à l'autre mais il était courant, pour un officier chargé du quart à la passerelle, d'embarquer avec son propre équipement : jumelles, sextant et tables. Sur ce dernier point, l'officier visait très certainement le document simultanément maniable, simple d'emploi, précis, polyvalent et bon marché.

Les tables HO214 et 229 ont été réglementaires dans l'enseignement maritime américain (civil et militaire) et leur emploi est largement décrit et analysé dans les ouvrages de référence comme le Bowditch ou le Dutton's. En France, les commentaires relevés, ainsi que notre propre expérience, montrent que nous avons eu bien du mal à admettre l'outil de calcul simple et précis qui nous venait d'outre-Atlantique ; il est probable qu'il en fut de même en Grande-Bretagne. À ce sujet, le professeur d'hydrographie P. Hugon écrivait dans la revue de l'Institut français de Navigation en 1963 :

> « *La longue polémique des tables et des méthodes de tracé de la droite de hauteur à partir du point estimé ou du point auxiliaire est aujourd'hui dépassée. Encore que, sur de nombreuses passerelles, l'habitude, la routine, une économie surprenante et un certain masochisme perpétuent la tradition résignée du calcul logarithmique ; il est à peu près admis que les tables du type dictionnaire, à triple entrée sont vraiment les plus qualifiées pour traiter rapidement une observation avec le minimum d'écriture et d'opération machinales*. (…) ».

Cet extrait évoque le poids des traditions ; mais les tables HO214 puis HO229 et surtout HO249, faisant disparaître le calcul logarithmique et donnant rapidement un résultat d'une précision suffisante, faisaient sans doute ombrage aux gardiens du temple de la science nautique de l'époque : la facilité d'obtention du résultat risquait peut-être de mettre en péril un enseignement et des pratiques séculaires. Certains dogmes ont la vie dure car dans les années 1970, les « Tables Américaines » étaient encore regardées par certains comme une futilité, voir une indigne solution de facilité.

À notre connaissance, la table HO218 – qui constitue, rappelons-le, une version perfectionnée et adaptée à la navigation aérienne des Tables stellaires de G. De Lannoy – ne fut que peu utilisée à bord des navires. En revanche, la table HO249, notamment son volume I, qui fut au début introduite sur les passerelles des navires fréquentant régulièrement les ports américains, révolutionna progressivement les habitudes puisqu'elle permet simultanément de préparer et de calculer un point d'étoiles et, de par sa simplicité d'emploi, de multiplier les observations : les points faisant concourir 5 ou 6 étoiles sont ainsi devenus chose courante, le matin et le soir. Les volumes II et III, directement issus de la table HO214 dont ils constituent une version allégée, sont aussi d'une utilisation particulièrement simple, l'existence d'un volume consacré exclusivement aux étoiles permettant d'y limiter la déclinaison à 29°. En contrepartie la précision de calcul est dégradée puisque limitée à la minute. Sans entrer dans la polémique, cette précision est comparable à celle des mesures effectuées au sextant. L'ensemble est ainsi cohérent et permet d'obtenir rapidement et sûrement un point, ou un lieu de position, à environ 2 milles près, dans de bonnes conditions d'observations. On s'abstiendra donc des décimales dans l'écriture des intercepts.

Annexe 11-1 : Table de F. Ball.
Annexe 11-2 : Tables de Littlehales HO203 et HO204.
Annexe 11-3 : Tables HO214.
Annexe 11-4 : Publication 229.
Annexe 11-5 : Publication 249.

Chapitre 12

ABAQUES

Introduction :

L'usage du calcul graphique en astronomie et navigation est fort ancien et remonte sans doute à l'usage de l'astrolabe planisphérique conçu par les Grecs puis perfectionné et utilisé au Moyen Âge dans le monde islamique et l'occident chrétien. Plus près de nous, l'illustration la plus courante du calcul graphique est le quartier de réduction (figure 12-1) permettant de résoudre les problèmes de route et d'estime dans lesquels interviennent les rapports trigonométriques.

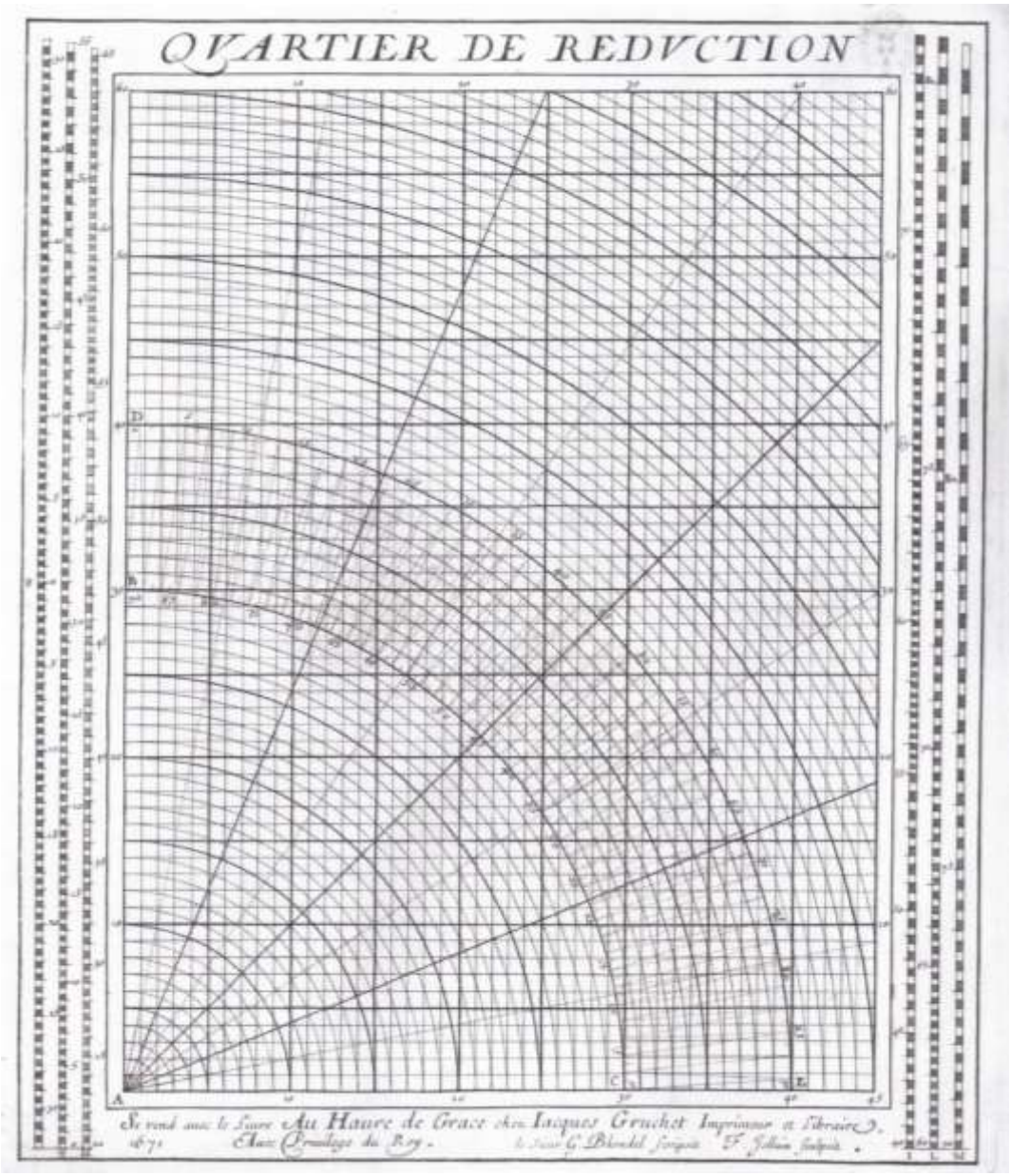


Fig : 12-1

On évoquera également le châssis de réduction de l'abbé Lacaille, conçu vers 1760 pour le traitement graphique des distances lunaires en vue du calcul de la longitude, suivi de la polémique avec Jean-Charles de Borda prônant

le calcul logarithmique ; l'avis de ce dernier finira évidemment par l'emporter, le calcul graphique ne pouvant rivaliser avec son équivalent numérique sur le plan de la précision. Quoi qu'il en soit, plusieurs chercheurs ont continué à explorer cette voie, essentiellement dans le but de mettre au point des outils de calcul donnant rapidement une solution approchée à certains problèmes courants de navigation.

Dans ce chapitre, il sera essentiellement traité des abaques, c'est-à-dire de « tables graphiques » qui se présentent comme un réseau de lignes cotées, avec des échelles convenablement graduées, donnant par simple lecture la valeur cherchée. Les anglo-saxons emploient facilement le terme « diagram » pour désigner les abaques utilisés en navigation ; le mot français « diagramme » est par contre incorrect pour désigner les tables graphiques. Quitte à faire quelques entorses à la chronologie, on a choisi de présenter en premier lieu les abaques d'azimut puis celles permettant l'évaluation des deux coordonnées sphériques, hauteur et azimut, ou déclinaison et angle horaire.

Weir's Azimuth Diagram, nomogramme Perret et graphique de Cornet :

Patrick Weir était capitaine au long cours et servait à bord d'un navire de ligne régulière entre la Grande-Bretagne et l'Australie lorsqu'il mit au point, en 1873, l'abaque d'azimut qui porte son nom et qui figure toujours au catalogue des documents commercialisés par le service hydrographique britannique. Effectuant chaque jour les observations et calculs de la variation du compas avec le Soleil, et sans doute lassé des opérations répétitives, il eut l'idée de construire un abaque lui donnant le résultat sans avoir à effectuer le calcul d'azimut par l'heure ; la construction dont P. Weir est l'auteur résulte d'une succession de déductions géométriques, sans qu'il soit fait appel à des notions de nomographie.

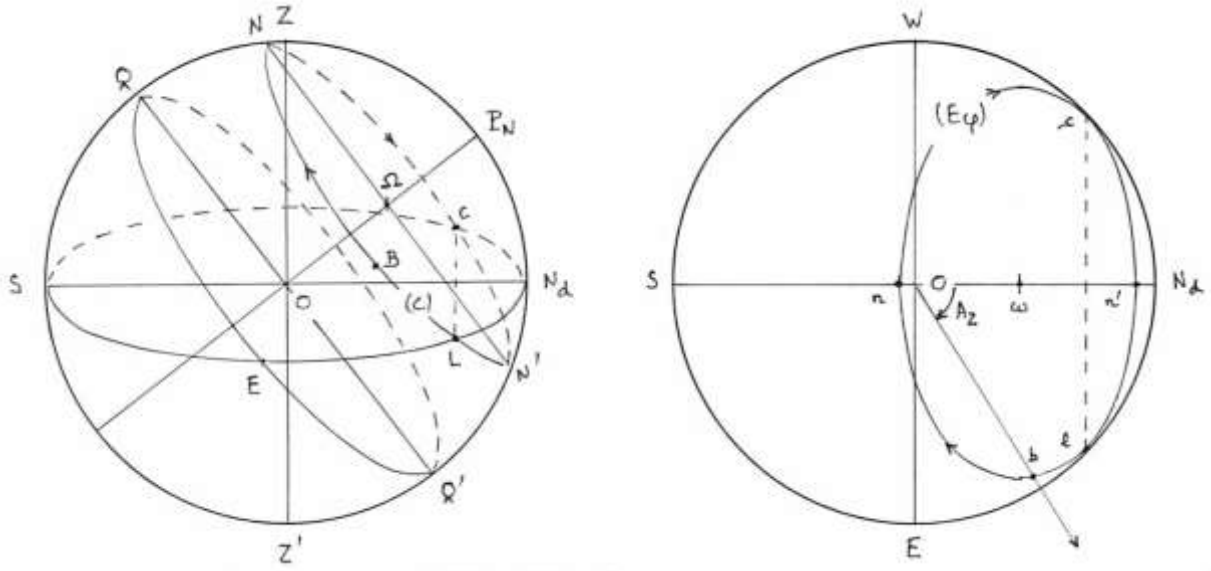


Fig : 12-2. On a représenté, à gauche, la sphère locale d'un lieu de latitude φ nord sur laquelle on a fait figurer le parallèle diurne (C) d'un astre de déclinaison D. La figure de droite est faite dans le plan de l'horizon limité par le cercle N_dESW ; l'ellipse (E_φ), est la projection orthogonale de (C) dans le plan de l'horizon ; cette ellipse est tangente au cercle horizon aux points l et c (correspondant au lever L et au coucher C de l'astre) ; les points ω (centre de l'ellipse), n et n' sont les projections de Ω, N et N'.

Sachant que la trajectoire apparente d'un astre sur la sphère locale de l'observateur est un cercle, le parallèle diurne (C), Weir constate que ce cercle se projette verticalement dans le plan de l'horizon selon un cercle au pôle Nord, un segment à l'équateur et, pour une latitude φ intermédiaire, selon une ellipse (E_φ). Si on sait placer facilement l'image b de l'astre B sur cette ellipse connaissant son angle au pôle, une simple lecture avec un rapporteur donnera l'azimut A_z cherché (figure 12-2). À ce stade de la recherche, il faudrait disposer, pour une latitude φ et une déclinaison de l'astre D données, de l'ellipse considérée (E_φ) ainsi que d'un réseau, également elliptique, correspondant aux projections des cercles horaires, repérés en angle au pôle, à la latitude φ, puis d'en rechercher la bonne intersection avec l'ellipse (E_φ). Le problème est donc impossible à résoudre en l'état. L'idée de Weir fut

de réduire toutes les ellipses correspondant aux différentes déclinaisons, pour une latitude φ donnée, à une seule dont le demi-grand axe correspond au rayon de la sphère puis de translater cette ellipse selon la trace du méridien jusqu'à ce que son centre vienne se confondre avec celui de la sphère. La première opération ne change en rien la direction dans laquelle l'observateur relève l'astre, mais la translation vient décaler le point de vue, ce dont il faudra tenir compte pour effectuer la mesure avec un rapporteur et, simultanément, dimensionner l'ellipse pour s'affranchir du paramètre latitude. À ce stade, on peut construire deux axes perpendiculaires, l'un étant la trace du méridien, ainsi qu'un réseau d'ellipses représentatif des latitudes de 0° à 65° avec un intervalle de 1° et, sur l'axe représentant le méridien, on porte les décalages de centre de degré en degré de déclinaison N et S. Il reste à placer l'astre sur l'ellipse considérée connaissant son angle au pôle à l'aide d'un autre réseau de courbes. Weir a tracé ce réseau référencé en angle au pôle toutes les 4 minutes d'heure – ou tous les degrés –, point par point, indiquant que les courbes étaient « *very much like a hyperbola* », ce qu'elles sont réellement. L'ensemble étant tracé, il est facile de placer l'image de l'astre à une intersection de l'ellipse et d'une branche d'hyperbole puis d'effectuer la mesure d'azimut avec un rapporteur par rapport au méridien et à partir du centre de mesure fixé par la déclinaison. L'explication, par les mots, de la genèse de l'abaque de Weir est quelque peu laborieuse, aussi détaille-t-on sa définition géométrique en annexe 12-1, comme énoncée par P. Weir ainsi que sa définition analytique, que ce dernier n'a pas pu établir, beaucoup plus simple à exprimer comme on le constatera.

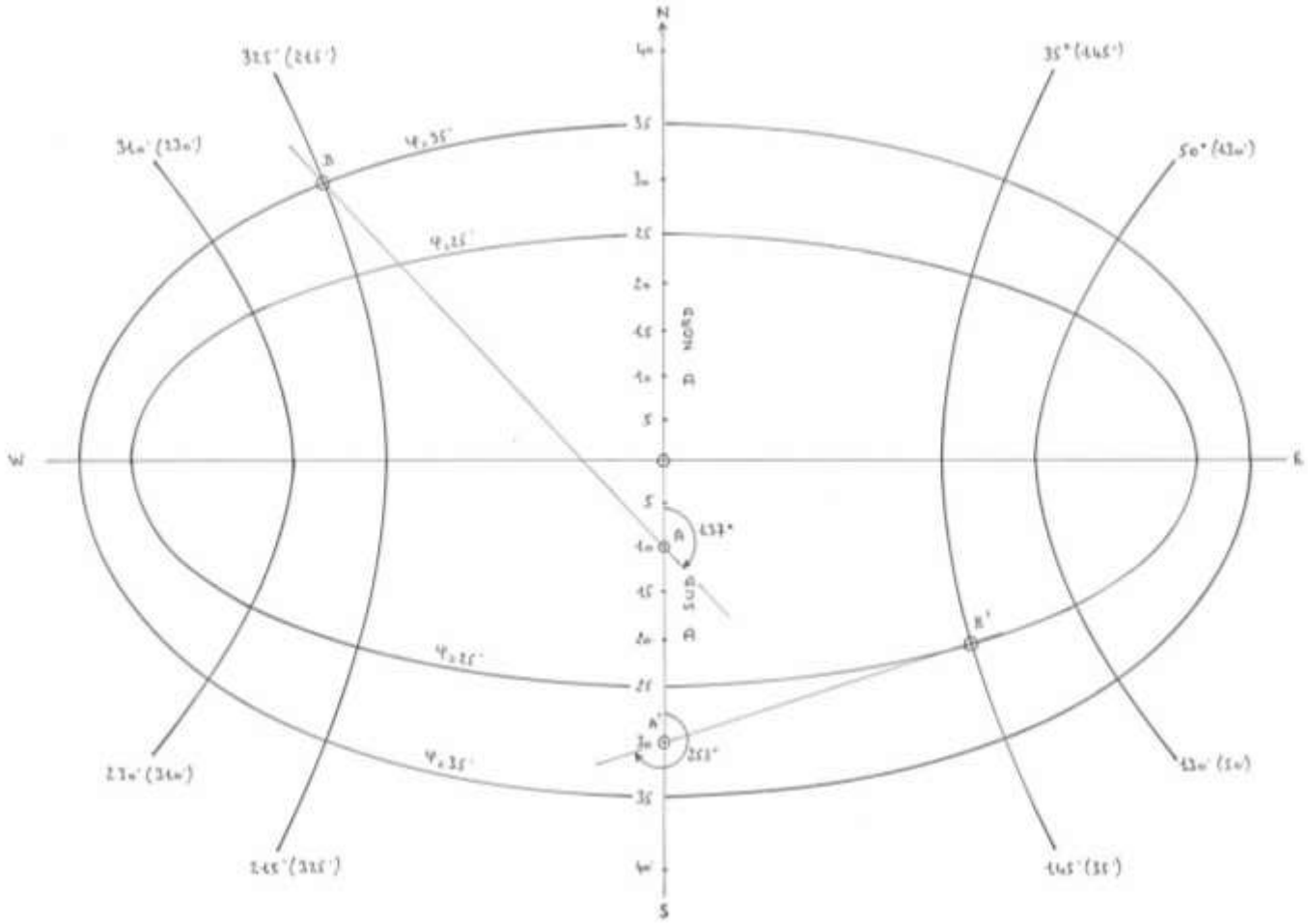


Fig : 12-3

La figure 12-3 représente un abaque de Weir simplifié pour lequel on a construit les ellipses relatives aux latitudes 25° et 35° et les branches d'hyperboles relatives aux angles horaires locaux 35° et 50°, 130° et 145°, 215° et 230°, 310° et 325°. On y a ensuite repéré deux exemples :

1) AHag = 325°, φ = 35° N et D = 10° S ; azimut lu sur BA : A_z = 137° ;
2) AHag = 035°, φ = 25° S et D = 30° S ; azimut lu sur B'A' : A_z = 253°.

L'idée de P. Weir, et sa réalisation artisanale, remontent à 1873 ; sa reconnaissance officielle n'a eu lieu qu'en 1889 devant la Royal Society of Edimburgh dans un mémoire rédigé par son auteur, complété sur le plan mathématique par le professeur P. G. Tait et présenté par Sir W. Thomson. L'abaque fut ensuite reconstruit avec précision et publié, au format d'une carte marine, par l'Amirauté britannique en 1890 puis, l'année suivante, aux États-Unis ; il est toujours disponible auprès du HM Hydrographic Office, dans une version actualisée en 1940, sous le titre de « Modified Weir's Azimuth Diagram ».

En France, on relève les travaux du lieutenant de vaisseau Eugène Perret qui s'était intéressé à la nomographie et qui publia en 1904 un mémoire sur quelques applications particulières à l'astronomie nautique dont le calcul d'azimut par l'heure. Par une voie différente, utilisant la théorie mise au point par Maurice d'Ocagne, E. Perret établit les formules de construction d'un nomogramme à points alignés, représenté en figure 12-4, et aboutit à l'équivalent d'une moitié de l'abaque de Weir dans laquelle les contours de latitude et d'angle horaire sont des branches d'hyperbole, la mesure de l'azimut se faisant sur un axe gradué situé à gauche du nomogramme. On y a représenté l'exemple 1 ci-dessus qui donne, à la lecture, A_z = S44°E = 136°.

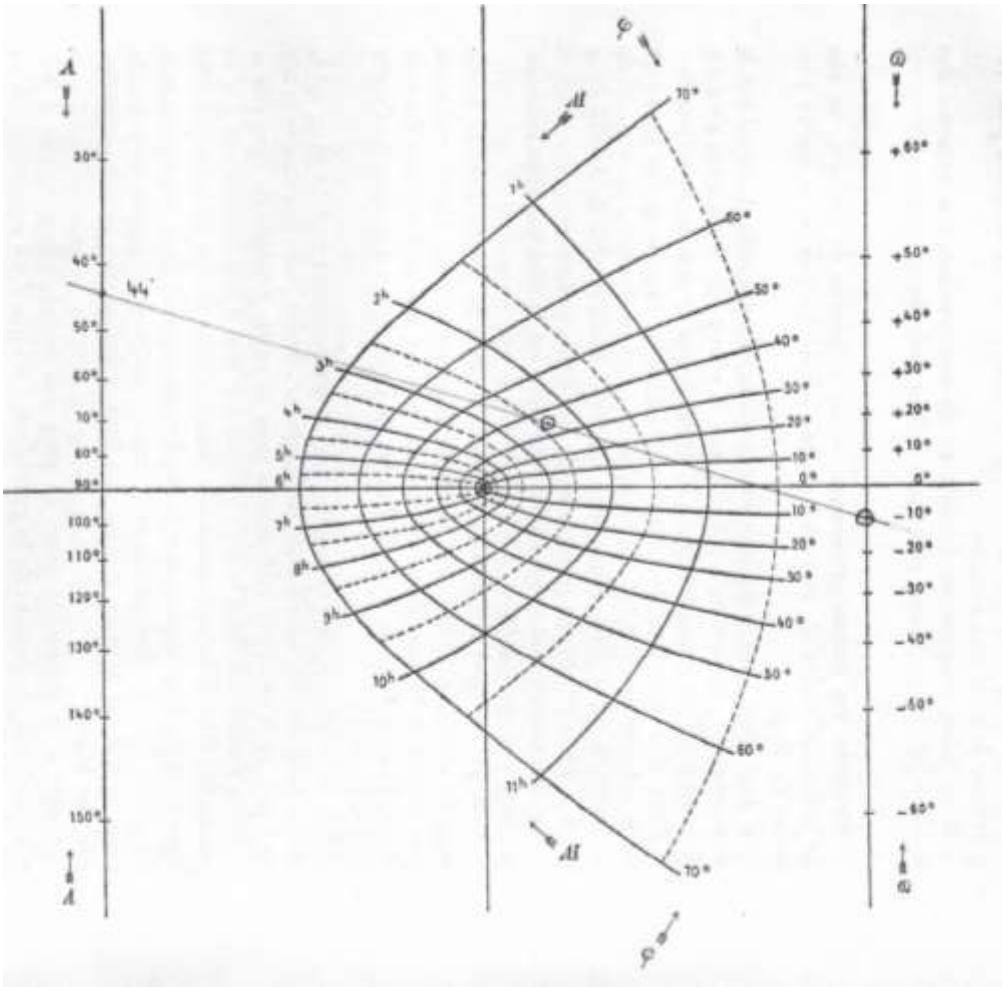


Fig : 12-4

Enfin, en 1927, le professeur d'hydrographie Charles Cornet, utilisant uniquement l'analyse mathématique, aboutit à un graphique analogue à l'abaque de Weir. La formulation utilisée est détaillée en annexe 12-1, à la suite du développement relatif à la recherche de Weir. Le graphique de Cornet, représenté en figure 12-5, est réduit à un seul quadrant, son utilisation étant identique à celle de l'abaque de Weir.

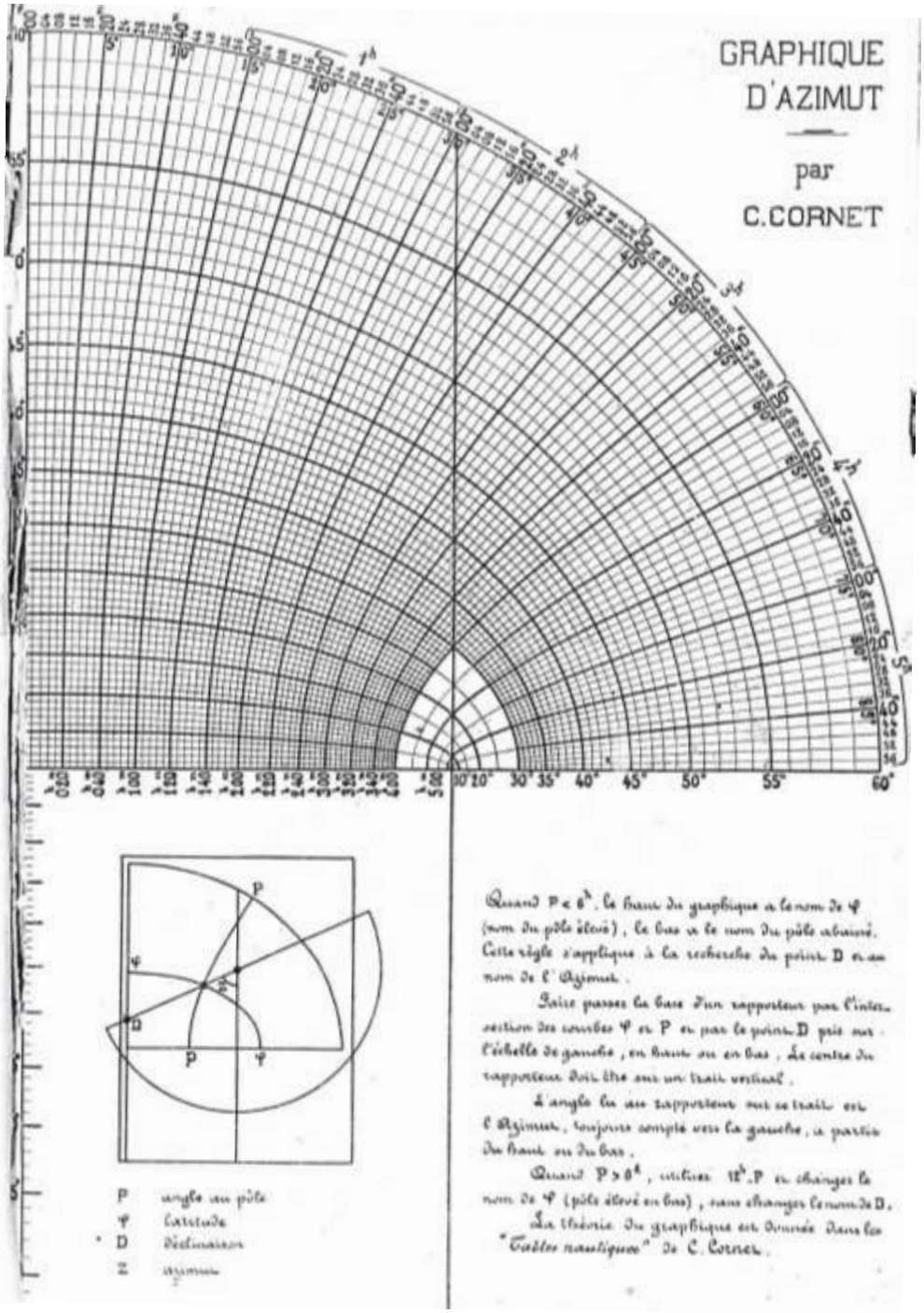

GRAPHIQUE
D'AZIMUT
par
C.CORNET
P angle au pôle
φ Latitude
D Déclinaison
Z Azimut
Quand P < 6h. le haut du graphique a le nom de φ (nom du pôle élevé), le bas a le nom du pôle abaissé. Cette règle s'applique à la recherche du point D et au nom de l'Azimut.
Faire passer la base d'un rapporteur par l'intersection des courbes φ et P et par le point D pris sur l'échelle de gauche, en haut ou en bas. Le centre du rapporteur doit être sur un trait vertical.
L'angle lu au rapporteur sur ce trait est l'Azimut, toujours compté vers la gauche, à partir du haut ou du bas.
Quand P > 6h, retirer 12h. P et changer le nom de φ (pôle élevé en bas), sans changer le nom de D.
La théorie du graphique est donnée dans les "Tables nautiques" de C. Cornet.

Fig : 12-5

Rust's Azimuth Diagram, Ix's Azimuth Diagram :

Armistead Rust, que l'on a présenté au chapitre 7, a mis au point et publié en 1908 un abaque permettant une évaluation de l'azimut que l'on notera ici Z. L'abaque est construit à partir de la formule donnant l'azimut par l'heure et la hauteur qui peut s'écrire sous la forme :

$$\sin Z \,.\, \cos H = \sin P \,.\, \cos D = Y$$

Dans un même plan, et à une même échelle, on construit le réseau des sinusoïdes $Y = \sin P \,.\, \cos D$ en fonction de l'angle au pôle P et pour des valeurs de la déclinaison D régulièrement espacées, de 5 en 5° par exemple. Ce réseau est aussi représentatif des sinusoïdes $Y = \sin Z \,.\, \cos H$ à valeurs de la hauteur H égales à celles prises pour D. Une fois l'abaque construit (figure 12-6), l'évaluation de l'azimut est particulièrement expéditive comme indiqué dans l'exemple ci-après.

Soit par exemple, un astre dont l'angle au pôle est P = 34° W, de déclinaison D = 30° de hauteur H = 45°. On mène une première horizontale pour P = 34°, jusqu'à couper la sinusoïde correspondant à D = 30° ; l'intersection est le point U d'abscisse Y. De ce point U, on mène une verticale, à abscisse constante Y, jusqu'à couper la courbe correspondant à H = 45° en V. À partir de V, l'horizontale donne, sur l'échelle de droite, l'angle Z cherché soit environ 43° dans ce cas. Il s'agit ici de l'azimut compté par quadrant ; sa détermination N ou S, qui peut être délicate lorsque l'astre est au voisinage du premier vertical, est fixée par un rapide relèvement au moment de l'observation, l'angle horaire local fixant ensuite la détermination E ou W.

Le principe en est donc extrêmement simple ; la lecture des graduations peut cependant être délicate dans certaines zones du diagramme, notamment pour les faibles valeurs d'angle au pôle.

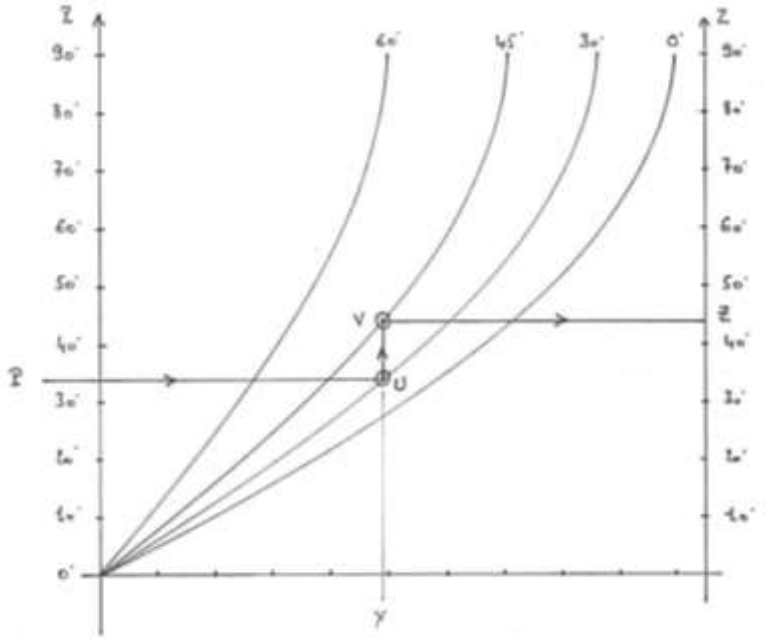


Fig : 12-6

Le Rust's Azimuth Diagram figure dans le « Line of Position Book » de P. V. H. Weems, représenté en deux parties de façon à conserver une échelle suffisante. La partie gauche de l'abaque est reproduite en figure 12-7 ci-après.

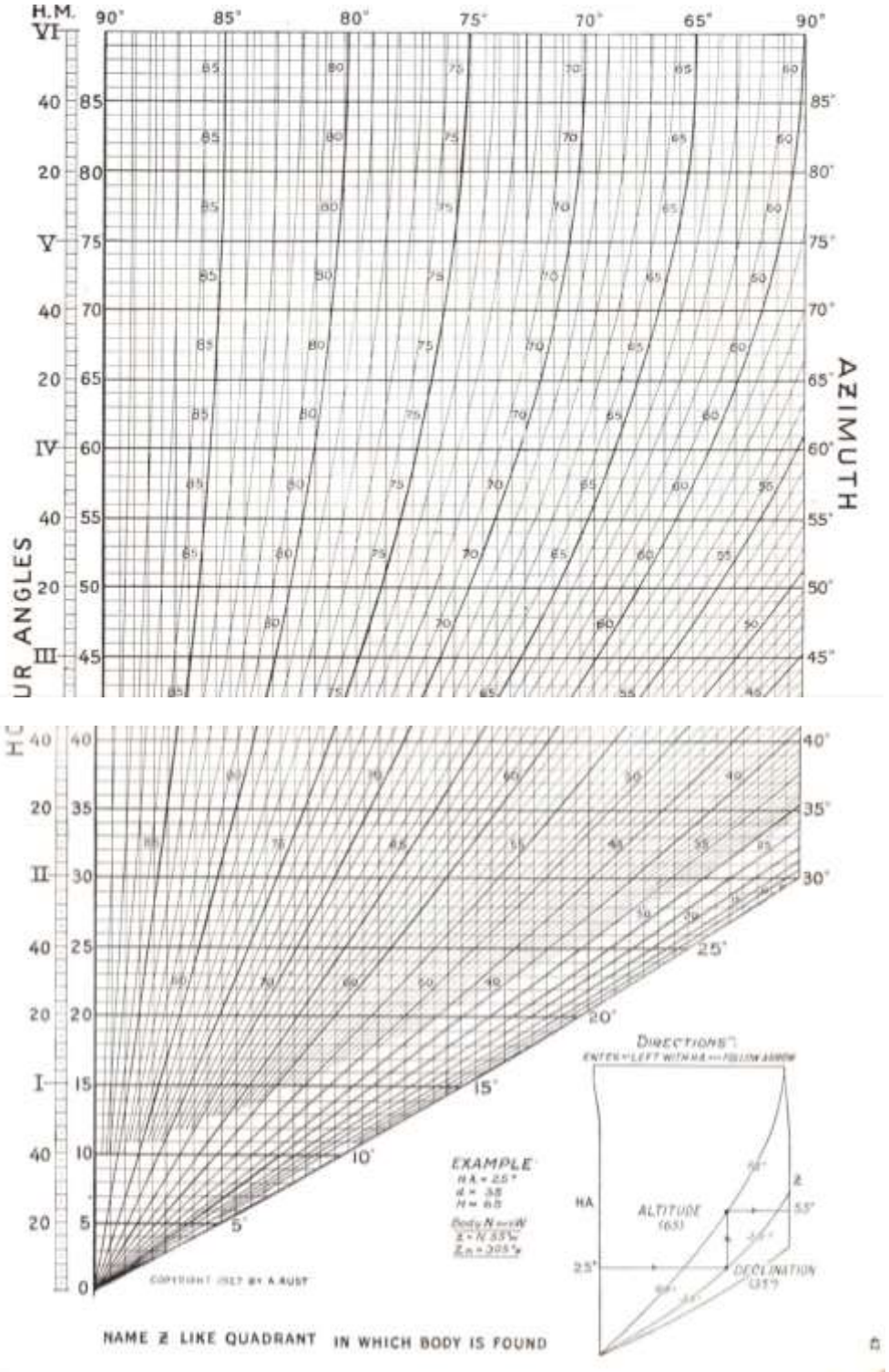


Fig : 12-7

L'abaque peut également être construit en portant déclinaison et hauteur en abscisse et angle au pôle et azimut en ordonnée et en représentant des courbes correspondant à des valeurs discrètes du produit sinus.cosinus. La figure 12-8 représente un abaque d'azimut mis au point en 2012 par Hanno Ix, ingénieur américain passionné de navigation astronomique ; le mode d'emploi est directement indiqué sur l'abaque.

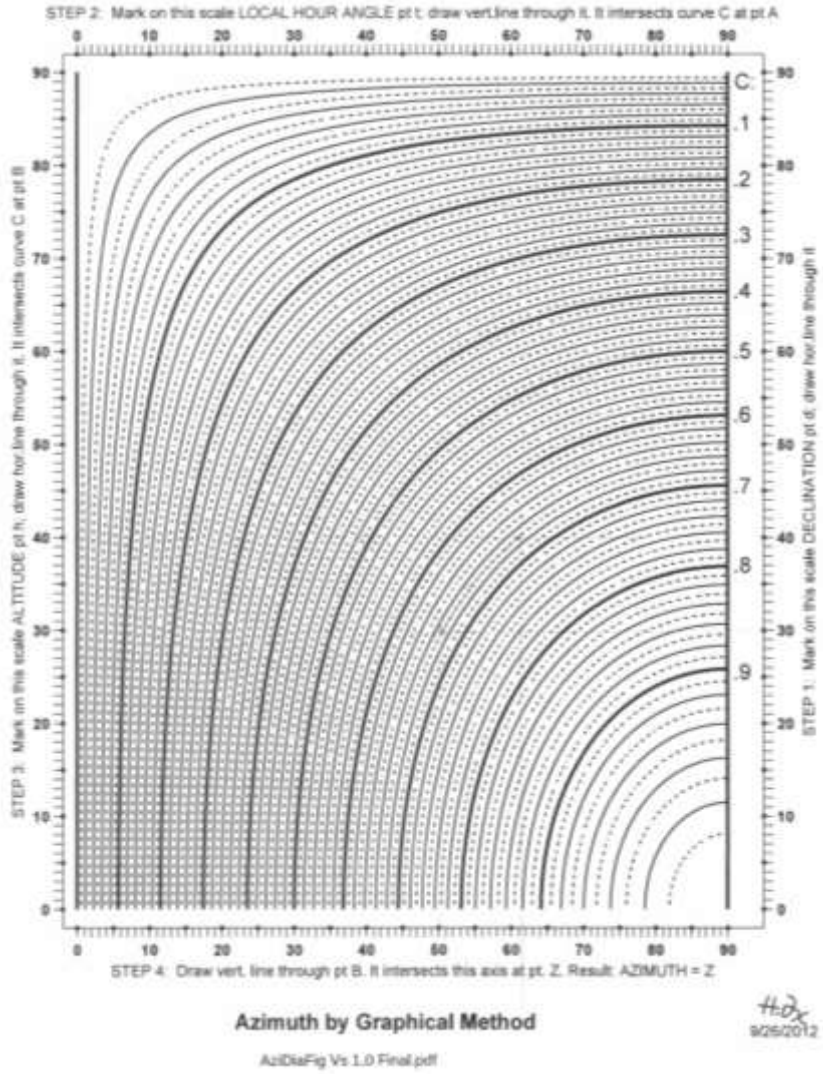


Fig : 12-8

Abaque d'azimut de P. Hugon :

Le professeur d'hydrographie Pierre Hugon avait déjà travaillé à la conception d'un abaque d'azimut en collaboration avec l'ingénieur hydrographe Victor George pendant la Seconde Guerre mondiale. Le fruit de cette recherche figure dans les tables de logarithmes de V. George, publiées en 1944 à Casablanca avec le concours du Service hydrographique de la Marine : l'abaque est construit sur la base de la formule dite des cinq éléments d'un triangle sphérique qui met en relation trois produits de rapports trigonométriques ; il est malheureusement d'utilisation compliquée et est, de plus, difficilement lisible du fait de la mauvaise qualité de l'impression. Pierre Hugon a donc poursuivi ses recherches, toujours basées sur la formule des cinq éléments, pour aboutir à l'abaque d'azimut, d'usage plus commode, figurant dans ses tables de calcul des éléments de la droite de hauteur publiées en 1947 (voir au chapitre 7).

Suite à plusieurs transformations élémentaires (voir annexe 12-2), la formule d'où sera extrait l'azimut est mise sous la forme :

$$L = \cos H \,.\, \cos A_z = \frac{\alpha + \beta}{2} + (\alpha - \beta).\frac{\cos P}{2} \quad \text{avec} \quad \alpha = \sin(D - \varphi) \quad \text{et} \quad \beta = \sin(D + \varphi)$$

À partir de cette expression, on peut construire l'abaque d'azimut représenté en figure d'études 12-9 ainsi qu'en annexe 12-2, comme suit :

- on choisit un axe horizontal dont l'unité de longueur est le segment OO'' (environ 18 cm sur l'abaque figurant dans la table) ; en O et O'', on trace deux axes verticaux ;
- l'axe vertical passant par O est gradué en $\sin(D - \varphi)$, l'axe vertical passant par O'' est gradué en $\sin(D + \varphi)$; les valeurs indiquées sur l'abaque sont directement celles des arcs correspondants, à reporter selon les signes de leurs valeurs algébriques indiquées sur l'abaque ;
- l'axe horizontal est gradué à partir du centre O' en 0,5.cos P, les graduations indiquées étant directement celles de l'angle au pôle correspondant ; 0° correspondant au point O, 90° au point O' et 180° au point O'' ;
- des cercles concentriques, de centre O, et de rayon cosH sont tracés, pour toutes valeurs entières de H jusqu'à 80° ; ces cercles sont repérés directement en valeurs de hauteur.

Le mode opératoire est alors le suivant :

- sur les axes verticaux, on repère les points d'ordonnées respectives D – φ (à gauche) et D + φ (à droite) et on trace la droite joignant ces deux points ;
- on repère le point caractéristique de l'angle au pôle sur l'axe horizontal (H) et on trace une verticale jusqu'à couper en K' la droite définie ci-dessus ;
- HK' peut se décomposer en deux parties : O'K et H'K' ; O'K est l'ordonnée moyenne de la partie de la droite interne aux axes verticaux, soit (α + β)/2 algébriquement ; H'K' est égal à H'K multiplié par la pente (α – β) de la droite, soit 0,5.cosP.(α – β) ;
- la longueur du segment HK' est donc représentative de la quantité :

$$L = \frac{\alpha + \beta}{2} + (\alpha - \beta).\frac{\cos P}{2}$$

- partant du point K', on mène une horizontale jusqu'au cercle caractéristique de la hauteur H_e : soit M le point d'intersection ;
- la direction du segment OM est l'azimut A_z cherché, compté à partir du pôle élevé ou du pôle Nord suivant la convention de signe prise.

En effet, nous avons bien : $HK' = L = OM.\cos A_z = \cos H.\cos A_z$.

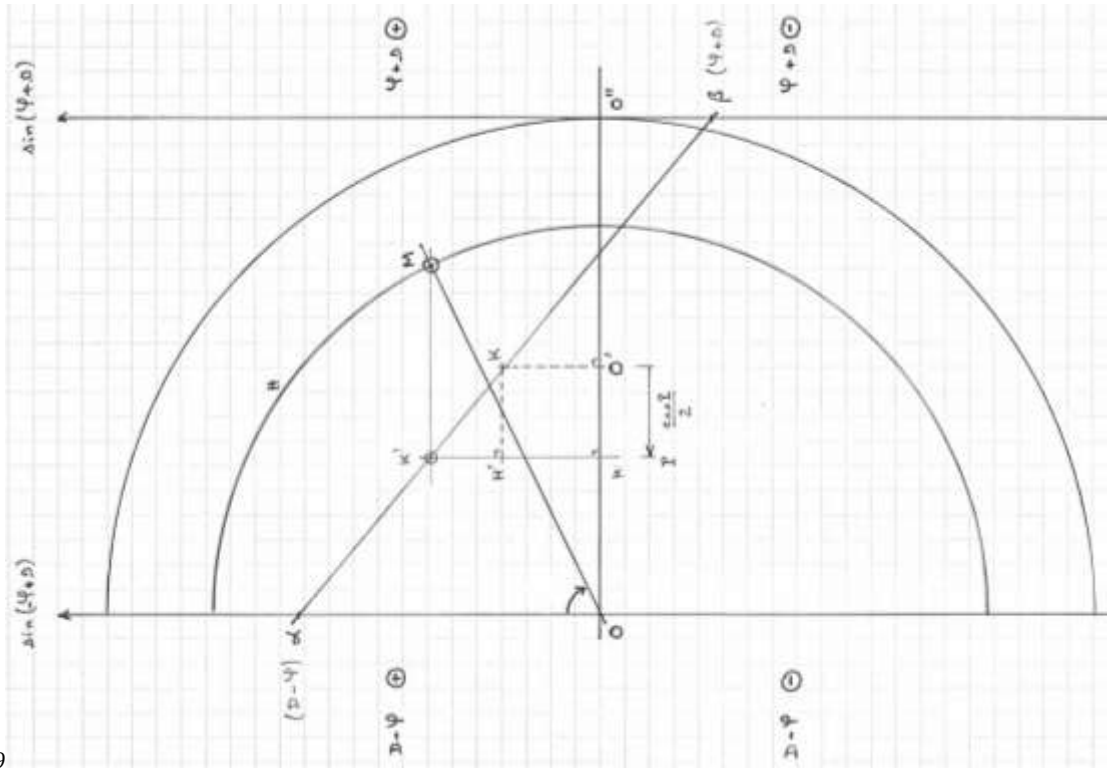


Fig : 12-9

Abaque d'Ocagne :

Maurice d'Ocagne (1862-1938) était polytechnicien (promotion 1880) et ingénieur des Ponts et Chaussées. C'était également un mathématicien de talent, promoteur, en France, des techniques – qu'il a baptisé nomographie – de résolution graphique d'équations par l'emploi d'abaques. Ses travaux dans ce domaine firent l'objet de nombreux mémoires et articles publiés dans des revues spécialisées ainsi que d'ouvrages de références dont un premier recueil, qu'il intitule « Nomographie », en 1891 suivi d'un « Traité de Nomographie » publié en 1899 chez Gauthier-Villars. Dans ce traité figure la description et la théorie d'abaques relatifs à la résolution des triangles sphériques. Dans le domaine de la navigation, cet abaque peut être utilisé, entre autre, pour déterminer la hauteur et l'azimut d'un astre connaissant la latitude de l'observateur, l'angle au pôle et la déclinaison de l'astre.

À partir de la formule fondamentale, M. d'Ocagne établit deux expressions utilisant la fonction haversine, l'une donnant la distance zénithale (notée ici N) en fonction de l'angle au pôle P et des quantités latitude plus ou moins déclinaison ($\varphi \pm D$), l'autre la distance polaire δ en fonction de l'azimut Z (ou A_z) et des quantités latitude plus ou moins hauteur ($\varphi \pm H$). Il établit ensuite que ces deux expressions sont les équations de deux droites dans un repère orthonormé convenablement gradué (voir annexe 12-3) qui constitue l'abaque représentée en figure 12-10.

Pour déterminer la hauteur d'un astre connaissant latitude, déclinaison et angle au pôle, il suffit de calculer les quantités ($\varphi - D$) et ($\varphi + D$), en valeur absolue, et de repérer les points correspondants sur les bords respectifs gauche et droit de l'abaque puis de tracer la droite D_1 passant par ces deux points. On entre ensuite sur l'axe des abscisses avec l'angle au pôle et on recherche le point d'abscisse P sur la droite D_1 ; son ordonnée est la distance zénithale cherchée N dont on prend le complément pour obtenir la hauteur H. Concernant la recherche de l'azimut, on calcule les quantités ($\varphi - H$) et ($\varphi + H$) définissant ainsi une droite D_2 selon un processus similaire à celui utilisé pour D_1 et on entre ensuite en ordonnée avec la distance polaire δ ; l'azimut est l'abscisse du point de D_2 d'ordonnée δ. Sur la figure 12-10 on a représenté le procédé de détermination de la hauteur et de l'azimut d'un astre d'angle au pôle P = 50° W, de déclinaison D = 20° S en un lieu de latitude φ = 45° N ; on obtient une hauteur d'environ 11° et un azimut Z = 227°.

Il est à remarquer que la droite D_1 est caractéristique du mouvement diurne de l'astre ; ses passages aux méridiens supérieur et inférieur sont caractérisés par P = 0° et P = 180°, ses lever et coucher vrais par N = 90° ; on pourra alors tracer la droite D_2 correspondante et déterminer les azimuts aux lever et coucher.

La construction du diagramme d'Ocagne est particulièrement simple, de même que son utilisation, exempte de toute règle compliquée de signe ou de détermination. La contrepartie de cette simplicité est le manque de précision, tout au moins dans les zones correspondant à des arcs de mesure voisine de 0° ou de 180°. Pour obtenir une bonne précision, il faut agrandir le diagramme : un diagramme de 1 mètre de côté conduirait à un écart de 1,5 mm/° à 10°, de 6,1 mm/° à 45° et 8,7 mm/° à 90°. On sait que l'on est limité dans le sens d'un agrandissement et le diagramme, qui ne peut être fractionné puisqu'il faut tracer la droite d'un côté à l'autre, restera donc toujours relativement imprécis. Toutefois, la précision reste compatible avec celle requise pour un calcul d'azimut, de même qu'avec celle nécessaire à l'identification d'un astre : dans ce dernier cas, on utilise les formules établies ci-dessus en inversant les inconnues qui sont alors la déclinaison et l'angle au pôle.

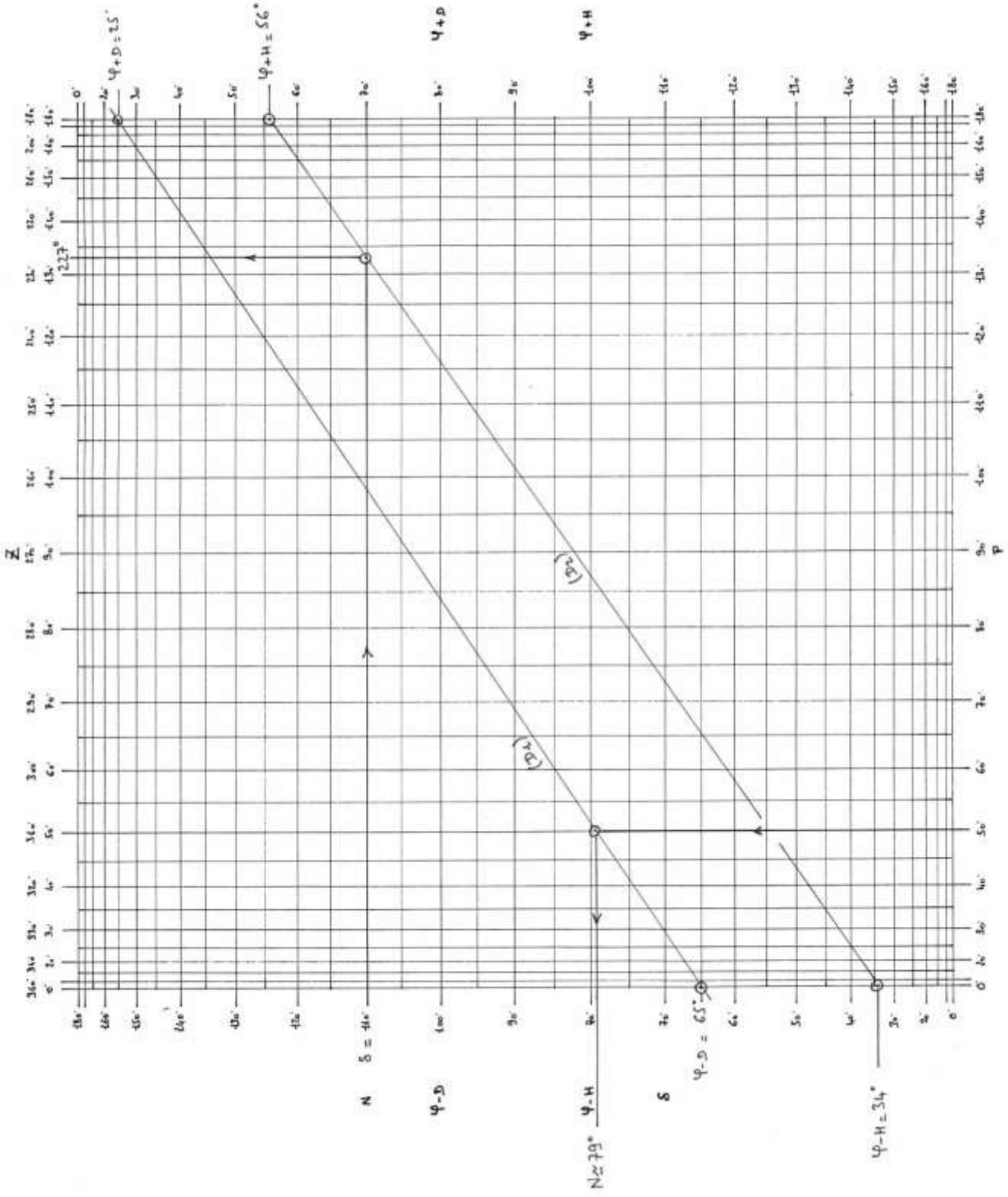


Fig : 12-10

Abaque de Favé et Rollet de l'Isle :

Louis Favé (1853-1922) et Charles Rollet de l'Isle (1859-1943) étaient ingénieurs hydrographes de la Marine ; ils se sont attachés à concevoir un outil de calcul fournissant rapidement les données nécessaires à la construction d'une droite de hauteur selon le procédé mis au point par Marcq de Saint-Hilaire. Leur démarche est motivée par la nécessité du contrôle précis, et surtout plus fréquent, de l'estime consécutif à l'augmentation de la vitesse des navires (paquebots et bâtiments de guerre) : l'officier de quart est ainsi conduit à consacrer un temps plus important aux calculs des observations, ce qu'il convient d'essayer de réduire tout en limitant les risques d'erreur. Ils ont constaté le foisonnement des recherches dans le domaine des tables et l'intérêt qu'il y avait à tenter d'obtenir de nouvelles simplifications. Dans ce but, ils ont choisi d'adopter une méthode graphique et ils en justifient le choix dans le chapitre introductif de leur mémoire « Abaque pour la détermination du point en mer » paru en 1892 dans les Annales Hydrographiques puis en janvier 1893 dans la Revue Maritime et Coloniale :

> « *Les méthodes graphiques tendent de plus en plus à remplacer le calcul dans un très grand nombre d'applications. On leur reconnait de grands avantages : la rapidité est plus grande, la fatigue moindre, les chances d'erreur diminuent. Ces avantages, reconnus lorsque le calculateur peut travailler en toute tranquillité d'esprit, ne sont-ils pas encore plus grands pour le marin obligé d'opérer dans des circonstances où son attention doit être toujours en éveil pour parer tout de suite à toutes les éventualités ?* ».

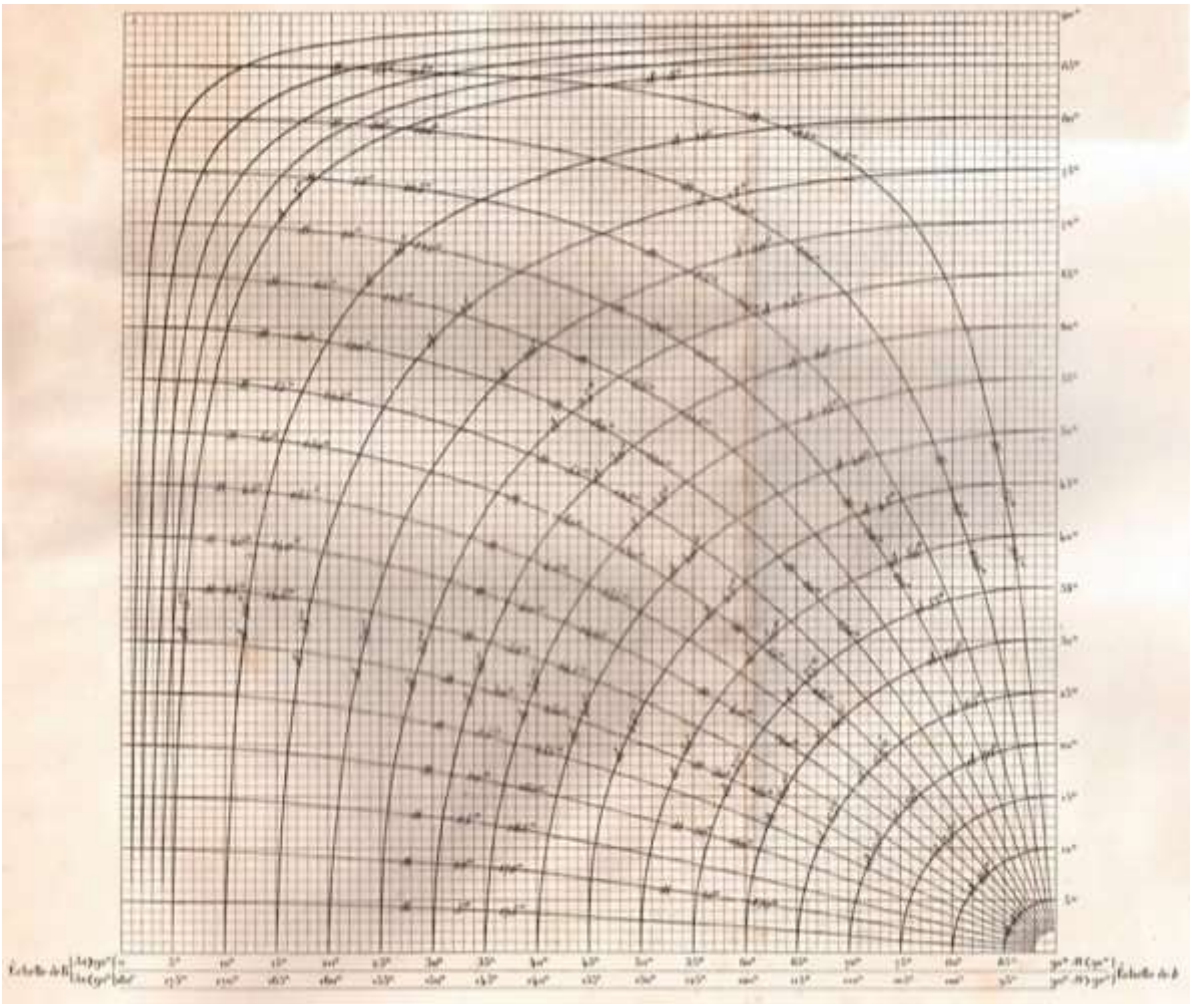


Fig : 12-11

S'ils font référence à Maurice d'Ocagne, promoteur, en France, de la nomographie, concernant la théorie des abaques, l'outil de calcul conçu par Favé et Rollet de l'Isle est une réalisation originale dont la conception relève simultanément du calcul et de la géométrie puisque l'on peut aussi définir le canevas de l'abaque à l'aide d'une projection de la sphère terrestre.

Le principe de calcul des éléments de la droite de hauteur retenu par Favé et Rollet de l'Isle est basé sur la décomposition du triangle de position en deux triangles rectangles selon la hauteur issue de l'astre ; les éléments connus étant l'angle au pôle, la déclinaison et la latitude, ils utilisent les deux formules faisant intervenir les deux côtés de l'angle droit successivement dans les deux triangles rectangles (voir l'annexe 12-4). Dans un plan dans lequel a été défini un système d'axes rectangulaires portant en abscisse et en ordonnée les valeurs angulaires de ces deux côtés, ils construisent les courbes représentatives des deux fonctions, selon les valeurs respectives de la déclinaison (respectivement de la hauteur) et de l'angle au pôle (respectivement de l'azimut). On obtient ainsi deux réseaux de courbes, tracés pour toutes valeurs entières du paramètre et subdivisés toutes les 10'. La figure 12-11, extraite du mémoire de présentation de l'abaque par ses auteurs dans la Revue Maritime et Coloniale de 1893, représente les réseaux expérimentaux de courbes avec un intervalle entre valeurs des paramètres de 5°.

La connaissance de l'angle au pôle et de la déclinaison permet de placer sur les réseaux un point représentatif E à l'intersection des courbes correspondantes sur l'abaque, comme indiqué sur la figure d'études 12-12. Ce point a pour abscisse b et ordonnée a. L'abaque permet ensuite la détermination de la hauteur et de l'azimut directement à partir de a, en restant donc à la même ordonnée, et de l'abscisse B = b + λ, λ représentant ici la colatitude du lieu (voir annexe 12-4). On fixe ainsi un point E' pour lequel on lira, par interpolation entre les courbes les valeurs cherchées : la hauteur (courbes « déclinaison ») et l'azimut (courbes « angle au pôle »). L'application figurant sur la figure 12-12 illustre le problème avec un astre d'angle au pôle P = 60°, de déclinaison D = 10° N dont il s'agit de trouver la hauteur et l'azimut en un lieu de latitude φ = 50° N (soit λ = 40°) ; avec un relevé soigneux, on arrive à H = 26,7° et Z = 107°.

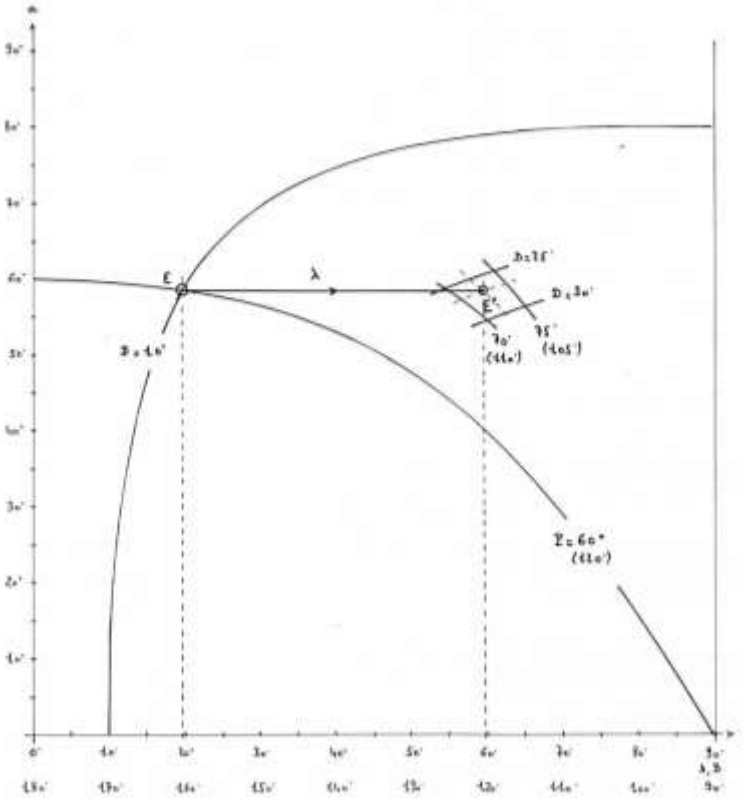


Fig : 12-12

Le niveau de précision des résultats est évidemment lié à l'échelle utilisée pour construire l'abaque, donc, à la taille de la feuille de papier utilisée. À l'époque les cartes marines étaient imprimées sur un papier dont les dimensions ne pouvaient excéder le format dit « grand aigle » soit 75 sur 105 cm, ce qui sera finalement choisi,

l'abaque étant ramené à un carré de 99 cm de côté partagé horizontalement en deux parties ; l'ensemble sera donc imprimé sur deux feuilles. Dans ces conditions, l'échelle est de 11 mm par degré et les courbes sont tracées de 10' en 10' ; l'intervalle minimal entre deux courbes est alors de 1,83 mm. La figure 12-13, extraite du mémoire de présentation, représente une portion de l'abaque de 10° sur 10° « à l'échelle d'exécution ». Les auteurs indiquent que l'on « (…) *interpole facilement à vue à 1/10 près ; on obtient donc une approximation de 1'.* »

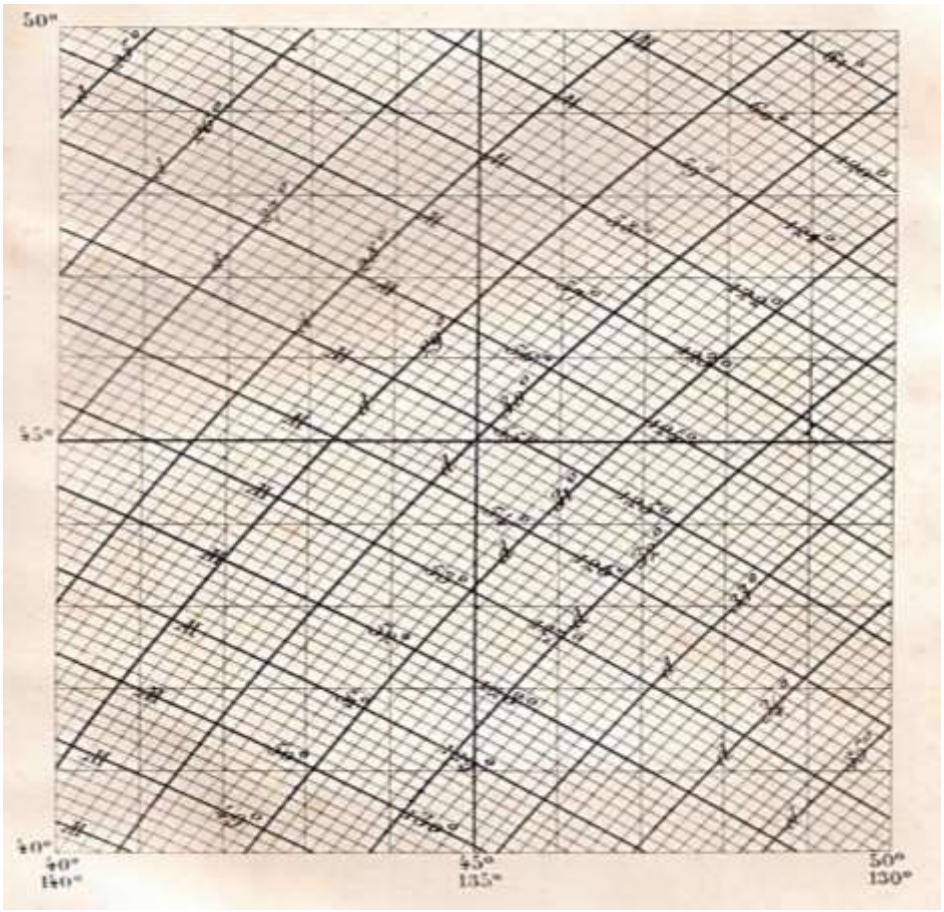


Fig : 12-13

On émettra ici quelques doutes sur l'approximation de la minute qui paraît bien optimiste et ne peut raisonnablement être atteinte que dans d'excellentes conditions de travail, notamment d'éclairage ; il paraît plus réaliste d'annoncer le dixième de degré (soit 6') ce qui est excellent pour l'azimut mais un peu grossier pour la hauteur. La mesure peut être affinée en évitant tout trait ou marque au crayon et en utilisant exclusivement un compas à pointes sèches associé à une échelle d'interpolations. Dans ces conditions, on peut prétendre à une précision de l'ordre de 2 à 3'.

L'abaque de Favé et de Rollet de l'Isle a été conçu à l'origine pour effectuer le calcul de transformation des coordonnées horaires (P, D) aux coordonnées horizontales (Z, H). La transformation inverse est naturellement tout aussi simple à effectuer et l'abaque pourra être utilisé pour effectuer un simple calcul d'angle horaire ou procéder à l'identification d'un astre observé. L'abaque peut également être employé pour effectuer les calculs de navigation orthodromique. À la différence d'autres abaques, il n'y a aucun tracé, ni construction graphique, à effectuer sur le papier, ce qui autorise le fractionnement de l'abaque en autant de partie que l'on désire, ceci afin de réduire l'encombrement et/ou, simultanément, d'agrandir l'échelle, donc la précision des relevés ; on note de plus que l'exactitude du relevé ne sera que peu altérée si le support a subi des déformations (du fait de l'humidité notamment). L'abaque de Favé et Rollet de l'Isle fit notamment l'objet d'une édition particulière à l'initiative d'Eugène Pereire, président de la Compagnie Générale Transatlantique, en 4 feuilles à l'échelle de 12 mm par degré, en 1894 ; il a aussi été reproduit tel quel, fractionné en 54 tableaux, par S. de Neufville dans son ouvrage « La Navigation sans logarithmes », publié à l'attention des navigateurs de plaisance en 1945 et réédité en1950.

Tables graphiques de Constan :

Paul Constan (1869- ?) était officier de marine puis professeur d'hydrographie à partir de 1899 ; il a notamment enseigné à Agde jusqu'en 1904 puis à Saint-Brieuc. Il est l'auteur de plusieurs ouvrages à l'attention des élèves des écoles d'hydrographie et des officiers de la marine marchande : on relève un « Cours d'Astronomie et de Navigation », en deux tomes, publiés en 1903 et 1904 ; cet ouvrage sera plusieurs fois réédité et comportera trois volumes dans ses dernières éditions, à la fin des années 1930. On relève également un « Cours de trigonométrie sphérique » publié en 1906 « *à l'usage des marins et des personnes qui ont en vue l'étude de l'astronomie ou de la géodésie* ». Les travaux de recherches qu'a mené P. Constan avaient pour objectif essentiel la simplification des calculs nautiques et leur conduite aussi sûre que possible ; il est visiblement peu attiré par l'usage du point auxiliaire et par les tables de résolution des triangles rectangles à double argument (Aquino, Bertin, de Catalano etc) et s'oriente vers la conception de tables de logarithmes à 5 décimales destinées à effectuer le calcul classique de la hauteur estimée par la méthode semi-logarithmique, ainsi que vers l'outil de calcul graphique. Il publie ainsi dès 1904 un recueil de tables « *permettant de simplifier et d'abréger les calculs nautiques en évitant les interpolations* » et une première version des « Tables graphiques d'azimuts » en 1906. Ces deux ouvrages furent mis à jour et réédités en 1927 pour les « Tables graphiques d'azimuts » et 1930 pour les « Tables de logarithmes à cinq décimales et tables nautiques usuelles », les deux documents étant conçus pour être reliés ensemble.

Dans l'avertissement des tables graphiques d'azimuts, P. Constan écrit, en 1927 :

> « *L'étude des remarquables travaux de MM. Favé et Rollet de l'Isle, Ingénieurs hydrographes de la Marine, sur la détermination du point rapproché au moyen d'un abaque, nous a conduit à rechercher si, dans le même ordre d'idées, il ne serait pas possible de trouver une relation ayant l'avantage :*
>
> 1) *De donner le relèvement et la hauteur au moyen d'échelles à divisions égales, afin de rendre plus commodes les lectures de ces éléments ;*
> 2) *De permettre de lire le relèvement et la hauteur sur des échelles dont la disposition rappelle celle de ces coordonnées sur la sphère céleste, afin de réduire le plus possible les chances de confusion ;*
> 3) *De donner ces éléments au moyen de graphiques de dimensions très réduites et permettant, néanmoins, d'avoir une approximation largement suffisante pour tous les besoins de la pratique.*

On ne peut être plus clair dans l'exposé des objectifs que P. Constan atteindra sur la base de l'abaque de Favé et Rollet de l'Isle. Comme ces derniers, il fondera son raisonnement de calcul sur la décomposition du triangle de position en deux triangles rectangles selon la hauteur issue de l'astre, en utilisant successivement les deux mêmes formules de résolution (voir annexe 12-4), l'impératif étant ici de placer l'angle au pôle (longitude de l'astre) en abscisse et la déclinaison (latitude de l'astre) en ordonnée ; par conséquent, on lira l'azimut sur l'axe des abscisses et la hauteur sur celui des ordonnées. On obtient en définitive une « carte plate » dans laquelle le canevas des méridiens et parallèles est constitué de deux réseaux de droites perpendiculaires également espacées. Les deux réseaux de courbes seront ici calculés à partir d'un angle (P ou Z) et de la cohypothénuse (D ou H) et tracés pour des valeurs discrètes des deux côtés de l'angle droit. Comme dans le cas de l'abaque de Favé et Rollet de l'Isle, la recherche graphique de la hauteur et de l'azimut d'un astre dont on connaît l'angle au pôle P et la déclinaison D, en un lieu de latitude φ connue, se fait en deux temps (figure 12-14) :

- marquer le point E d'abscisse P et d'ordonnée D et relever sur l'abaque les arcs a et b,
- évaluer b + λ, λ étant la colatitude du lieu,
- suivre la courbe représentative de a (côté commun aux deux triangles rectangles) jusqu'à son intersection E' avec la courbe représentative de b + λ,
- lire les coordonnées Z et H de E'.

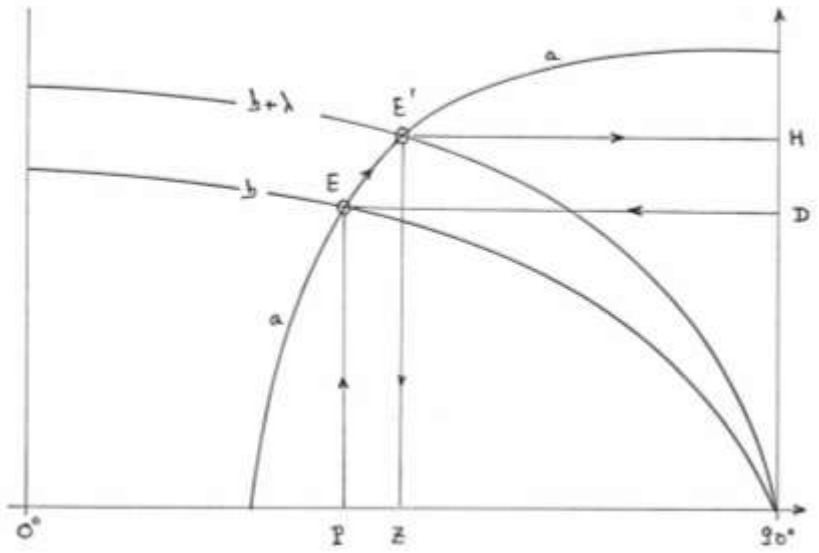
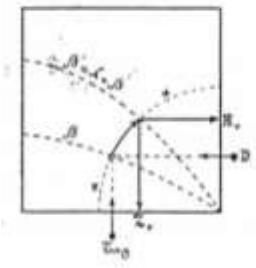


Fig : 12-14

Pratiquement, l'abaque est construit sur la base d'un carré de 36 cm de côté, ce qui correspond à une échelle de 4 mm par degré sur les deux axes de coordonnées. L'abaque est ensuite fractionné en 4 parties de 18 cm de côté (soit 45°) qui constituent 4 pages impaires successives de l'ouvrage, la page paire située en vis-à-vis rappelant le mode opératoire de résolution des principaux problèmes. Avec ces dispositions, P. Constan a ainsi atteint l'ensemble des objectifs qu'il s'était fixés.

Les extraits reproduits en figure 12-15 représentent une partie de deux pages des tables graphiques dans laquelle on illustre la recherche de l'azimut et de la hauteur d'un astre d'angle au pôle P = 60° (4 h), de déclinaison D = 10° N en un lieu de latitude φ = 50° N. On remarque qu'il n'est pas nécessaire de noter l'élément a (aussi noté α) mais qu'il convient de suivre un parcours curviligne que l'on interpole à vue jusqu'à venir couper la courbe, également interpolée à vue, correspondant à β + λ ≈ 19,5° + 40° = 59,5°. On lit donc, approximativement, un azimut Z = S72,5° (E ou W suivant la valeur de l'angle horaire local) et une hauteur de 25,7°. Le mode opératoire d'une recherche des coordonnées horizontales figurant dans le document, en page paire, est reproduit ci-dessous.



RELÈVEMENT ET HAUTEUR

β { aigu si Tag est compris entre 0h et 6h ou entre 18h et 24h.
  { obtus si Tag est compris entre 6h et 18h.

β { + si L et D même nom.
  { − si L et D noms contraires.

$\beta' = \lambda + \beta$ (si $\lambda + \beta < 180°$) $\beta' = \lambda + \beta - 180°$ (si $\lambda + \beta > 180°$)

Compter Z_v { du pôle élevé si $\lambda + \beta$ est comprise entre 90° et 270°.
  { du pôle abaissé si $\lambda + \beta$ est inférieure à 90°.

Donner à H_v le signe { + si $\lambda + \beta$ est positive et inférieure à 180°.
  { − si $\lambda + \beta$ est négative ou supérieure à 180°.

Nota : la notation b est notée β par Constan, L est la latitude et Tag est le temps local de l'astre, c'est-à-dire son angle horaire local.

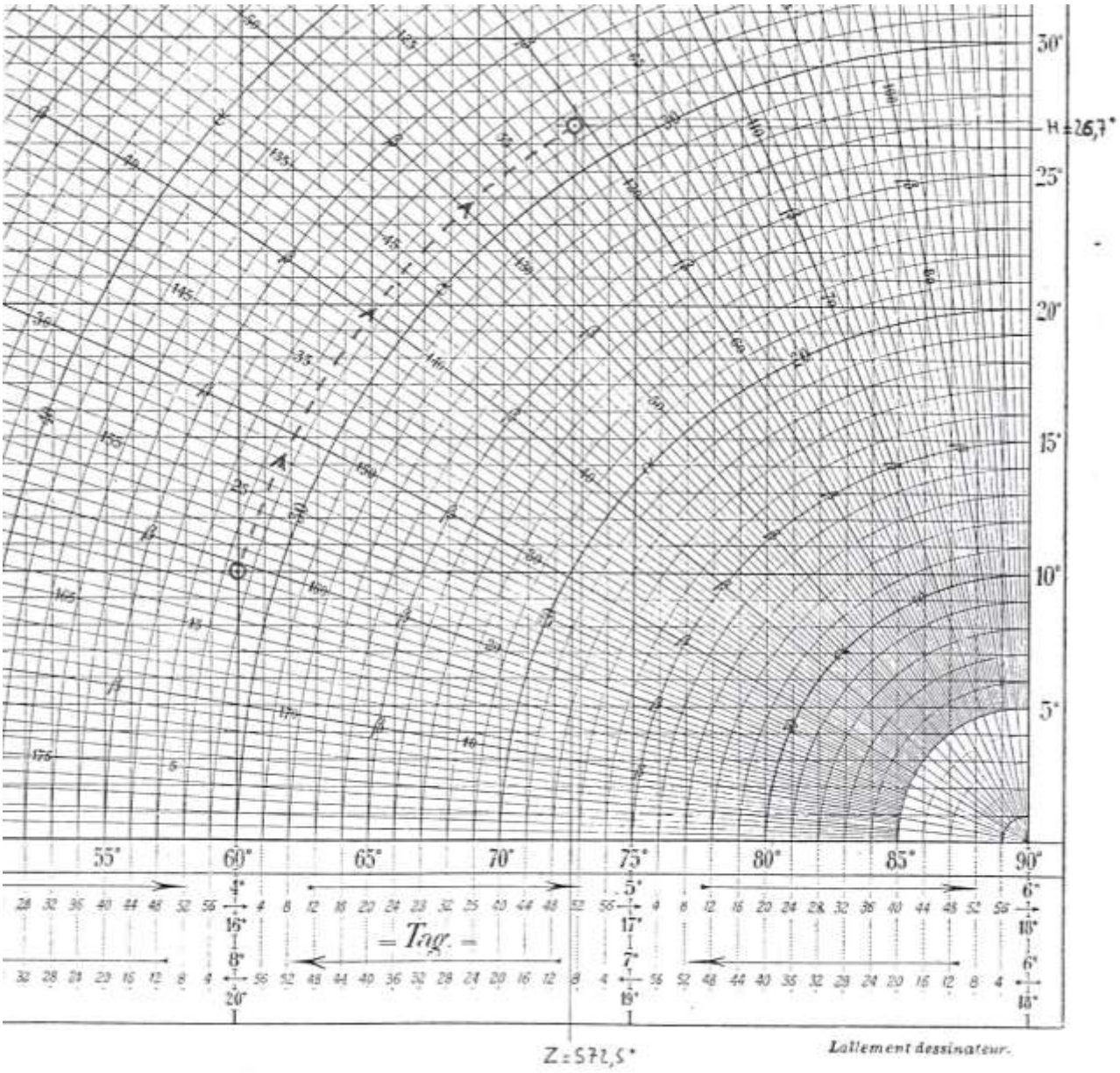


Fig : 12-15

Le domaine d'emploi des tables graphiques de P. Constan est identique à celui de l'abaque de Favé et Rollet de l'Isle.

Quadrant planisphérique :

Dans les trois éditions de ses « Tablettes » (voir au chapitre 5), Charles Bertin fait figurer en début d'ouvrage un « quadrant planisphérique », abaque permettant de résoudre graphiquement des problèmes courants de navigation qui résultent d'un changement de coordonnées sphériques ; on citera donc principalement la détermination des coordonnées horizontales d'un astre, hauteur H et azimut Z ou A_z, connaissant ses coordonnées horaires, déclinaison D et angle horaire AH (ou angle au pôle P) et inversement.

On a représenté, en figure 12-16, la sphère locale d'un lieu de latitude φ à un instant donné et un astre A dont, par exemple, on connaît les coordonnées horizontales et dont on cherche les coordonnées horaires (cas de l'identification d'un astre).

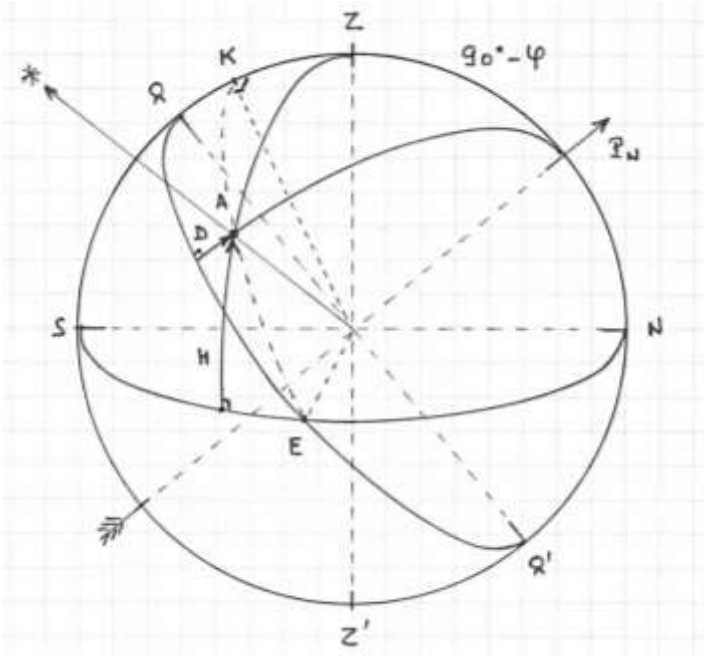


Fig : 12-16

Le quadrant planisphérique est une projection stéréographique de cette sphère sur le plan du méridien dont le point de vue est un point cardinal, E ou W . Dans ce type de projection, les angles sont conservés (projection conforme) et tout cercle de la sphère est représenté par un autre cercle. Dans le plan de projection, l'image de l'astre A, a, peut être placée comme indiqué sur la figure 12-17 selon deux doubles réseaux de cercles, tracés et gradués de degré en degré :

- l'un constitué des images des almicantarats (cercles d'égale hauteur) et des verticaux (cercles d'égal azimut),
- l'autre constitué des images des cercles diurnes (cercles d'égale déclinaison) et des cercles horaires (cercles d'égal angle au pôle).

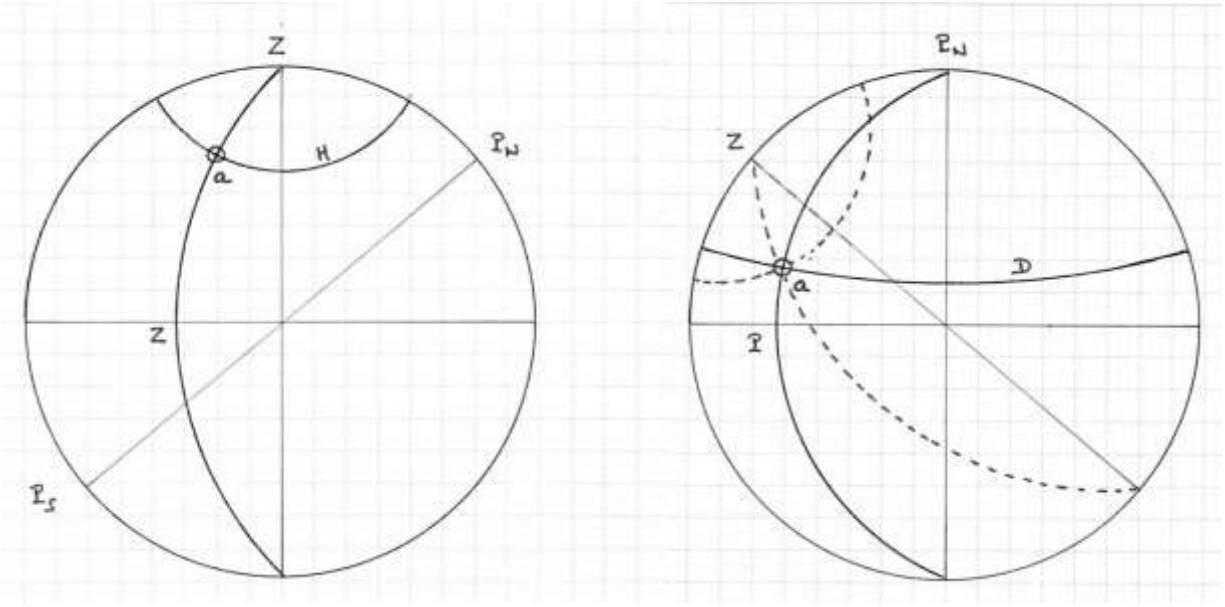


Fig : 12-17

Dans l'exemple pris, on peut placer l'astre A dans le réseau des almicantarats et des verticaux (hauteur et azimut), puis superposer à ce réseau celui qui serait tracé à la même échelle, sur un calque, et comportant les images de cercles diurnes et horaires. On fait tourner un réseau par rapport à l'autre d'un angle de (90° - φ) et on obtient, par simple lecture sur le calque, l'angle au pôle et la déclinaison. Dans le principe tel qu'expliqué, il faut disposer de deux réseaux de cercles : c'est la solution retenue par les ingénieurs américains O. E. Brown et J. J. Nassau à la fin de la seconde guerre mondiale dans la conception de leur « Spherical Computer » constitué de deux réseaux pouvant tourner l'un par rapport à l'autre. On peut n'en utiliser qu'un et, après avoir placé l'image a de l'astre avec ses coordonnées horizontales (H, Z), lui appliquer une rotation de centre O et d'angle (90° - φ). L'image vient en a' dont on lit les coordonnées horaires dans le même réseau (figure 12-18).

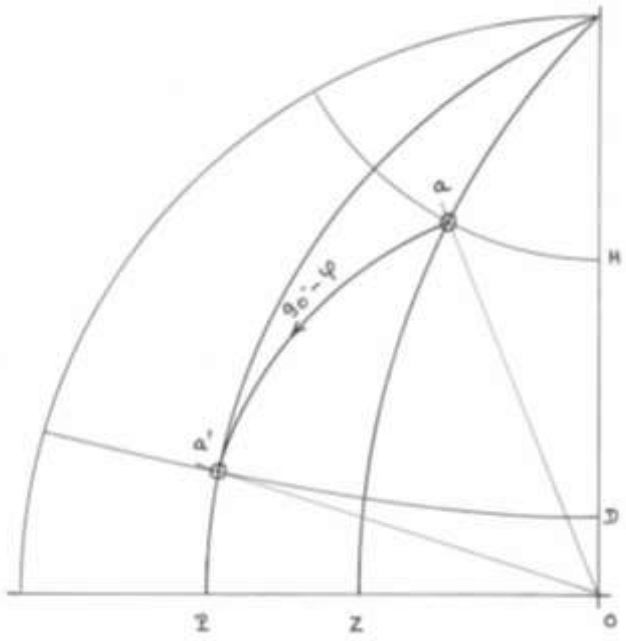


Fig : 12-18

Une fois le réseau de cercles construit, on peut résoudre, suivant le même processus tout problème de transformation de coordonnées horaires en coordonnées horizontales et inversement. Pour généraliser, Charles Bertin indique dans la Revue Maritime de juillet 1914 où il présente le quadrant :

> *« Le quadrant planisphérique n'étant qu'un nomogramme général des équations trigonométriques : cos α.cos β = cos γ et tanα.tanβ = cosγ offre naturellement des solutions multiples de tous les problèmes sphériques ».*

La figure 12-19 est la reproduction du quadrant planisphérique figurant dans l'édition 1939 de la Tablette Bertin. Ce quadrant est suivi d'un bref mode d'emploi que l'on indique ci-dessous :

> « *Prendre un fil fin et y faire un nœud apparent.*
>
> *Chercher dans le quadrillage le point ayant les deux coordonnées connues (D et P, ou φ et P, ou H et Z).*
>
> *Maintenir avec le pouce de la main droite une extrémité du fil sur le sommet de l'angle droit placé en bas du graphique à droite. Glisser le fil, en le raidissant, de manière à placer le nœud en superposition avec le point ayant les deux coordonnées connues. Lire, sur la flèche de lecture, l'inclinaison y du fil, et la nommer convenablement. Faire la somme algébrique (y + φ) ou (y + D).*
>
> *Incliner le fil à la nouvelle valeur de cette somme algébrique, lue sur le pourtour intérieur du graphique. Lire, sous le nouvel emplacement du nœud, les coordonnées cherchées : H et Z ou h et A ou D et P. h ou D est du nom de (y + φ) ou (y + D).*
>
> *Z, A ou P est de l'espèce, aiguë ou obtuse, de (y + φ) ou (y + D), à partir du pôle de cette somme algébrique.* »

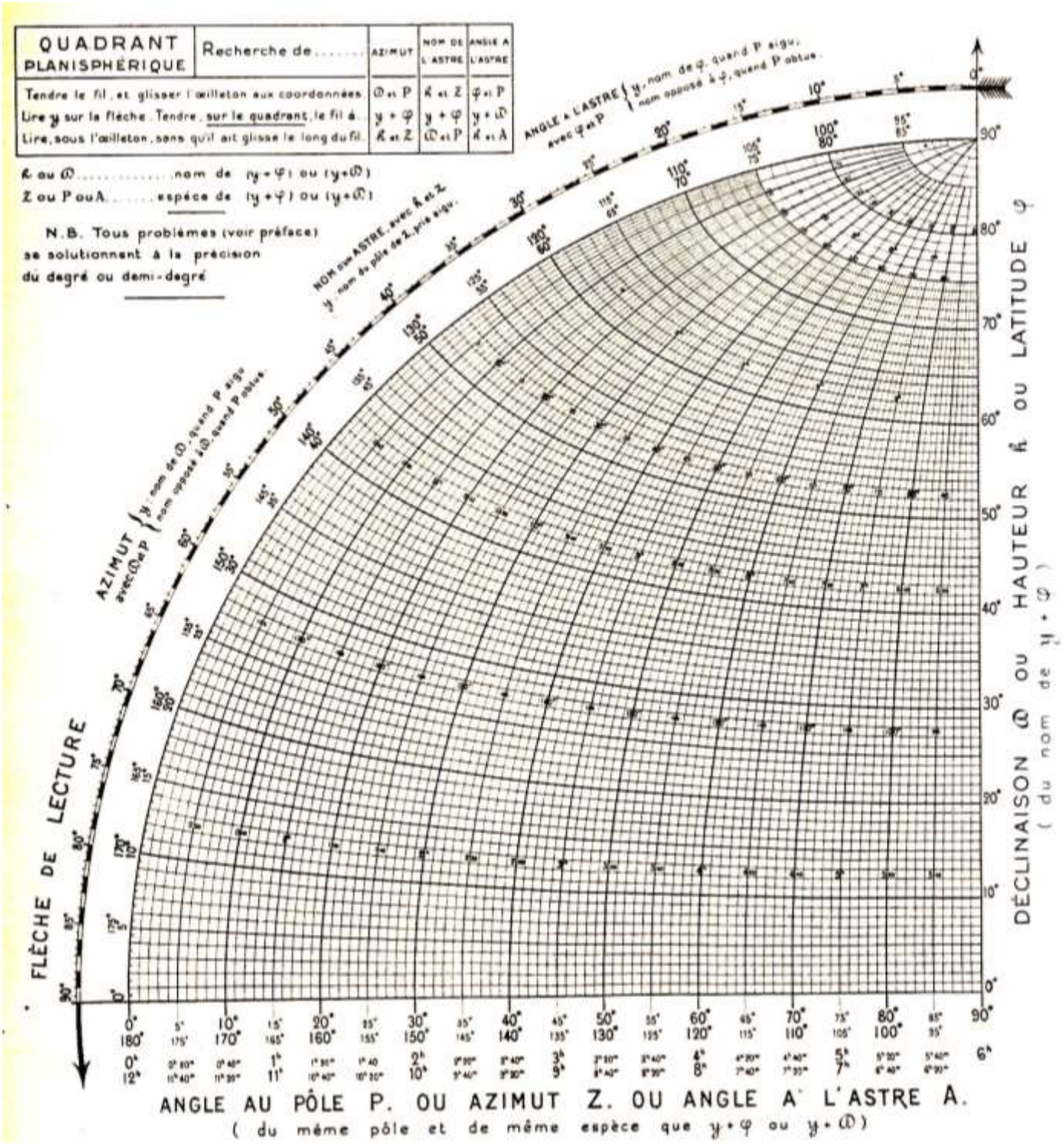


Fig : 12-19

Le quadrant planisphérique a aussi fait l'objet d'une application au début du XXe siècle par l'ingénieur hydrographe américain G. W. Littlehales qui cherchait à atteindre la précision de la minute d'arc. Pour y parvenir, il partage la projection stéréographique de la sphère dans le plan du méridien en 340 zones, l'ensemble formant un volume de 368 pages – une zone par page –, instructions comprises. Un index permet de trouver rapidement les deux pages à consulter successivement.

Courbes de hauteur d'étoiles de Weems :

Les « Star Altitude Curves » du Captain Weems, personnalité que l'on a présentée au chapitre 8, ne constituent pas à proprement parler un abaque de calcul ; elles auraient pu être analysées avec les tables HO218 ou HO249 puisqu'elles en dérivent directement, mais, s'agissant de la mise en œuvre d'un procédé graphique, on a choisi d'en faire mention au chapitre traitant des abaques.

Pour une zone fixée de la surface de la terre, on peut construire sur un canevas, établi en fonction de la latitude et de l'angle horaire sidéral local, les images de deux réseaux de cercles de hauteur relatifs à deux étoiles choisies à l'avance puisque leurs coordonnées équatoriales (déclinaison et ascension verse) peuvent être considérées comme constantes pour une année donnée[50] ; la mesure des hauteurs des deux étoiles et l'heure d'observation permettent de placer le point à une intersection des images des deux cercles des hauteurs mesurées. On relève ensuite directement sur le canevas les coordonnées de ce point fixant ainsi la latitude puis la longitude rapportée au méridien du point vernal à l'instant considéré. Une première réalisation de ce genre a été conçue et publiée en 1924 aux États-Unis par K. Hilding Beij : le « Beij Two-Stars Diagram ». L'utilisation en est très simple mais, outre la restriction à deux étoiles sélectionnées dans une zone, le diagramme présente quelques inconvénients dont le principal est l'inversion de la disposition des images des méridiens et parallèles par rapport à celle de la carte marine. Cette première réalisation pratique va faire l'objet d'améliorations et de perfectionnements par P. V. H. Weems qui utilise un canevas de Mercator, référencé en longitude au méridien du point vernal, sur lequel il construit les courbes de hauteur de 10' en 10' de deux à trois étoiles présélectionnées. Ainsi, si on dispose de deux hauteurs H et H' simultanées de deux étoiles dont les courbes sont représentées sur le canevas, le point de l'observateur se situe à leur intersection dont il n'y a plus qu'à lire les coordonnées (voir figure 12-20). L'instant de l'observation donnant accès à l'angle horaire du point vernal à Greenwich dans les Éphémérides, on en déduit immédiatement la longitude ; la détermination complète du point est ainsi très rapide. Sachant que la mesure simultanée de deux hauteurs est impossible pour l'observateur unique, les Star Altitude Curves permettent également le calcul expéditif de la correction à apporter à une hauteur pour la réduire au même instant que l'autre observation. Enfin, il va aussi faire figurer des éléments de correction pour tenir compte des effets de la précession assurant ainsi une certaine pérennité à la construction graphique.

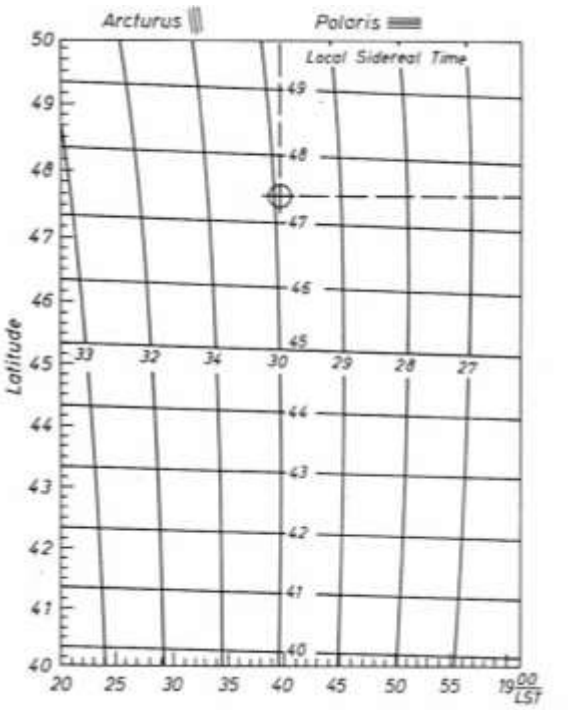


Fig : 12-20

[50] Voir au chapitre 11 le paragraphe relatif aux tables conçues pour la navigation aérienne ainsi que l'annexe 11-5.

La première édition paraît en 1928 sous le titre « Star Altitude Curves » ; elle est suivie de deux autres éditions, en 1938 et 1940. La couverture en latitude va de 50° S à 70° N, par tranches de 10°, éditées soit sous forme de fascicules séparés soit sous forme de cahier regroupant plusieurs fascicules. Un dernier volume couvre les latitudes allant de 70° à 90° N, le canevas de la calotte 80°-90° étant alors une projection stéréographique polaire.

Le diagramme de Beij et les courbes de Weems sont essentiellement conçues pour la navigation aérienne pratiquée à l'aide d'un sextant à bulle : à l'instar des tables HO 218, elles intègrent la réfraction astronomique. Pour des observations à l'horizon de la mer, il convient de ne tenir compte que de la dépression apparente de l'horizon dont la correction correspondante figure en deuxième page de couverture. Pratiquement, les courbes de Weems sont construites sur des canevas Mercator qui représentent une bande de la surface de la sphère terrestre dont l'ouverture en latitude est de 10°. Cette bande est ensuite découpée en « carreaux » de 6 à 8° d'ouverture en longitude (ou angle horaire sidéral local). Chaque carreau occupe une page du document. En page de garde du fascicule, regroupant tous les carreaux d'une bande, figure un tableau, dont un extrait est reproduit ci-après, précisant :

- les latitudes limites de la bande,
- l'époque pour laquelle les éléments sont calculés,
- les étoiles sélectionnées selon les carreaux avec leurs hauteurs extrêmes,
- la pagination.

Latitude 30° to 40° North Positionned For Epoch 1 Jan. 1945				
LST	**Star**	**Altitude**		**Page**
0 – 1 : 00	**Capella** **Vega**	29° - 44° 29° - 15°	Rising Setting	301 - 302
1 : 00 – 3 : 00	**Capella** **Deneb**	40° - 65° 42° - 18°	Rising Setting	303 - 306
3 : 00 – 5 : 00	**Pollux** **Sirius**	30° - 55° 13° - 37°	Rising Rising	307 - 310
5 : 00 – 5 : 30	**Regulus** **Procyon**	18° - 25° 41° - 52°	Rising Rising	311
…	**…**	…	…	…
0 – 24	**Polaris**	29° - 41°	--	301 - 348

LST désigne le temps sidéral local (Local Sidereal Time), exprimé en heures, qui, converti en degrés, est aussi l'angle horaire sidéral local. « Rising » signifie que l'astre est dans l'E, « setting », qu'il est dans l'W.

La connaissance de la longitude estimée au moment de l'aube ou du crépuscule permet de déterminer une valeur approchée de cet angle horaire. Connaissant aussi la latitude estimée, la page de travail se détermine sans ambiguïté ainsi que les étoiles qu'il conviendra d'observer ; sur cette page les réseaux des trois courbes de hauteur relatives à l'observation des trois étoiles sont tracés de 10 en 10', en trois couleurs : rouge, vert et noir ; un extrait est reproduit en figure 12-21. Lorsque les observations sont effectuées à une époque différente de celle d'établissement du document, les valeurs annuelles des corrections de hauteur dues à la précession sont indiquées en haut de chaque page, pour chacune des étoiles considérées.

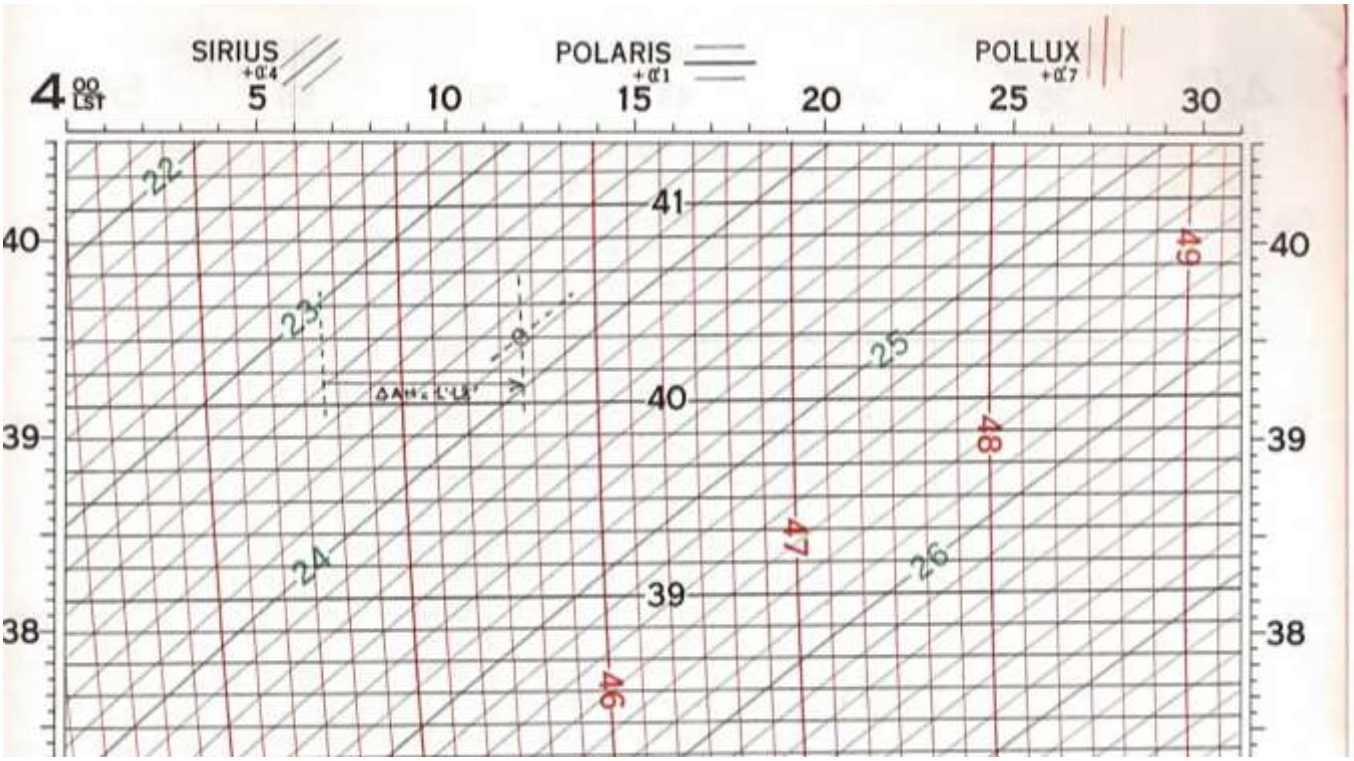


Fig : 12-21

Sur la figure 12-21, on a représenté la construction d'un point résultant des hauteurs apparentes réfractées de la Polaire, 40° 20', Pollux, 44° 36' et Sirius, 23° 47'. Pollux ayant été observé 5 m 12 s avant Sirius, il faut décaler le lieu correspondant de 1° 18' en longitude, comme indiqué sur la figure. On lit les coordonnées du point qui sont φ = 39° 30' N et LST = AHsg = 4 h 12 m 00 s = 63° 00'. Si, à cet instant les Éphémérides donnent AHsp = 103° 20', la longitude sera G = AHsp – AHsg = 40° 20' W.

Commentaires :

S. T. S. Lecky, capitaine au long cours et auteur des célèbres « Wrinkles in Practical Navigation » qui firent longtemps référence outre-Manche était « *not in love with mathematical diagrams of any sort* » essentiellement pour des raisons d'encombrement et d'érosion de la trame du document avec les pointages et gommages successifs. Le Bowditch, dans son édition de 1977, indique :

> « *In general, graphical and mechanical solutions have not proved popular, for several reasons:*
>
> *First, they generally involve a small scale, yielding results of less accuracy than desired, even with careful work.*
>
> *Second, some of the methods must be used as a whole, and cannot be divided into parts to increase scale.*
>
> *Third, such methods usually do not provide a record of solution, and it is often difficult to check the results.*
>
> *Fourth, solutions requiring instruments are subject to error due to lack of proper adjustment or mechanical damage which may not be apparent.*
>
> *Fifth, the required diagrams or instruments may be quite bulky, requiring considerable space for stowage and manipulation.* »

Enfin, en France, le professeur d'hydrographie Pierre Hugon écrit en 1953, dans la revue de l'Institut français de Navigation de janvier 1953 :

> « *Pour en revenir aux solutions graphiques des calculs astronomiques, on sait que d'innombrables chercheurs et théoriciens ont imaginé des systèmes de résolution du triangle de position. Certains de ces abaques sont célèbres, comme les abaques d'Ocagne, de Rollet de l'Isle, de Rust, etc. Les conditions d'emploi, sur une passerelle, plus ou moins abritée, ont vite fait de maculer, de déformer ou de froisser ces feuilles dont, souvent, les dimensions exigées pour obtenir l'approximation*

nécessaire et éviter l'emploi d'une loupe, sont peu compatibles avec l'espace vital de l'officier de quart. Mais la répugnance de l'utilisateur en face de ces solutions ingénieuses doit, raisonnablement, se taire devant la commodité et le format modeste des graphiques d'azimut qui permettent, par un seul coup d'œil et deux ou trois traits de crayon, de déterminer le relèvement d'un astre. Cette solution pourrait être utilement généralisée plutôt que le recours à ces tables d'azimut, qu'elles soient de Perrin, de Blackburne ou de Johnson, qui exigent toujours trois entrées et trois feuilletages. »

Il est clair qu'en pratique, les abaques et autres diagrammes n'ont jamais eu la faveur des officiers de quart, toutes marines confondues, cela malgré les efforts de nombreux chercheurs de talent qui ont imaginé de multiples solutions, certaines particulièrement ingénieuses, dans le but de trouver rapidement et simplement les éléments cherchés avec une précision suffisante. Les raisons profondes en ont été données dans les différents commentaires autorisés ci-dessus. Ajoutons que les techniques de calcul graphique appliquées aux calculs de navigation astronomique n'ont jamais fait partie intégrante des enseignements dispensés officiellement dans les écoles de la marine marchande françaises.

Concernant le calcul de la hauteur en vue d'un calcul d'intercept à la minute près, les abaques sont en général insuffisants à moins de disposer d'un graphique à la bonne échelle (12 mm par degré au moins), d'une grande table à carte, d'un excellent éclairage et, le cas échéant, d'une loupe. Il nous paraît donc évident que les tables, pour ce calcul, donneront un résultat plus sûr et au moins aussi précis sous un délai qui ne sera pas forcément beaucoup plus long. L'idée du fractionnement de l'abaque pour le présenter en feuillets de dimensions réduites à grande échelle est alors intéressante. C'est la voie qu'ont suivie des auteurs comme P. Constan, S. de Neufville et G. Littlehales. On constate malheureusement qu'une bonne échelle, sous une taille raisonnable, ne peut être obtenue qu'avec un fractionnement en nombreuses parties : l'abaque Favé et Rollet de l'Isle est divisé en 54 parties par S. de Neufville dans sa « Navigation sans Logarithmes », qui connut un certain succès auprès des navigateurs de plaisance, tandis que G. Littlehales découpe une projection stéréographique de la sphère en 340 parties.

D'une manière générale, un abaque présente des avantages certains dans les résolutions approchées comme l'identification d'un astre et la préparation du point crépusculaire où la précision des résultats attendus est de l'ordre du degré. Dans le cas du simple calcul d'azimut, au degré près, l'abaque fait, à notre sens, jeu égal avec les tables comme celles de Perrin (ou ABC) et de Bataille, à la condition que l'abaque en question soit de lisibilité aisée. On a en effet remarqué que la qualité de l'impression, de la typographie et du support jouait un rôle fondamental : une typographie uniforme et un peu grasse sur un papier terne conduit à des risques de confusion de lecture ; une impression en plusieurs couleurs, pour différencier la nature des courbes, vient améliorer la lisibilité et ainsi réduire les risques d'erreur. C'est sans aucun doute dans le domaine du calcul de l'azimut que les abaques ont remporté le plus de succès avec notamment les réalisations de Weir, Cornet et Rust.

Enfin, les « Star Altitude Curves » du Captain Weems constituent un document différent des précédents, fruit d'une dizaine d'années de travail effectué par des équipes d'anciens officiers de l'US Navy employés par Weems et grâce à des fonds privés ; le document fut officiellement reconnu par l'US Army Air Corps au début de la Seconde Guerre mondiale. Selon les rédacteurs de l'édition de 1951 du Dutton's Navigation and Nautical Astronomy, ce type d'abaque n'aurait eu que peu de succès en navigation maritime en raison de la limitation à trois étoiles imposées, dont la Polaire dans l'hémisphère Nord, peu brillante et difficile à observer, et de la petite échelle du canevas. Au contraire, l'édition de 1977 du Bowditch indique :

« *The Star Altitude Curves are undoubtly the most widely used of all graphical and mechanical methods* ».

Quelle qu'en soit son utilisation en navigation maritime, l'outil, d'emploi très simple, conduit immédiatement à un résultat d'une précision acceptable au large.

Annexe 12-1 : Eléments de construction du diagramme de Weir.
Annexe 12-2 : Abaque d'azimut de Hugon.
Annexe 12-3 : Abaque d'Ocagne.
Annexe 12-4 : Abaque de Favé et Rollet de l'Isle, table graphique de Constan ; formulation utilisée.

Chapitre 13

OBSERVATIONS EXTRA-MÉRIDIENNES

CIRCUMMÉRIDIENNES

Introduction :

On a défini, au début de cette étude, les points déterminatifs couramment utilisés pour construire une droite de hauteur : appelés Lalande, Borda et Marcq de Saint-Hilaire, ils sont situés respectivement sur le parallèle, le méridien et le vertical estimés (ou auxiliaires). Le premier, dont on calcule la longitude, s'emploie préférablement lorsque l'astre est proche du premier vertical (l'azimut compté par quadrant est supérieur à 45°), le second lorsque celui-ci est proche du méridien de l'observateur (l'azimut par quadrant est alors inférieur à 45°) et le dernier nommé qui peut s'employer en toutes circonstances. Dans ce chapitre, on traitera plus particulièrement du point déterminatif Borda dont il s'agit de calculer la latitude connaissant la hauteur de l'astre déduite d'une mesure, son angle au pôle estimé et sa déclinaison. Une observation traitée de cette façon sera dite « extra-méridienne » ; dans le cas général, son calcul – dont la formulation est explicitée en annexe 1-1 – est assez long car il fait intervenir un arc auxiliaire. Si maintenant le cercle horaire de l'astre est très proche du méridien de l'observateur, on parlera d'observation « circumméridienne » et la plus ou moins faible valeur de l'angle au pôle estimé pourra conduire à employer une formulation simplifiée conduisant rapidement à la détermination de la latitude cherchée tant que la culmination de l'astre n'est pas trop proche du zénith du lieu.

Au vu de l'impressionnante masse d'études et de recherches concernant cette formulation simplifiée, l'affaire était d'importance. En effet, la détermination de la latitude du navire par une mesure de la hauteur du Soleil à l'instant de son passage au méridien estimé – l'angle au pôle est alors nul – est particulièrement simple car elle se réduit à effectuer une simple addition algébrique faisant intervenir la déclinaison de l'astre et sa distance zénithale, complément de la hauteur ; il y avait donc lieu d'étudier comment s'y ramener si, pour une raison ou une autre, l'observation avait eu lieu un peu avant ou un peu après le passage au méridien. Rappelons que les navigateurs, notamment dans la marine de commerce, sont longtemps restés viscéralement attachés au principe de détermination du point à midi par une hauteur du matin et l'observation dite méridienne ; on peut ici citer Charles Cotter qui résume la tradition :

> « *The morning-sight-run-up-to-noon, with its associated ritual, remains, as it has done for generations, the general practice on board merchant ships* ».

Il arrivait que ce rituel soit perturbé par un banc de nuages masquant malencontreusement le Soleil au moment prévu : l'observation circumméridienne peut alors constituer un « rattrapage » de la méridienne. Ajoutons que les circumméridiennes n'ont pas que ce rôle de sauvetage : observées en série, elles permettent, lorsque les hauteurs restent inférieures à 80°, d'améliorer la précision avec laquelle la latitude méridienne est obtenue, notamment si les conditions d'observations sont mauvaises.

Aperçu historique :

Au cours de la seconde moitié du XVIIIe siècle, les observateurs avaient remarqué que, lorsque le Soleil est au voisinage du méridien, la courbe représentative de sa hauteur en fonction du temps a l'allure d'une parabole dont le sommet est atteint sensiblement au moment du passage de l'astre au méridien du lieu d'observation ; en d'autres termes, à un instant donné, sa hauteur varie en raison directe du carré de la différence de temps entre cet instant et celui du passage au méridien de l'observateur, donc, sensiblement, de l'angle au pôle de l'astre. Les chercheurs virent dans cette constatation un moyen de déterminer la latitude en prenant trois hauteurs successives du Soleil dans les alentours de son passage au méridien et en relevant les instants des observations à l'aide d'une simple montre calée arbitrairement. Ces différents éléments, hauteurs et intervalles de temps entre observations,

permettent de définir la parabole représentative de la hauteur en fonction du temps et de trouver, par le calcul, l'heure qu'indiquerait la montre au moment du passage au méridien et la hauteur du Soleil à cet instant d'où l'on déduira ensuite la latitude connaissant en outre la déclinaison. La méthode a été explicitée en France dans les principaux ouvrages de navigation de l'époque comme le « Nouveau Traité de Navigation » de Pierre Bouguer, revu par l'abbé de La Caille, en 1760, « l'Astronomie des Marins » du père Esprit de Pézenas en 1766 et le « Guide du Navigateur » de Pierre Lévêque en 1779 ; en Grande-Bretagne, le procédé est indiqué par John Robertson dans la 4e édition (1780) de ses « Elements of Navigation ». Précisons que la méthode suppose que l'observateur reste immobile entre la première et la dernière observation, que la déclinaison de l'astre puisse être considérée comme constante sur cet intervalle et qu'enfin, on puisse admettre, sur cette même durée, que l'on se tient à l'intérieur du domaine de validité de la variation parabolique de la hauteur qui reste une approximation : l'intervalle de temps pendant lequel s'effectue les mesures doit donc rester de relativement faible amplitude et appelle la notion d'angle au pôle limite qui sera définie plus tard. Ajoutons que, à moins de s'en tenir à des intervalles de temps égaux entre observations, le résultat ne sera obtenu qu'à l'issue d'un calcul assez long.

La solution pratique à la recherche de la latitude suite à une observation au voisinage du passage de l'astre au méridien de l'observateur sera apportée par Jean-Charles de Borda en 1787 dans son célèbre ouvrage relatif au cercle de réflexion[51]. Partant de la constatation énoncée au début de ce paragraphe comme quoi

> « *… les quantités dont le soleil descend dans le voisinage du méridien sont proportionnelles au quarré des temps écoulés depuis midi ; mais cela n'est pas exact lorsque le soleil passe très près du zénith et encore moins lorsqu'il passe au zénith même …* »,

J.-Ch. de Borda calcule et présente une table donnant la différence entre la hauteur méridienne d'un astre et sa hauteur observée une minute avant ou après son passage au méridien. Cette quantité sera par la suite dénommée coefficient des circumméridiennes, notée α, et permettra le calcul expéditif de la latitude. Borda ne donne malheureusement pas la démonstration qui conduit à l'expression mathématique du coefficient α ; J. B. E. Dubourguet, qui se présente comme ancien navigateur et professeur de mathématiques au Prytanée Français, regrettant l'absence de démonstration, en détaillera une dans un opuscule[52] publié en 1801. Les équations fondamentales de la théorie des observations circumméridiennes seront ensuite établies par l'astronome Jean-Baptiste Delambre en 1814 qui utilise un développement selon les puissances croissantes du sinus du demi-angle au pôle puis par le lieutenant de vaisseau et professeur à l'École navale Paul Hilleret en 1875 qui choisira d'utiliser un développement limité selon les puissances croissantes de l'angle au pôle.

La voie qui a été suivie, principalement en France, pour résoudre le problème de la latitude circumméridienne repose sur une formulation approchée, valide à l'intérieur d'un intervalle de temps limité et centré sur l'instant du passage de l'astre au méridien. Une autre école s'est développée, principalement en Grande-Bretagne, utilisant une formulation exacte basée sur la décomposition du triangle de position en deux triangles rectangles. Celle-ci a été initiée par John Robertson dans ses « Elements of Navigation » au cours de la seconde moitié du XVIIIe siècle, puis reprise et formalisée en 1849 par John Th. Towson, dont on a présenté les travaux au chapitre 2. L'utilisation d'une formulation exacte ne limite plus le calcul de latitude aux observations circumméridiennes mais peut s'étendre aux traitements de toute hauteur extra-méridienne[53].

La réduction au méridien :

Les raisonnements mathématiques conduisant à l'élaboration des différentes formulations sont explicitées en annexe 13-1.

Si on mesure la hauteur vraie H_v d'un astre de déclinaison D connue à l'instant de son passage au méridien du lieu, la latitude φ_0 de ce lieu se détermine simplement par la somme algébrique $\varphi_0 = \xi_v + D$, ξ_v désignant la distance

[51] « Description et usage du cercle de réflexion, avec différentes méthodes pour calculer les observations nautiques », Didot aîné. La table X donne le coefficient α en fonction de la latitude et de la distance polaire de l'astre et la table XI permet le calcul du carré de l'angle au pôle.
[52] « L'art du calcul astronomique des navigateurs », Firmin Didot. J. B. E. Dubourguet est aussi l'auteur d'un Traité de Navigation en 1808.
[53] En France, on fait la distinction entre observations circumméridiennes et extra-méridiennes ; les Britanniques emploient le terme ex-meridian pour toute observation de hauteur hors du méridien visant à déterminer une latitude par le calcul.

zénithale de l'astre ou complément de la hauteur H_v. Si maintenant la mesure de hauteur est faite un peu avant ou un peu après le passage au méridien de l'astre, l'idée qui a prévalu a été de déterminer sa latitude en corrigeant celle trouvée par l'addition ci-dessus d'une certaine quantité, la réduction au méridien r.

Sur la figure 13-1 ci-dessous, on a représenté l'arc de courbe de hauteur (C) relatif à l'observation d'un astre A, d'angle horaire au premier méridien AHap et de déclinaison D, à une hauteur H_v ; à l'instant de l'observation, la longitude estimée de l'observateur est G_e, l'angle au pôle de l'astre, caractérisant la différence de longitude avec l'observateur, étant P_e.

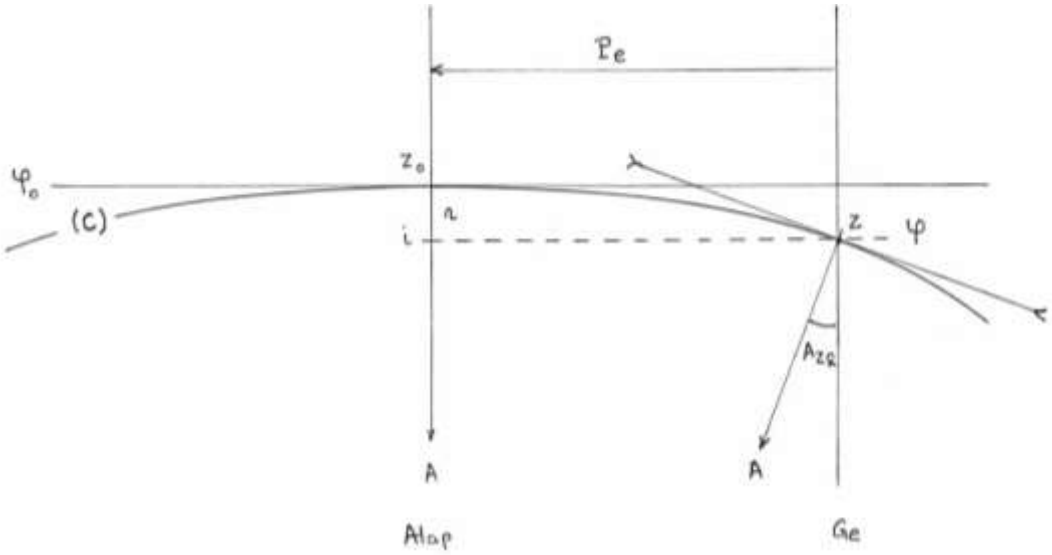


Fig : 13-1

On écrit alors, dans le cas de figure représenté :

$$\varphi = \varphi_0 - r = \xi_v - r + D = \xi_r + D$$

$\xi_r = \xi_v$ - r est la distance zénithale réduite. Le problème ainsi posé consiste maintenant à évaluer, de façon aussi simple que possible, la réduction au méridien r. Comme indiqué dans le bref aperçu historique ci-dessus, celle-ci peut être évaluée à partir d'une formulation approchée ou exacte, le domaine de validité de la première étant nécessairement limité aux petites valeurs de l'angle au pôle.

Formulation approchée : le coefficient α des circumméridiennes est une fonction de la latitude et de la déclinaison de l'astre et peut être facilement mis en table à double argument. L'expression que l'on retient généralement est de la forme :

$$\alpha = 1{,}9635.\frac{\cos\varphi\,.\cos D}{\sin|\varphi - D|}$$

C'est probablement l'expression utilisée par J.-Ch. de Borda pour calculer la table figurant dans son ouvrage relatif au cercle de réflexion publié en 1787. La réduction est ensuite obtenue en multipliant ce coefficient par le carré de l'angle au pôle, soit :

$$r = \alpha.P_e^2$$

Dans ces expressions, le coefficient α et la réduction sont exprimés en secondes d'arc et l'angle au pôle en minute de temps. En 1814, J.-B. Delambre établit un développement donnant la réduction ; en limitant ce développement à son premier terme, il obtient :

$$r = \frac{2.\cos\varphi\,.\cos D}{\sin|\varphi - D|}.\left(\sin\frac{P_e}{2}\right)^2$$

L'expression, qui donne ici la réduction exprimée en radians, est équivalente à la précédente tant que l'on peut considérer l'angle au pôle « petit ». Dans un cas comme dans l'autre la connaissance de la latitude estimée suffit pour effectuer le calcul avec la précision requise.

Toujours dans le domaine de la formulation approchée, les britanniques H. B. Goodwin et H. S. Blackburne mettront au point, au début du XXe siècle, des variantes des formules ci-dessus dans lesquelles ils feront intervenir l'azimut.

Formulation exacte : après décomposition du triangle de position de l'astre en deux triangles rectangles selon la hauteur issue de l'astre, le calcul consiste à évaluer, à l'aide des formules de trigonométrie sphérique, deux termes correctifs dont la réduction au méridien est la somme algébrique. Suivant les formules utilisées, deux types de tables ont été conçus.

La question de l'angle au pôle limite :

L'angle au pôle limite P_L fixe les bornes de l'intervalle, avant ou après le passage au méridien de l'astre, à l'intérieur duquel le calcul de la réduction peut s'effectuer d'une manière approximative donnée. Le problème se présente sous deux aspects que l'on peut énoncer comme suit :

- jusqu'à quelle valeur de l'angle au pôle de l'astre une connaissance approchée de celui-ci est sans effet notable sur la latitude calculée ?
- jusqu'à quelle valeur de l'angle au pôle de l'astre, l'application d'une formule approchée est-elle légitime ?

Dans la première moitié du XIXe siècle, on s'est plutôt intéressé au premier aspect du problème, l'angle au pôle limite de l'astre – le Soleil en particulier – étant tout d'abord fixé empiriquement. On note par exemple :

- « *The time from noon should not exceed 30 minutes* » dans « A New and Complete Epitome of Practical Navigation » de J. W. Norie ; l'angle au pôle limite est donc ici fixé à 7,5° ;
- « *The number of minutes in the time from noon should not exceed the number of degrees in the sun's meridian distance* » dans ce même document revu par A. B. Martin en 1877 ; cette règle est reprise par plusieurs autres auteurs dont S. T. Lecky dans ses « Wrinkles of Practical Navigation ».

En 1885, W. H. Rosser donne, dans « Self Instructor in Navigation », une table donnant la limite de temps (soit directement l'angle au pôle limite) avant ou après le passage au méridien telle qu'une erreur de 30 s sur le temps engendre une erreur maximale d'une minute d'arc sur la réduction au méridien calculée avec son seul premier terme. Ce concept est intéressant car il fixe l'intervalle de temps, de part et d'autre du passage au méridien, pendant lequel l'instant de l'observation peut être simplement fixé par la montre d'habitacle donnant, à l'époque, le temps solaire vrai local à la minute près. L'idée sera reprise et affinée par l'ingénieur hydrographe H. Dyèvre dans les années 1930 et mise en application dans les tables 902 (1953) et 900 (1963).

J.-B. Delambre puis, notamment, P. Hilleret ont établi un développement limité selon les puissances croissantes de l'angle au pôle P_e donnant la réduction au méridien. Ce développement est une somme de termes constitués d'un facteur fonction de la latitude et de la déclinaison de l'astre multiplié par l'angle au pôle (ou son sinus) élevé à des puissances croissantes. L'angle au pôle étant petit, les valeurs prises par les différents termes du développement deviennent de plus en plus petites au fur et à mesure que l'ordre augmente ; simultanément, la somme des termes converge vers une valeur de plus en plus précise de la réduction cherchée. Si on limite le développement à un certain ordre, on commet une erreur sur le résultat cherché, celle-ci ne pouvant excéder la plus grande valeur que peut prendre le premier terme négligé. En France, la démarche adoptée à partir des années 1870 est clairement énoncée par le professeur d'hydrographie Alfred Ledieu en 1877 :

> « (…) *Toutefois, il faut bien convenir d'entendre par circumméridiennes les hauteurs prises assez près du méridien pour que, eu égard au degré d'approximation qu'on s'est fixé, il ne soit pas nécessaire d'aller au-delà du terme du second ordre dans le développement complet de φ en fonction de P* (…) ».

On va donc s'attacher à calculer la réduction par son seul premier terme correspondant à un développement limité à l'ordre deux, le premier terme négligé étant alors celui d'ordre quatre. La théorie développée par P. Hilleret en 1875 permet de fixer, en fonction de α, une valeur maximale du terme d'ordre quatre pour les observations du Soleil dont la déclinaison reste inférieure à 24°. Fixant ensuite le degré d'approximation admissible sur la réduction à 1' – valeur généralement retenue –, l'angle au pôle limite P_L peut être mis en table en fonction du coefficient α. Divers autres artifices ont été employés pour éviter de travailler au-delà de l'angle au pôle limite.

À l'analyse, il a été remarqué, dans le cas des observations du Soleil :

- que les valeurs d'angle au pôle limite calculées à partir d'une incertitude sur l'heure (1 minute au maximum) et d'une incertitude correspondante sur la réduction (2' au maximum) sont toujours plus restrictives que celles résultant de la non-prise en compte du second terme,
- qu'en l'absence d'un tableau d'angle au pôle limite (ou d'un autre artifice), la règle indiquant que la valeur en minute de l'angle au pôle ne doit pas excéder le nombre de degré de la distance zénithale méridienne est celle qui reste à observer.

Quelques développements théoriques relatifs au calcul de l'angle au pôle limite sont donnés en annexe 13-2 ainsi que des valeurs comparatives de cet angle suivant différents critères.

Latitude et droite de hauteur circumméridienne :

En résumé, on vient de voir que si on mesure une hauteur du Soleil peu de temps avant (ou après) son passage au méridien supérieur du navire, il est possible de calculer facilement la latitude du navire à cet instant de la manière suivante :

- vérifier tout d'abord que la méthode est applicable en s'assurant que l'angle au pôle estimé P_e est inférieur à l'angle au pôle limite P_L,
- calculer la réduction r avec une table appropriée,
- calculer la latitude en posant $\varphi = \xi_v - r + D$, ξ_v étant la distance zénithale vraie résultant de la hauteur que l'on a observée.

Il peut en résulter le point du navire si la longitude estimée G_e à l'instant de l'observation est connue exactement, ce qui n'est généralement pas le cas ; le point obtenu (latitude observée, longitude estimée) est alors un point déterminatif Borda de la droite de hauteur circumméridienne dont il convient de déterminer l'azimut. La droite tracée avec ces éléments servira à fixer le point aux alentours de midi à son intersection avec une droite observée dans la matinée.

Série de hauteurs circumméridiennes :

La prise d'une série de hauteurs au voisinage du passage du Soleil au méridien estimé conduit à déterminer indirectement la latitude méridienne. La méthode est particulièrement recommandée lorsque les conditions d'observation sont mauvaises : mer houleuse et horizon brumeux ou voilé. Elle est due au capitaine de frégate Guyou qui l'expose brièvement dans l'opuscule « Les Problèmes de Navigation et la Carte Marine » publié en 1896 et qui a été rappelée par l'ingénieur hydrographe R. Doniol dans un article paru dans la revue de l'Institut français de Navigation en juillet 1957.

La méthode est applicable tant que, pour toutes les mesures de hauteur, l'angle au pôle du Soleil reste inférieur à l'angle au pôle limite P_L et que le navire fait route à vitesse constante, dans une même direction, pendant toute la durée des observations, ce qui est, en général, le cas à bord d'un navire de commerce. La méthode, très simple à appliquer, est expliquée en détail, exemple à l'appui, en annexe 13-3 ; elle permet de faire concourir plusieurs observations pour déterminer la latitude méridienne sans pour autant être astreint à observer à l'instant précis du passage au méridien estimé.

Cas particulier des observations de la Polaire :

L'observation de l'Étoile polaire, possible uniquement dans l'hémisphère Nord mais délicate car de deuxième grandeur, permet une détermination précise de la latitude – pour autant que la hauteur ait pu être mesurée précisément –. Cette étoile est très proche du pôle Nord, sa distance polaire δ valant sensiblement 39' aujourd'hui (2019). Sa hauteur au-dessus de l'horizon est donc peu différente de la latitude ce que l'on écrira $\varphi = H_v + x$, x étant une petite quantité qui ne peut excéder, en valeur absolue, la distance polaire δ.

On traite en général une observation de la Polaire par la méthode du méridien estimé ; le point déterminatif correspondant étant situé à son intersection avec le parallèle de latitude φ calculée comme ci-dessus ; l'azimut est toujours voisin du Nord (compris entre 358,5° et 001,5° pour une latitude inférieure à 65°). La quantité x est en règle générale donnée sous la forme d'une somme algébrique de trois termes : un terme principal fonction du temps sidéral local AHsg et calculé à l'aide de valeurs moyennes des coordonnées équatoriales de l'étoile, et deux termes correctifs, l'un du second ordre, l'autre tenant compte des variations des coordonnées équatoriales par rapport aux valeurs moyennes adoptées dans le calcul du terme principal. Les trois termes sont donnés, avec leur signe, par des tables figurant, par exemple, dans les Éphémérides nautiques ou le Nautical Almanac.

Les tables :

Les tables permettant le calcul de la réduction au méridien furent très nombreuses ; un essai d'inventaire figure en annexe 13-4. D'une manière générale, les différents auteurs indiquent les valeurs d'angle au pôle limite et précisent les critères à partir desquels cet angle est calculé. Cependant, certaines tables ne donnent aucun élément sur cet angle ; dans ce cas, on a souvent constaté que l'argumentation de la table est interrompue dès lors que l'on risque une utilisation abusive de la formule ; si la table donne le second terme du développement, le simple examen du tableau correspondant indique s'il y a lieu d'en tenir compte. Les latitudes limites des tables sont dans tous les cas supérieures à 60° ; concernant les déclinaisons, on a observé des limites d'utilisation qui vont de 23° à 30° pour une moitié des documents analysés puis de plus de 60° pour l'autre moitié.

Les principales conceptions rencontrées sont les suivantes :

1) Tables de calcul de la réduction utilisant une formulation exacte.

2) Calcul de la réduction par somme des logarithmes des différents facteurs qui composent son expression ; disposition souvent rencontrée dans des ouvrages dont ce calcul n'est pas l'objectif premier.

3) Mise en table du coefficient α et de la réduction : selon cette conception, on devra effectuer deux à trois entrées dans les tables : une première pour trouver le coefficient α en fonction de la latitude et de la déclinaison, une seconde en fonction de l'angle au pôle estimé et de α pour trouver le premier terme, d'ordre 2, puis, le cas échéant, une troisième pour trouver le second terme, d'ordre 4.

4) Tables donnant directement la réduction : cette catégorie de tables est conçue pour donner la réduction – limitée à son premier terme ou comprenant les deux termes – en une seule lecture, en fonction de la latitude, de la déclinaison et de l'angle au pôle. Elles sont constituées d'une succession de tableaux, en général un pour chaque valeur entière de latitude ; dans chaque tableau, on peut ainsi lire directement la valeur de réduction en fonction de l'angle au pôle et de la déclinaison.

5) Tables permettant le calcul de la réduction en fonction de l'azimut et de la latitude.

Commentaires :

La circumméridienne est issue d'une théorie difficile, sorte de « morceau de bravoure » des cours de navigation et hantise des candidats aux examens de la marine marchande. Outre un fondement de recherche remontant au XVIIIe siècle, la théorie fondamentale utilisée jusqu'à l'extinction de l'usage de la méthode est celle conçue par J.-B. Delambre puis P. Hilleret. Dans la seconde moitié du XIXe siècle, de nombreux autres auteurs, tant anglo-saxons que français, ont également donné leur propre présentation du problème de la circumméridienne ; citons parmi d'autres : J. W. Norie, H. Raper, W. H. Rosser, W. R. Martin en Grande Bretagne, W. Chauvenet aux États-Unis, V. Caillet, A. Ledieu, M. Yvon-Villarceau et M. Aved de Magnac, H. Faye, E. Caspari en France, etc. Tous les cours et traités de navigation astronomique publiés par la suite présentent et expliquent, de façon plus ou moins détaillée, le problème du traitement des observations circumméridiennes.

Si la théorie en est ardue, l'observation circumméridienne est, par contre, de mise en œuvre facile et conduit rapidement à la détermination de la latitude et du lieu de position ; si, de plus, on veut se donner la peine d'observer une série de hauteurs circumméridiennes, on pourra déterminer, aussi précisément que possible compte tenu des circonstances d'observation, la latitude dite méridienne.

Un inventaire et une analyse des tables de calcul conçues pour résoudre le problème de la circumméridienne est présenté en annexe 13-4. Cet inventaire, incomplet puisqu'il est construit à partir des seuls travaux britanniques, américains et français, résume les différentes formulations et processus de calcul utilisés ; il fait état de la somme d'énergie qui a été mise en œuvre pour tenter d'offrir au navigateur le moyen le mieux adapté pour résoudre le problème. On peut penser que l'objectif a été largement atteint. Cependant, on relève dans le Traité de Navigation de G. Massenet publié en 1923 :

> « *La méthode générale* (Marcq de Saint-Hilaire)[54] *n'est pas sensiblement plus longue que la méthode utilisant le facteur α, qui a d'ailleurs l'inconvénient de ne pas donner une valeur exacte de la hauteur estimée* H_e. *Pratiquement, on abandonnera donc la méthode des circumméridiennes, et on traitera toute les hauteurs d'astre par la méthode générale*. »

La remarque, visionnaire, de Massenet est juste mais prématurée : les navigateurs resteront, on l'a déjà dit, très longtemps attachés à la détermination de la longitude le matin et de la latitude à midi. L'évolution se fera progressivement et la circumméridienne, principalement ressentie comme un secours à une méridienne ratée, ne disparaîtra des programmes d'enseignement qu'en 1980.

Annexe 13-1 : Formulations employées.
Annexe 13-2 : Angle au pôle limite.
Annexe 13-3 : Série de hauteurs circumméridiennes.
Annexe 13-4 : Essai d'inventaire des tables de calcul des circumméridiennes.

[54] NdA.

Chapitre 14

DÉTERMINATION du POINT par les TABLES

de H. B. GOODWIN et de H. S. BLACKBURNE

Introduction :

Henry Bedingfield Goodwin (1848-1927) était Naval Instructor de la Royal Navy et Examiner en navigation et astronomie nautique au Royal Naval College de Greenwich ainsi qu'auprès du H. M. Board of Education. Il est l'auteur d'un traité de trigonométrie plane et sphérique, de recueils de problèmes de navigation et d'astronomie nautique, de tables de navigation comme « Position-Line Star Tables » (1906) et « The Alpha Beta Gamma Navigation Tables » (1921) ainsi que de nombreuses recherches en navigation astronomique, sujet sur lequel il était un expert reconnu. Membre de la Royal Astronomical Society, collaborateur régulier du Nautical Magazine il fut aussi, à une époque, Assistant Editor du Brown's Nautical Almanac. Il travailla également à la refonte et la réédition d'ouvrages comme le « Glossary of Navigation » de J. B. Harbord en 1897 ou les « Inman's Nautical Tables » en 1918.

Harold Sewallis Blackburne (1854-1943) est né dans le Leicestershire ; sa famille se fixe ensuite en Nouvelle-Zélande en 1859, son père ayant été nommé principal du collège St John à Auckland. En 1869, H. S. Blackburne retourne en Grande Bretagne et y entame une carrière de marin dont il effectuera la majeure partie à bord des navires de la Compagnie P & O[55] qui desservait la Méditerranée, les Indes et l'Extrême-Orient ; titulaire des différents brevets exigés, dont celui de capitaine au long cours « extra master », il sert sur ces navires en qualité d'officier puis de capitaine. En 1894, il démissionne de la compagnie P & O et devient professeur de navigation, activité qu'il poursuivra jusqu'en 1899, année où il retourne en Nouvelle-Zélande ; il y devient Nautical Adviser auprès du gouvernement et Principal Examiner of Masters and Mates in New Zealand, fonctions qu'il exercera jusqu'en 1919. H. S. Blackburne est l'auteur de plusieurs tables de navigation ; son expérience dans ce domaine remonte au début de sa carrière maritime où il recalcule les tables A et B qu'il publie en 1883 sous le titre « A and B Tables for Correcting the Longitude and Facilitating Sumner's Method on the Chart, etc ». On relève ensuite les publications de deux tables essentielles, « Tables for Azimuth, Great-Circle Sailing and Reduction to the Meridian » en 1903, puis, « Tables of Calculated Hour-Angles and Altitude Azimuth Table » en 1914 ; ces deux ouvrages, publiés simultanément chez plusieurs éditeurs, feront l'objet de rééditions et constituent les fondements de deux autres ouvrages, publiés par le célèbre éditeur de Glasgow, James Brown & Son, sous les titres de « Excelsior Azimuth Hour-Angles and Altitude-Azimuth Tables » et « Excelsior Ex-Meridian and Position-Finding Tables ».

À l'époque considérée, c'est-à-dire au tournant des XIXe et XXe siècles, seuls les calculs de longitude par le chronomètre et de latitude par la méridienne ou une circumméridienne ainsi que la méthode de Sumner étaient autorisés aux examens de la marine marchande britannique qui se déroulaient sous l'autorité du Board of Trade. Rappelons que la méthode de Sumner consiste à déterminer deux points de la droite de hauteur dont on fixe arbitrairement les latitudes ; la détermination d'un point complet par deux hauteurs quelconques d'astre(s) nécessite donc au total quatre calculs de longitude. Ces règles venaient ainsi conforter l'usage pratique et traditionnel du point de midi qui constituait bien souvent l'unique détermination du point observé sur une période de 24 heures. La simplification sera naturellement apportée par Marcq de Saint-Hilaire en 1875 mais ne s'imposera que bien plus tard[56] dans la réglementation du Board of Trade et ne devint pratique courante qu'encore plus tard. Pour des raisons de sécurité de la navigation, la nécessité de disposer d'un point observé plus fréquent était naturellement une évidence et c'est vers l'élaboration du point par deux observations d'astre(s), quels qu'ils soient, prises à un instant quelconque, que les recherches britanniques de simplification se sont orientées. En Grande

[55] Peninsular and Oriental Steam Navigation Company.
[56] La 20e édition du « Nicholl's Concise Guide of the Board of Trade Examinations for Masters and Mates » de 1922 est encore muette sur Marcq de Saint-Hilaire.

Bretagne, vers 1880, A. C. Johnson, Naval Instructor, avait ouvert la voie en proposant une méthode relativement simple de calcul du point par deux hauteurs[57], toutes deux prises hors du méridien ; vingt ans plus tard, H. B. Goodwin et H. S. Blackburne vont à leur tour rechercher, chacun de leur côté, des méthodes originales essentiellement adaptées aux observations d'étoiles.

Les tables de point d'étoiles de H. B. Goodwin :

Les différents développements théoriques relatifs à ces tables sont donnés en annexe 14-1.

L'idée directrice de H. B. Goodwin est d'utiliser deux observations quasi simultanées d'étoiles dont les azimuts diffèrent d'environ 90° ; on obtient dans ces conditions deux droites de hauteur se coupant presque à angle droit en P, comme représenté sur la figure 14-1. Il existe évidemment un très grand nombre de possibilités mais, dans le but de simplifier les calculs, Goodwin va choisir d'observer, parmi les plus brillantes, une étoile A_1 à proximité du méridien estimé de l'observateur – elle est alors approximativement au N ou au S – et une autre A_2 au voisinage du premier vertical ou, le cas échéant, de sa digression azimutale maximale, donc, proche de l'E ou de l'W. Ces conditions particulières d'observation vont permettre de traiter l'observation de A_1 en circumméridienne, en utilisant la réduction au méridien. Pour l'observation de A_2, H. B. Goodwin a développé un procédé analogue visant à la traiter à l'aide d'une réduction au premier vertical (ou à la digression azimutale maximale). Ce concept de détermination du point fait l'objet d'un petit ouvrage intitulé « Position-Line Star Tables for Fixing Ship's Position by Reduction to Meridian and Prime Vertical, without Logarithmic Calculation » publié en 1906.

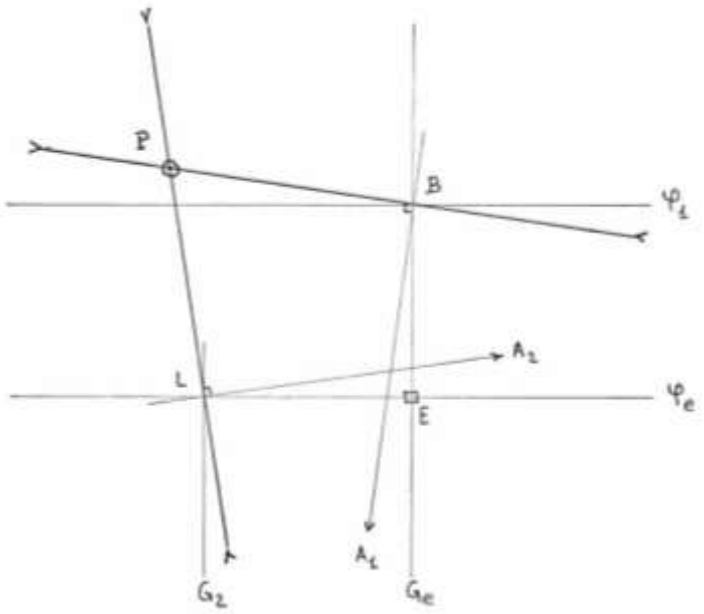


Fig : 14-1

Traitement de l'observation voisine du méridien : il s'agit d'une observation circumméridienne pour laquelle il est nécessaire de calculer l'azimut et la réduction au méridien. Concernant l'azimut, Goodwin renvoie à l'usage d'une table dédiée à ce calcul (il cite Burdwood et Davis). La réduction est ensuite évaluée en fonction du demi-azimut calculé ci-dessus et de la latitude ; elle est donnée par une table de ses « Position-Line Star Tables » sous l'appellation de « rate of change of altitude in minutes per minute of time[58] ». La réduction cherchée est obtenue en multipliant cette variation unitaire par l'angle au pôle estimé de l'astre. À partir de la distance zénithale vraie de l'astre, de sa déclinaison et de cette réduction, on calcule la latitude φ_1 du point déterminatif Borda (B) situé sur le méridien estimé de longitude G_e et on trace la droite de hauteur correspondante dont l'orientation est fixée

[57] « On Finding the Latitude and Longitude by Cloudy Weather »; la méthode de calcul proposée est inspirée de celle conçue par L. Pagel.
[58] Cette table figure également dans les anciennes livraisons du « Brown's Nautical Almanac ».

par l'azimut calculé précédemment. Dans cette phase des opérations, il conviendra toutefois de veiller à ne pas excéder une certaine valeur d'angle au pôle qui, en l'absence de tout autre élément, pourra être fixée de la manière suivante : l'intervalle de temps, en minutes, par rapport au passage au méridien ne doit pas excéder le nombre de degrés de la distance zénithale méridienne.

Traitement de l'observation voisine du premier vertical ou de la digression maximale :

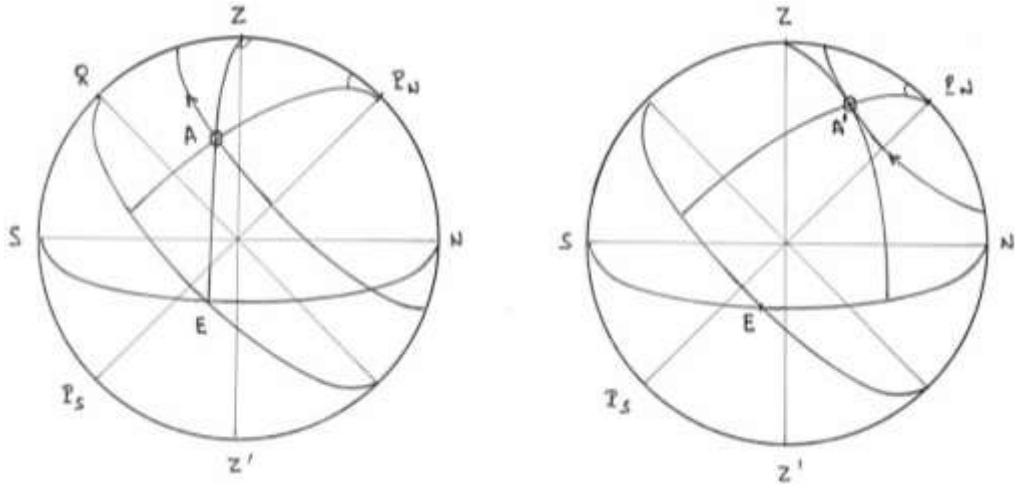


Fig : 14-2

Les figures 14-2 représentent la sphère locale d'un observateur sur lesquelles on a fait figurer un astre A au passage au premier vertical Est (à gauche) et la digression maximale Est d'un astre A' (à droite) ; dans le premier cas, le triangle de position est rectangle en Z, dans le second, il est rectangle en A'. Dans un cas comme dans l'autre, les formules de résolution du triangle se simplifient et permettent l'évaluation de l'angle au pôle et de la hauteur en fonction de la latitude estimée et de la déclinaison. Maintenant, si l'observation d'une étoile A_2 a lieu dans un voisinage du premier vertical ou de la digression, il est envisageable d'en calculer l'angle au pôle en ajoutant algébriquement un terme correctif – la réduction au premier vertical ou à la digression – à celui calculé pour l'un de ces évènements précis ; cette réduction est donnée en fonction de la latitude et du nom de l'étoile dans des tableaux sous les titres de « Elements upon Prime Vertical » et « Elements of Stars at Maximum Azimuth ». On en déduit ainsi l'angle au pôle calculé pour la latitude estimée φ_e ; sa connaissance conduit à la longitude G_2 du point déterminatif Lalande (L). Un calcul d'azimut permet ensuite de tracer la droite de hauteur correspondante ; son intersection en P avec la droite de hauteur circumméridienne donne le point si les deux observations sont quasi simultanées. Ajoutons pour terminer cette rapide présentation que la seconde observation peut aussi être traitée selon un processus identique conduisant au tracé de la droite de hauteur selon la méthode de Marcq de Saint-Hilaire.

La résolution du problème de la circumméridienne étant connue depuis longtemps, il reste à trouver une solution commode pour calculer la réduction au premier vertical ou à la digression maximale. De prime abord, il faudrait tout d'abord construire une table à double argument – latitude et déclinaison – donnant l'angle au pôle et la hauteur d'un astre aux instants considérés ; deux autres tables sont ensuite nécessaires pour évaluer la réduction qui s'exprime en un ou deux termes. La solution est donc lourde, notamment en feuilletage et interpolations doubles et on peut se demander si elle apporte une simplification par rapport aux autres méthodes en usage ; elle est par contre applicable à n'importe quel astre. Si maintenant on ne considère que les observations d'étoiles, dont la déclinaison est très lentement variable, on peut construire des tables propres à une sélection d'étoiles permettant le calcul des différents éléments nécessaires en fonction du seul argument latitude. C'est la solution qu'a retenu, H. B. Goodwin à partir d'une sélection qu'il a limitée aux 17 étoiles figurant dans le tableau ci-après (les valeurs de déclinaison indiquées sont celles de 1905).

Étoiles	Déclinaisons	Étoiles	Déclinaisons
Alpheratz	28° 34’ N	Régulus	12° 26’ N
Hamal	23° 01’ N	Dénebola	15° 07’ N
Aldebaran	16° 19’ N	L’Epi	10° 40’ S
Rigel	8° 19’ S	Arcturus	19° 41’ N
Bételgeuse	7° 23’ N	La Perle (Alphecca)	27° 02’ N
Sirius	16° 35’ S	Antarès	26° 13’ S
Pollux	28° 15’ N	Altaïr	8° 37’ N
Alphard	8° 15’ S	Fomalhaut	30° 08’ S
		Markab	14° 42’ N

Sur la base de cette sélection – qui demanderait naturellement à être étendue – H. B. Goodwin donne, en trois tableaux les valeurs du temps sidéral local (angle horaire local du point vernal AHsg) pour lesquelles ces étoiles passent au premier vertical E et W, à l’azimut maximal (ou digression azimutale maximale) à l’E et à l’W et au méridien du lieu. Ces tableaux permettent de faire le choix des deux étoiles à observer au moment de l’aube et du crépuscule.

Viennent ensuite les tableaux relatifs au calcul de la réduction au premier vertical ou à la digression azimutale maximale dont on détaille les opérations en annexe 14-1 ; ces tableaux sont indexés selon le nom de chacune des étoiles sélectionnées, les éléments calculés n’étant ensuite fonction que de la seule latitude estimée. Dans ces tableaux figurent également des données permettant de corriger les éléments calculés des effets de la variation de déclinaison de l’étoile considérée avec le temps.

Les tables de H. S. Blackburne :

L’objectif principal de H. S. Blackburne était de libérer les officiers de la marine marchande britannique du carcan des règles strictes qui leur étaient inculquées lors de leur formation maritime dans un but exclusif de réussite à l’examen puis de les extraire de la routine des usages en vigueur sur les passerelles. Au travers de ses ouvrages, Blackburne va donc tenter d’encourager et de faciliter la pratique des observations d’étoiles, de fournir des éléments de calculs commodes pour les observations extra-méridiennes, de développer les méthodes graphiques sur la carte ou sur papier libre et de promouvoir l’emploi de la méthode Marcq de Saint-Hilaire en l’adaptant à certaines habitudes britanniques ; à la lecture des préfaces des différentes éditions de ses deux principaux ouvrages, on relève l’amertume de Blackburne constatant l’immobilisme du Board of Trade face aux progrès des méthodes de calcul, dont les épreuves d’examen se déroulent toujours entre les latitudes 46° et 52°, et l’ignorance concomitante des jeunes officiers face aux réalités de la pratique.

Le premier ouvrage paru est un recueil de tables intitulé « Tables for Azimuths, Great-Circle Sailing and Reduction to the Meridian » publié sous l’égide du New Zealand Nautical Almanac en 1903 ; l’ouvrage a ensuite été étendu en 1905 et publié par plusieurs éditeurs ; il a été réédité régulièrement au moins jusqu’en 1923, l’extension des tables nécessitant un second volume probablement à partir de 1916. Le second ouvrage, « Tables of Calculated Hour-Angles and Altitude-Azimuth Table » a été publié en 1914, une seconde édition paraissant en 1916.

Les « Tables for Azimuths, Great-Circle Sailing and Reduction to the Meridian » contiennent, dans le premier volume de l’édition de 1923, 78 tables, l’édition de 1914 des « Tables for Calculated Hour-Angles and Altitude-Azimuth Table » n’en comportant que 16, pour sa part. Si on considère globalement les deux ouvrages, on y trouve toutes les tables d’usage courant en navigation comme celles relatives aux corrections des hauteurs, aux lever et coucher d’un astre, de point estimé et de conversions diverses auxquelles vont s’ajouter des tables originales, visant à simplifier la détermination du point, dont les plus marquantes font l’objet des développements ci-après.

Tables ABC :

Ces tables ont été présentées au chapitre 6 et à l'annexe 6-2. Rappelons qu'elles permettent de calculer le coefficient Pagel et l'azimut d'un astre en fonction de l'angle au pôle, de la déclinaison et de la latitude à partir de la formule dite des cotangentes. H. S. Blackburne va compléter la disposition classique des tables ABC en calculant deux tables associées qu'il référence C_1 et C_2 (voir annexe 14-2), cette dernière ayant essentiellement été calculée pour résoudre le problème de la détermination des coordonnées du point situé à l'intersection de deux droites de hauteur sur un plan rapporté à un repère orthonormé ou « carte plate ». La table C_2 donne en effet directement, en fonction des quantités A et B trouvées dans les deux premières tables, la direction de l'image de la droite de hauteur sur un graphique dont les échelles des latitudes et des longitudes sont identiques ; elle permet ainsi la détermination graphique des coordonnées du point si une seconde droite a été observée simultanément à la première. La table C_1 donne le complément de l'angle calculé en table C_2 ce qui correspondrait donc à la direction azimutale reportée sur une carte plate. En tout état de cause, la carte plate ne conserve pas les angles (sauf à l'équateur) et les directions calculées à l'aide des tables C_1 et C_2 ne sont pas les azimuts des astres[59] ni les directions des lieux ; l'utilisation de la carte plate comporte donc un important risque d'erreur qui constitue peut-être la raison pour laquelle l'usage de ce genre de graphique n'était pas autorisé aux examens du Board of Trade, à la grande déception de Blackburne qui en était un ardent défenseur.

Table d'angles horaires :

De même, ces tables ont été présentées au début du chapitre 11. On insistera simplement sur les taux de variation calculés par Blackburne, notamment la variation unitaire V, exprimé en secondes de temps, de l'angle horaire résultant d'une variation de latitude de 1' pour une latitude, une déclinaison et une hauteur données. Ce paramètre sera en effet utilisé comme argument d'entrée dans d'autres tables.

Table d'azimut en fonction de la variation unitaire d'angle horaire :

Cette table donne l'azimut par quadrant en fonction de la latitude du lieu et la variation V ci-dessus (voir annexe 14-2).

Ex-Meridian tables ou tables donnant la réduction au méridien des hauteurs extra-méridiennes :

H. S. Blackburne présente plusieurs tables de calcul de la réduction dont certaines ont été calculées avec la collaboration de l'astronome Charles Westland. L'une d'elles permet un calcul exact de la réduction, sans limite de valeur d'angle au pôle, en deux entrées successives ; la formulation en a été donnée en annexe 13-1 et rappelée en annexe 14-3. Les autres tables en permettent un calcul approché selon diverses expressions, l'argument d'entrée pouvant être la somme A + B obtenue avec les tables ABC ou la variation unitaire V déterminée par la table d'angles horaires. Une de ces tables donne la valeur de la réduction calculée pour un lieu situé sur l'équateur que l'on corrigera ensuite en fonction de la latitude du lieu ; cette dernière méthode est à rapprocher de celle mise au point par E. Guyou[60]. Toutes les tables de calculs approchés de la réduction sont précédées de tableaux donnant les angles horaires limites d'application au-delà desquels l'écart par rapport à un calcul exact excède 0,5' ; d'autre part, la réduction calculée est, dans tous les cas, celle correspondant à une variation unitaire de l'angle horaire, la réduction à considérer étant le produit de cette variation unitaire par l'angle horaire exprimé en minutes d'heure. Une présentation succincte des tables de réduction les plus caractéristiques figure en annexe 14-3.

Tables relatives aux observations d'étoiles :

Dans ses ouvrages, H. S. Blackburne précise les deux principaux avantages des observations d'étoiles par rapport à celles du Soleil :

1) détermination du point par deux observations quasi simultanées, sans avoir à attendre plusieurs heures que l'azimut du Soleil ait évolué de façon significative,

[59] Il faut alors se ramener au parallèle ou au méridien estimé d'où, probablement, l'origine de la méthode Marcq de Saint-Hilaire modifiée (améliorée) donnée par Blackburne.
[60] Voir son ouvrage : « Les problèmes de navigation et la carte marine », Berger-Levrault, 1896.

2) meilleures conditions d'observation, du point de vue de la réfraction et de la dépression apparente de l'horizon : les hauteurs observées sont moins sujettes aux incertitudes.

Ces avantages, réels, ont conduit H. S. Blackburne à chercher à faciliter au maximum les observations d'étoiles. On trouve donc en premier lieu dans les ouvrages mentionnés un tableau donnant les coordonnées équatoriales moyennes d'une centaine d'étoiles, pour une date donnée, avec les éléments de variation ainsi qu'un tableau donnant les instants, en temps moyen local, de passages de ces étoiles au méridien supérieur (et le cas échéant au méridien inférieur) le 1er jour de chaque mois. En second lieu, Blackburne a calculé les réductions au méridien de la trentaine d'étoiles qu'il a sélectionnées ; ces réductions, ainsi que les azimuts correspondants, sont donnés dans des tableaux particuliers en fonction de la latitude et de l'angle horaire local de l'étoile considérée. Blackburne a également effectué ces mêmes calculs pour certaines étoiles circumpolaires observées au voisinage du méridien inférieur pour lesquelles le principe de la réduction au méridien peut également être appliqué : les formules de calcul de la réduction sont identiques à celles obtenues pour le méridien supérieur en considérant le supplément de l'angle au pôle, caractérisant ainsi la position de l'astre par rapport au méridien inférieur.

Pour que l'ensemble soit d'utilisation aussi pratique que possible, H. S. Blackburne indique les éléments nécessaires à la préparation des observations qui, naturellement, doivent être faites aux moments du crépuscule ou de l'aube. Il figure donc dans ses tables :

- des tableaux, construits pour les latitudes 60° N, 40° N et S, 20° N et S et 0°, donnant pour l'ensemble des étoiles sélectionnées les temps sidéraux locaux limites d'utilisation de deux type de tables de calcul de la réduction, des azimuts correspondants ainsi que le temps sidéral local du passage au méridien supérieur,
- le cas échéant, ces mêmes résultats sont donnés en vue d'observations au voisinage du méridien inférieur,
- un tableau donnant, en fonction du temps sidéral local, le couple d'étoiles à observer adapté à un calcul de point à l'aide de l'une des tables de Blackburne par la méthode du méridien estimé (ex-meridian).

On donne quelques exemples de ces tableaux en annexe 14-4.

Improved Marcq Saint-Hilaire Method :

H. S. Blackburne reconnaît que la méthode de calcul des éléments de la droite de hauteur découverte par Marcq de Saint-Hilaire en 1875 constitue un progrès ; il constate que cette méthode est, en 1923, d'utilisation courante dans la Royal Navy et souhaite qu'il en devienne de même dans la marine marchande. Il expose avoir longtemps préféré combiner une observation en longitude, ou « chronometer altitude » (méthode du parallèle estimé et point déterminatif Lalande) et une observation en latitude, ou « ex-meridian », (méthode du méridien estimé et point déterminatif Borda) ; du fait de sa simplicité, il a finalement adopté la nouvelle méthode de calcul de la droite, en utilisant, pour le calcul de la hauteur estimée, l'une des formules en cosinus-versine ou haversine associées aux dernières éditions des tables de Norie ou à la petite table de Hall actualisant celles de Raper. Néanmoins, au vu des difficultés liées au changement d'habitude, H. S. Blackburne propose, à partir du calcul des éléments de la droite Marcq, de déterminer la longitude du point déterminatif Lalande ou la latitude du point déterminatif Borda, ceci dans le but de poursuivre le calcul d'un point astronomique selon les anciens usages. Dans le cas où le calcul a été effectué à partir du point estimé, la procédure est la suivante :

- calcul de la hauteur estimée H_e par la formule en cosinus-versine et de l'intercept $H_v - H_e$,
- calcul de l'azimut Z par les tables ABC,
- si la latitude est demandée sur le méridien estimé, utiliser une table de point dans laquelle on entrera avec l'azimut Z en angle de route et l'intercept en chemin NS ; la distance correspondante est la différence de latitude cherchée par rapport à la latitude estimée ;
- si maintenant, c'est la longitude sur le parallèle estimé qui est requise, on entrera dans la table de point avec l'azimut Z en angle de route et l'intercept en chemin EW ; la distance correspondante est le chemin en longitude cherché, exprimé en milles ; la différence de longitude, par rapport au point estimé, est égale au chemin en longitude trouvé divisé par le cosinus de la latitude.

H. S. Blackburne a baptisé ce procédé « Improved Marcq St-Hilaire Method ».

Richesse des exemples :

De très nombreux exemples numériques, tirés de situations réelles, illustrent les différentes tables publiées par H. S. Blackburne. Tous les cas de figure sont envisagés et un même exemple est souvent traité selon des méthodes différentes. On y relève des calculs complets de point :

- par l'ancienne méthode de Sumner (avec ou sans carte plate),
- par la « double chronometer method » d' A. C. Johnson,
- par deux observations traitées toutes deux par la méthode du méridien estimé (ex-meridian) avec ou sans usage de l'une des tables donnant la réduction,
- par deux observations, l'une traitée en « longitude », l'autre en « latitude »,
- par deux observations traitées selon la méthode de Marcq de Saint-Hilaire (« improved » ou non),
- avec ou sans utilisation d'un traitement graphique.

L'analyse de tous ces exemples est extrêmement instructive sur les habitudes de l'époque, notamment dans la marine marchande britannique.

Commentaires :

L'idée d'utiliser deux observations presque simultanées d'étoiles distantes en azimut d'environ 90° est intéressante car elle conduit à la détermination géométrique du point la meilleure. Cependant, il faut reconnaître que l'artifice de calcul mis au point par H. B. Goodwin pour calculer l'observation voisine du premier vertical, intéressant mathématiquement parlant, n'apporte pas une grande simplification par rapport aux autres méthodes en usage à l'époque. Bien que l'auteur se soit attaché à donner des instructions d'emploi simples et rigoureuses, accompagnées de la justification des formules utilisées, les « Position-Line Star Tables » sont donc plutôt à classer parmi les travaux de recherche que parmi les réalisations d'usage courant ; on remarquera néanmoins que le procédé s'adapte particulièrement bien à la méthode Marcq de Saint-Hilaire, ce que son auteur souligne dans sa préface :

> « … *The method lends itself with facility to all the Sumner processes in common use, more particularly to the Marcq Saint-Hilaire method, now adopted generally in the Royal Navy*. »

Les travaux de H. S. Blackburne sont nettement plus généralistes et visent l'utilisation pratique journalière. L'analyse des différents ouvrages montre le caractère opiniâtre de leur auteur qui fut un infatigable calculateur, totalement imprégné de la mission qu'il s'était fixée[61] : participer à l'amélioration de la sécurité maritime en fournissant au navigateur les outils lui permettant de déterminer simplement, et aussi souvent que possible, la position observée de son navire ; toutes les observations doivent pouvoir concourir à l'élaboration du point, notamment celles relatives aux étoiles ou aux planètes prises au crépuscule ou à l'aube. Cependant, l'œuvre de H. S. Blackburne apparaît compliquée car les ouvrages veulent offrir un maximum de données de calcul dans un minimum de place : ils sont donc touffus. De plus, ils offrent souvent plusieurs alternatives au navigateur – notamment les tables de calcul de la réduction au méridien – sans qu'une règle ne se dégage clairement des textes de présentation, ces derniers s'articulant en instructions d'emplois, notes et commentaires de l'auteur et exemples. L'utilisation de ces tables ne nous a donc pas toujours paru très commode d'autant plus que les interpolations sont fréquemment nécessaires sans pour autant que des tableaux de parties proportionnelles soient prévus.

Il est clair que les principes émis par William Hall[62] en 1913, relatifs à l'universalité de la méthode de Marcq de Saint-Hilaire, n'ont pas encore imprégné les esprits des navigateurs, loin s'en faut, ce qui conduit Blackburne à poursuivre l'utilisation des anciennes méthodes et à adapter le procédé de Marcq de Saint-Hilaire pour le ramener

[61] On ne peut s'empêcher de faire un rapprochement entre Ch. Bertin et H. S. Blackburne.
[62] In « Appendix to Raper's Practice of Navigation », 1913.

au méridien ou au parallèle estimé ; il présente, et illustre, les différentes combinaisons possibles selon les cas de figure, avec, visiblement, une préférence pour la méthode du méridien estimé liée à l'usage de tables de réduction.

On n'insistera pas sur la notion de carte plate que H. S. Blackburne développe longuement. Elle peut constituer une simplification dans la construction du graphique de point mais c'est une source de confusion, donc d'erreur, puisque les directions reportées sur ce graphique diffèrent de celles réellement observées, cette « carte » ne conservant pas les angles (sauf à l'équateur). Il est curieux que H. S. Blackburne n'est pas développé l'idée du graphique Mercator qui ne nécessite également qu'une simple feuille de papier quadrillé, une règle graduée, et un rapporteur.

En définitive, H. B. Goodwin, l'expert en navigation, et H. S. Blackburne, le marin, ont-ils atteint leurs objectifs ? Malgré la qualité de leur présentation, l'aspect mathématique et l'apparente complexité des « Position-Line Star Tables » de Goodwin sont sans doute propres à rebuter l'utilisateur moyen ; de plus, la sélection d'étoiles, expérimentale, est, dans l'état, insuffisante pour couvrir une utilisation journalière sous toutes les latitudes. De toute évidence, l'expérience, intéressante sur les plans théorique et pédagogique, n'a pas été poursuivie et, semble-t-il, n'est pas sortie des frontières du Royaume-Uni. H. S. Blackburne, et ses éditeurs, font figurer dans leurs ouvrages des propos encourageants rédigés par des personnes autorisées, marins civils et militaires, journalistes spécialisés, qui en assurent la promotion, appuyée par le Brown's Nautical Almanach qui en a aussi fait longtemps la publicité. Les tables de Blackburne avaient donc leurs adeptes sous pavillon britannique et ont très probablement rendu les services attendus malgré une présentation parfois obscure. Les voies de recherche explorées par Goodwin et Blackburne vont évoluer : d'une part concernant le choix des « bonnes » étoiles pour la détermination du point à l'aube et au crépuscule grâce à l'identificateur d'étoiles[63] (star finder) mis au point par Gilbert T. Rude dans les années 1920 et d'autre part par l'utilisation généralisée de la méthode universelle de Marcq de Saint-Hilaire qui permet de traiter selon la même procédure n'importe quelle observation, circumméridienne comprise, quel que soit l'astre. Le volume 1 de la table américaine HO249 constituera plus tard l'ultime perfectionnement dans la préparation et le calcul du point d'étoiles : cette table permet, pour le moment du point crépusculaire, la sélection judicieuse d'étoiles, la détermination des coordonnées horizontales approximatives des étoiles choisies pour le pré-calage du sextant, puis le calcul définitif.

Annexe 14-1 : Position-Line Star Tables, H. B. Goodwin.
Annexe 14-2 : Tables ABC, C_1, C_2 et variations unitaires, H. S. Blackburne ;
Annexe 14-3 : Tables de calcul de la réduction au méridien. H. S. Blackburne.
Annexe 14-4 : Tables relatives aux observations d'étoiles et exemples ; H. S. Blackburne.

[63] Il existait, dans la marine française, le navisphère (tête de veau), mis au point à la fin du XIXe siècle par H. Aved de Magnac. L'équivalent existait très probablement dans les autres marines mais l'usage en était-il courant ?

ÉPILOGUE

Nous voici arrivés au terme de cette étude dévolue aux tables de navigation. Calculatrices électroniques et micro-ordinateurs vont prendre le relais, réhabilitant ainsi l'usage des trois formules classiques de résolution directe d'un triangle sphérique quelconque et renvoyant vers les profondeurs de l'oubli la plupart des tables de calcul numérique, quel qu'en soit le domaine d'application. Rapidement, je me suis rendu compte que les échanges entre utilisateurs de moyens de calcul électroniques étaient aussi passionnés que ceux qui avaient lieu précédemment à propos des tables : le meilleur outil est celui que l'on utilise chaque jour et c'est donc de celui-là précisément dont on défendra les avantages – parfois exagérés – et minimisera les défauts avec véhémence et plus ou moins bonne foi ; c'est une affaire personnelle. À partir de cette constatation, je m'abstiendrai de bâtir un tableau des mérites comparés des différentes tables et abaques passés en revue au fil de cette étude mais ferai simplement remarquer que le temps et l'usage ont fait la sélection des outils les mieux adaptés, a priori tout au moins, puisque quelques réalisations intéressantes ont été laissées de côté.

Mais, il y a lieu de relever tout d'abord que toutes les voies de résolution possibles du problème ont été explorées, qu'il s'agisse de la décomposition du triangle de position en deux triangles rectangles et ses différentes possibilités suivant les arguments d'entrée et les paramètres intermédiaires choisis, de l'application de la méthode directe liée à l'une des multiples formes que l'on peut donner à la formule fondamentale, des méthodes graphiques ou encore de recherches plus poussées. La puissance américaine apportera une réponse définitive au problème, en donnant les résultats des résolutions de millions de triangles sphériques quelconques, cela à la condition d'accepter d'utiliser un point de calcul particulier, le point auxiliaire, qui fut l'objet des nombreuses polémiques que l'on a évoquées.

L'index des tables fait état de tous les documents que j'ai pu consulter, directement ou indirectement, par le biais de comptes rendus d'analyse comme ceux parus dans les publications de l'American Mathematical Society. La prédominance est britannique, française et américaine et s'explique facilement en reprenant le fil de l'histoire du point astronomique en mer. Mais, il est certain que l'inventaire dressé est incomplet : il y manque des documents difficiles à consulter et/ou à exploiter pour des raisons de langue, comme ceux conçus en Allemagne, en Russie et dans l'ancienne URSS, dans ce qui fut la Yougoslavie ainsi qu'au Japon ; la liste n'est pas limitative.

Je reviens à la décennie 1970-80 où la navigation astronomique régnait encore en maîtresse à bord des navires armés au long-cours : la pratique des points d'étoiles du matin et du soir, du point de midi et de la détermination astronomique de la variation du compas était journalière. À cette époque, les documents de calculs habituellement rencontrés sur les passerelles des navires de commerce français étaient les trois volumes des tables américaines HO249, la table de J.-B. Dieumegard, les tables d'azimut d'É. Perrin ou de L. Bataille et, naturellement, l'ouvrage de G. Friocourt ; la présence des tables HO214 ou HO229 (ou de leurs équivalents britanniques et français), pourtant destinées à la navigation maritime, était plus rare et, sauf rencontre fortuite, les autres tables avaient purement et simplement disparu de la circulation ; la situation était – grosso modo – identique dans la Marine nationale avec une prédominance des tables 900 qui regroupaient Dieumegard et Bataille, 901 (HO214) et 902. On peut évoquer plusieurs raisons à cela, les plus évidentes étant la simplicité d'utilisation des tables citées, l'obligation de maintenir Friocourt pour des raisons réglementaires, et aussi parce que c'était le seul document français dans lequel figurait une table des latitudes croissantes pour effectuer les calculs de routes et distances loxodromiques ; on remarque également la non-réédition en France, après la Seconde Guerre mondiale, de quasiment toutes les tables utilisant la décomposition du triangle de position en deux triangles rectangles, notamment celles de Ch. Bertin qui, avant le conflit, étaient réglementaires dans la Marine nationale. À la même période les officiers des navires de commerce armés sous influence britannique, américaine, allemande ou scandinave disposaient, en sus des tables à triple argument du type HO249 ou 229, de tables d'usage général beaucoup plus pratiques que celles de G. Friocourt : on retiendra simplement les tables de Norie, de Burton, de Inman, de Fulst, de Rose et le tome II du Bowditch. On peut s'étonner de voir que l'ouvrage de G. Friocourt, dont la première édition remonte à 1899, n'a jamais été mis à jour et est resté en vigueur jusqu'en 1980 ; il aurait

naturellement dû être actualisé dès les années 1920 où des tables devenues obsolètes ou inutiles[64] auraient pu être retirées au profit d'éléments de calcul plus récents ; on en aurait également profité pour présenter les tables des logarithmes des rapports trigonométriques avec un intervalle d'argumentation de 0,1' au lieu de 15''. Personne n'a sans doute voulu toucher au monument … à moins que ceux qui ont tenté de le faire n'aient été immédiatement bâillonnés pour d'obscures raisons.

Les Britanniques, et, d'une manière générale, l'ensemble des pays anglo-saxons, ont adopté pour les calculs de navigation les logarithmes à cinq décimales dès le début du XXe siècle. Dans le courant du XIXe siècle, ils avaient aussi adopté l'expression en cosinus-versine ou haversine de la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique. En France, la doctrine officielle imposait l'emploi de l'expression en sinus et cosinus de ladite formule et son calcul par logarithmes à six décimales ; en conséquence, par rapport à la version anglo-saxonne, il y a une étape de plus dans le calcul de la formule à laquelle se joint une augmentation du temps de calcul du fait de la décimale supplémentaire[65]. On ne peut que regretter la position française qui restera butée sur les usages anciens liés à l'utilisation des tables de Caillet puis de Friocourt. On peut penser que la non-validation de la formule en cosinus-versine ou haversine est un regrettable vieux réflexe trouvant son origine dans l'ancestrale rivalité franco-anglaise, le maintien des six décimales étant, quant à lui, justifié par des considérations – masochistes ? – liées à l'entraînement au calcul numérique. Quelques essais ont pourtant été faits pour tenter d'introduire les logarithmes à cinq décimales, notamment par le professeur d'hydrographie P. Constan en 1930, visiblement sans suite. Quoi qu'il en soit, à la veille de la seconde guerre mondiale, J.-B. Dieumegard a su tirer tout le bénéfice de la formulation britannique qu'il a associée à des logarithmes à quatre décimales particulièrement bien présentés : le document final est léger, facile à utiliser, sans règles de signe à appliquer et donne un résultat d'une précision pratique en général suffisante, d'où son succès.

Je ne reviendrai pas sur les documents de calcul graphique qui ne furent guère populaires auprès des marins pour des raisons qui ont été clairement exprimées et justifiées par des experts reconnus comme S. T. Lecky et P. Hugon. Seuls, probablement, le diagramme d'azimut de Weir et sa version française de Cornet ont pu être d'utilisation courante. J'ai également relevé que quelques navigateurs solitaires[66] avaient su tirer parti, dans les années 1950-60, de l'abaque de Favé et Rollet de l'Isle fractionné par S. de Neufville dans sa « Navigation sans logarithmes ».

Parmi les grands oubliés en France, c'est la figure de Fernand Souillagouët qui s'impose ; son idée, régénérée au Japon, s'est imposée dans tous les pays anglo-saxons. Remise au goût du jour selon la forme simplifiée mise au point par S. Ogura en 1920 et rééditée en France, sa table aurait pu faire jeu égal avec celle de J.-B. Dieumegard tout en étant plus précise. Un tel outil aurait pu être inclus dans un document « Friocourt modernisé » comportant les logarithmes des nombres et rapports trigonométriques à cinq décimales ainsi que des tables du type Perrin ou Bataille … on aurait ainsi disposé d'un document complet et performant. J'ajoute qu'il y a quand même eu, en France, un essai de recueil pratique de tables utiles à la navigation sous l'égide du Service Hydrographique en 1963 : il s'agit des tables 900 qui regroupaient notamment une table de point estimé, les tables de Dieumegard et de Bataille puis les éléments nécessaires au calcul de la latitude circumméridienne ; l'essai était intéressant mais trop timide. Quoiqu'il en soit, l'abandon total, en France, de l'idée de Souillagouët reste mystérieux et bien injustifié. Il y a évidemment d'autres grands oubliés, citons G. De Lannoy qui fut sans doute le premier à mettre en table les coordonnées horizontales d'étoiles judicieusement sélectionnées, Ch. Bertin qui s'est battu comme un diable et avait ses adeptes et P. Hugon, pourtant largement reconnu pour son expertise, dont les tables dérivent de la formulation britannique. Si en France, après quelques ultimes sursauts comme l'astucieuse table de P. Domenjoud en 1984, la « mémoire » des tables semble être complètement effacée, elle reste vivace aux États-Unis où, à partir de 1989 on a eu l'excellente idée d'intégrer au Nautical Almanac une table de calcul simplifié des éléments de la droite de hauteur. Toujours aux États-Unis, des passionnés[67] tentent de faire revivre la navigation astronomique pratiquée à l'ancienne ; dans cet esprit, quelques auteurs ont retravaillé des documents courants pour

[64] Tables de hauteurs correspondantes, courbure des courbes de hauteur … et toutes les tables faisant double emploi avec celles figurant dans les Éphémérides nautiques, document dont l'usage est incontournable.
[65] D'après le mathématicien allemand Encke, les temps nécessaires à l'exécution d'un même calcul logarithmique à 5, 6 ou 7 décimales sont entre eux comme les nombres 1, 2 ou 3.
[66] Bernard Moitessier et Pierre Auboiroux, entre autres.
[67] NavList, a community devoted to the preservation and practice of celestial navigation. Animé par Frank Reed, expert en navigation astronomique, elle regroupe des marins et des passionnés d'horizons divers, scientifiques et amateurs d'histoire maritime.

les rééditer sous format réduit permettant de les ranger dans la boîte du sextant : on retiendra A. Bayless et M. Pepperday avec l'ancien document HO211 d'Ageton puis G. Rudzenski avec la table expérimentale, française, de R. Doniol.

Enfin, s'il m'était donné de repartir au long cours, avec l'aide électronique courante des années 1970, quelles tables emporterais-je ? Sans hésiter, je choisirais en premier lieu le volume 1 – Selected Stars – des tables américaines HO249 pour sa commodité dans la préparation comme dans la résolution du point d'étoiles. En second lieu, mon choix se porterait sur un descendant de F. Souillagouët, avec une nette préférence pour les Hughes Tables de L. J. Comrie qui présentent toutes les qualités de précision requise, et qui garantit notamment une hauteur calculée à 0,5' près, ce que son auteur avait souhaité voir adopter comme standard de précision en navigation maritime. Outre la qualité de ses instructions et la présence de nombreuses tables annexes, dont celle des latitudes croissantes, le document d'environ 180 pages est servi par une excellente typographie ; l'ensemble est ainsi suffisant pour traiter tous les problèmes courants de navigation. Cependant, pour faire bon poids, j'emporterais également les tables de l'amiral Perrin qui constituent simultanément, de par les qualités pédagogiques de son auteur, un véritable vade-mecum de navigation astronomique et un recueil commode de tables usuelles.

Quel avenir pour la navigation astronomique ? L'observation est exclusivement une affaire d'entraînement : un bon observateur – ou un observateur sûr – observe régulièrement. Le calcul est évidemment aussi une question de pratique mais est aujourd'hui considérablement simplifié par l'utilisation de logiciels spécialisés ou d'une simple calculette scientifique. Sous sa forme classique, il faut, je crois, reconnaître que la navigation astronomique n'est plus en mesure de pallier rapidement une défection d'un système de positionnement par satellites du simple fait du manque de pratique des officiers de quart ; j'ajouterai que les passerelles des navires sont aujourd'hui complètement fermées rendant l'observation difficile, voire impossible. Pratiquement, c'est donc un autre système de navigation radioélectrique qui doit venir pallier la défection du premier. Ceci dit, rien n'interdit de penser que les navires puissent être un jour équipés de capteurs rendant la navigation astronomique entièrement automatique, depuis la mesure des hauteurs – ou des distances zénithales – jusqu'au résultat du calcul. Les matériels et les procédés existent, ce n'est qu'une question de choix et de moyens à mettre en œuvre.

En 1931, âge d'or de la navigation astronomique, Frédéric Marguet écrivait en conclusion de son « Histoire Générale de la Navigation » :

> « *L'avenir n'est peut-être pas éloigné où, sur l'étendue des mers, le recours aux astres sera devenu inutile et où le point résultera de procédés que l'on pourra faire rentrer dans ceux du pilotage, si on étend ce terme, en le généralisant, aux méthodes qui utilisent directement des points à terre pour fixer une position sur mer. Alors une immense somme de labeurs deviendra sans emploi ; mais les services qu'elle aura rendus resteront acquis à jamais*. »

On ne peut mieux conclure la saga des tables de navigations : la somme de labeurs a été immense et est devenue, finalement très rapidement, sans emploi, bousculée par l'irruption des technologies numériques, mais n'est-ce pas là le propre de l'avancée scientifique ? La navigation astronomique, à l'instar de la voile, était une école d'humilité qui imposait de toujours vérifier la cohérence d'un résultat avec l'ensemble des éléments constituant l'environnement du navire, conduisant ainsi l'officier de quart à exercer tout son sens critique. Les nouvelles technologies, dont on ne peut nier les avantages, ne doivent pas conduire à faire disparaître cette pratique de remise en question permanente. Mais, ceci n'est qu'un vœu pieux car les recherches sont aujourd'hui essentiellement tournées vers un fonctionnement du navire sans équipage :

> « *La vague de numérisation qui se lève promet de les balayer tous, menant la tendance à son point d'aboutissement : en finir avec l'homme en mer*[68]. »

L'avenir confirmera … ou pas, mais il semble bien que la démarche soit initiée avec un premier objectif de navire autonome dont l'effectif de l'équipage sera très réduit.

Saint-Malo
Août 2019

[68] Une mer bientôt sans marins ? Omer Aury, Le Monde, cahier Éco & Entreprise, daté du 11 janvier 2019.

REMERCIEMENTS

En suivant un ordre chronologique, mes remerciements s'adresseront tout d'abord à Michèle Pellizzaro, documentaliste de l'ancienne École nationale de la marine marchande de Saint-Malo, devenue aujourd'hui l'un des quatre sites de l'École nationale supérieure maritime ; dès le début de mes recherches, fin 2009, Michèle a rassemblé des documents éparpillés en différents points de l'École – bibliothèque, salle de navigation, archives et réserves – pour constituer un fonds documentaire accessible et, simultanément, déposé en lieu sûr. Disponible et efficace, j'ai aussi toujours pu compter sur elle pour effectuer les différents travaux de reproduction.

A sa suite, je citerai Christophe Kerneau, officier de marine marchande et cheville ouvrière de l'association « Sinus He, la Mer et les Hommes », à qui j'ai adressé mes premières fiches d'études. Christophe est un marin de grande culture, navigant au plus près de l'eau ; il m'a fait redécouvrir quelques faces oubliées de l'histoire de la navigation et de sa pratique traditionnelle.

Vient après, toujours au fil du temps, Jacques Ducruy, rencontré par hasard sur le forum Internet Fer3/ NavList, dont le sens critique m'a permis de rectifier des affirmations parfois hasardeuses. Ce furent ensuite les échanges croisés entre navigations maritime et aérienne avec Marie-Cécile Kasprzyk-Istin qui me fit part de suggestions pleines de bon sens et toutes imprégnées de la rigueur doctorale.

Puis, courant 2018, alors qu'une première version de la monographie était quasiment prête, ce furent les discussions avec Yvon Petitbon et Alain Sangnier, retrouvés par l'entremise de la revue « Le Chasse-Marée ». Du premier, Yvon, je fus l'élève et du second, Alain, je fus le professeur ; tous deux contribuèrent à compléter l'inventaire des tables et à enrichir le corps du texte. Un grand merci aussi pour l'ingrat travail de relecture de la toute première version.

Ce fut enfin l'accueil qui m'a été réservé, au printemps 2019, à l'Institut français de Navigation par son secrétaire général, l'administrateur général des affaires maritimes – et capitaine au long cours – Jean-Louis Guibert et par l'ancien officier de marine Philippe Bourbon, expert en navigation et, notamment, auteur de deux ouvrages incontournables, l'un sur la navigation astronomique, l'autre sur le compas magnétique. C'est timidement que je suis allé vers cet Institut, pensant mon étude plutôt décalée et peu attractive, bien éloignée des techniques actuelles de navigation ; je me trompais et j'ai trouvé auprès de ces deux anciens marins l'indispensable contribution pour relire en détail le manuscrit, rectifier les dernières maladresses et ainsi achever la présente étude en toute sérénité.

INDEX DES TABLES DE NAVIGATION

Auteurs	Titres	Types	Première publication	Chapitre
AGETON, A. A.	Dead Reckoning Altitude and Azimuth Tables, HO211	Triangle rectangle log	1931	9
AGETON, A. A.	Manual of Celestial Navigation	Triangle rectangle semi-log	1942	8
BAGAY, V.	Nouvelles tables astronomiques et hydrographiques	Tables d'usage général Logarithmes à 7 décimales	1829	1
BAIRNSON, J.	Ex-Meridian Tables	Circumméridienne	1888	13
BALL, F.	Altitude Tables	Table à triple argument	1907	11
BATAILLE, L.	Tables nautiques	Table à double argument, calcul d'azimut	1911	6
BAYLESS, A.	Modified Ageton	Triangle rectangle log	1980	9
BENEST, E. E. & TIMBERLAKE, E. M.	Astro-Navigation Tables for the Common Tangent Method	Triangle rectangle semi-log & tangente commune	1945	8-10
BERKELEY, L. M.	Addition-Substraction Logarithms to Five Decimal Places	Table des logarithmes d'addition et de soustraction	1930	7
BERTIN, Ch.	Extrait de la table de point sphérique	Triangle rectangle lecture directe	1918	5
BERTIN, Ch.	Tablette de point sphérique	Triangle rectangle lecture directe	1919	5
BERTIN, Ch.	Carnet azimutal	Triangle rectangle lecture directe	1919	5
BERTIN, Ch.	Carnet Bertin	Triangle rectangle lecture directe	1928	5
BERTIN, Ch.	Mignonnette Bertin	Triangle rectangle lecture directe	1928	5
BERTIN, Ch.	Tablette Bertin	Triangle rectangle lecture directe	1929	5
BERTIN, Ch.	Tablette Bertin	Triangle rectangle lecture directe	1939	5
BLACKBURNE, H. S.	Tables of Calculated Hour-Angle and Altitude-Azimuth Tables	Table à triple argument	1914	11
BLACKBURNE, H. S.	Tables for Azimuths, Great-Circle Sailing and Reduction to the Meridian	Azimut, circumméridienne etc	1903	14
BOSSEN, P & MARS, D.	Nautical Tables for Ex-Meridian Observations with Applications to the Double Altitude Problem	Circumméridienne	1904	13
BRAGA, R.	Tables de hauteurs pour le calcul de la droite de hauteur Marcq de St-Hilaire	Table de calcul direct	1924	7
BRENT, Ch. WALTER, F. WILLIAMS, G.	Ex-Meridian Altitude Tables	Circumméridienne	1886	13
BURDWOOD, J.	Sun's True Bearing or Azimuth Tables	Table d'azimut à triple argument	1852	6
BURTON, S. M.	Burton's Four-Figure Navigation Tables	Table d'usage général	1944	7
BURTON, S. M.	Burton's Nautical Tables	Table d'usage général	1936	7
CAILLET, V.-M.	Tables de logarithmes et co-logarithmes, tables astronomiques et nautiques	Tables d'usage général	1854	1
CALLET, J.-F.	Tables de logarithmes suivies d'un recueil de tables nautiques	Tables d'usage général Logarithmes à 7 décimales	1783 1855	1
COMRIE, L. J.	Hughes' Tables for Sea and Air Navigation	Triangle rectangle semi-log	1938	8
CONSTAN, P.	Tables graphiques d'azimut	Abaque	1906	12

CONSTAN, P.	Tables graphiques d'azimut et tables nautiques	Abaque + compléments	1927	12
CONSTAN, P.	Tables de logarithmes à 5 décimales et tables nautiques usuelles	Tables d'usage général	1930	7
CORNET, Ch.	Tables nautiques	Triangle rectangle log	1928	9
DAVIES, T. D.	Davies' Concise tables for Sight Reduction	Triangle rectangle log	1984	9
DAVIES, T. D.	NAO Sight Reduction Tables	Triangle rectangle log	1989	9
DAVIS, J. E.	Sun's True Bearing or Azimuth Tables	Table d'azimut à triple argument	1875	6
DAVIS, P. L. H.	Davis' Requisite Tables	Table de calcul direct	1905	7
DAVIS, P. L. H.	Chronometer Tables	Table à triple argument	1899	11
DAVIS, P. L. H.	Alt-Azimuth Tables	Table à triple argument	1918	11
DAVIS, P. L. H.	Ex-Meridian Tables	Circumméridienne	1918	13
DE CATALANO, E. & M.	Table nautique des triangles rectangles rectilignes et sphériques	Triangle rectangle lecture directe sur le modèle Thomson	1918	4
DE CATALANO, E. & M.	Table zonique	Triangle rectangle lecture directe sur le modèle Thomson	1926	4
DE NEUFVILLE, S.	La navigation sans logarithmes	Abaque	1945	12
DECANTE, É.	Table du quadrant solaire azimuthal	Table d'azimut	1882	6
DELAFON, R.	Méthode rapide pour déterminer les droites et courbes de hauteur et faire le point	Triangle rectangle lecture directe sur le modèle de Thomson	1893	4
DE LANNOY, G.	Tables stellaires	Tables à triple argument	1903	11
DEUTSCHE SEEWARTE	F-Tafel	Triangle rectangle semi-log	1937	8
DIEUMEGARD, J.-B.	Petites tables de point astronomique	Table de calcul direct à 4 décimales	1949	7
DIGIPOCHE (NOIRIEL, B.)	Table Digilog	Table de calcul manuel à 4 décimales	1991	7
DOMENJOUD, P.	Tables 1-2-3	Triangle rectangle log	1984	9
DONIOL, R.	Table de point miniature	Table de calcul direct	1955	7
DORGUEIL, S.	Table nautique	Triangle rectangle ; calcul d'azimut	1911	6
DREISONSTOK, J. Y.	Navigation Table for Mariners and Aviators, HO208	Triangle rectangle semi-log	1928	8
FONTOURA da COSTA, A. PENTEADO, F.	Tàbuas de Altura e Azímute	Triangle rectangle log	1936	9
FRIOCOURT, G.	Tables de logarithmes et de navigation	Tables d'usage général	1899	1-3-6-7
FULST, D.	Nautische Tafeln	Tables d'usage général	?	7
GARCIA, J.	Tablas de lineas de position de altura	Tangente commune	1944	10
GEORGES, V.	Tables de logarithmes et de navigation	Table de calcul direct	1944	7
GINGRICH, J. E.	Aerial and Marine Navigation Tables	Triangle rectangle semi-log	1931	8
GOODWIN, H. B.	An Equatorial Azimuth Table	Azimut par réduction à l'équateur	1921	6
GOODWIN, H. B.	The Alpha Beta Gamma Navigation Tables	Table de calcul direct	1921	7

GOODWIN, H. B.	Position-Line Star Tables	Circumméridienne + 1er vertical	1906	14
GUYOU, É.	Nouvelles tables de navigation	Réduction à l'équateur	1911	3
HALL, W.	Appendix to Raper's Practice of Navigation	Table de calcul direct à 4 décimales	1913	7
HANSEN, L. F.	Ex-Meridian Tables	Circumméridienne	1919	13
HOEHNE, G. G.	Practical Celestial Air Navigation Tables	Table à triple argument	1942	11
HOMMEY, L.	Table d'angle horaire	Table à triple argument	1863	2
HUGON, P.	Nouvelles tables pour le calcul de la droite de hauteur à partir du point estimé	Table de calcul direct	1947	7
INMAN, J.	Nautical Tables Designed for the Use of British Seamen	Table d'usage général	1830	1-2
ISTITUTO IDROGRAFICO DELLA MARINA	Tavole Nautische	Table d'usage général	1941	-
ISTITUTO IDROGRAFICO DELLA MARINA	Tavole H	Triangle rectangle semi-log	1947	8
LABROSSE, F.	Table des azimuts	Table d'azimut à triple argument	1868	6
LECKY, S. T. S.	Lecky's General Utility Tables	Tables diverses dont tables d'azimut ABC à double argument	1897	6
LE SOUDÉER, J.-É.	Table LSD	Triangle rectangle lecture directe	1978	9
LIEUWEN, J. C.	Kortbestek Tafel	Triangle rectangle semi-log	1949	8
LIEUWEN, J. C.	Record Tables	Triangle rectangle semi-log	1953	8
LITTLEHALES, G. W.	The Sumner Line of Position of Celestial Bodies, HO203 & 204	Table à triple argument	1923	11
LYNN, Th.	Horary Tables for Finding the Time by Inspection	Table à triple arguments	1827	2
MACKENZIE, A.	Mackenzie's Ex-Meridian Altitude Tables	Circumméridienne	1920	13
MARTELLI, G.F.	Martelli's Navigationnal Tables	Table de calcul direct à 4 décimales	1873	7
MYERSCOUGH, W & HAMILTON, W.	Rapid Navigation Tables	Triangle rectangle semi-log	1939	8
NEWTON, J. A. & PINTO, J. C.	Navegação Moderna	Triangle rectangle	1924	8
NORIE, J. W.	Norie's Nautical Tables	Tables d'usage général	1803	1
OGURA, S.	New Altitude and Azimuth Tables	Triangle rectangle semi-log	1920	8
PEPPERDAY, M.	Celestial Navigation with the S Tables	Triangle rectangle log	1992	9
PERRIN, É.	Nouvelles tables destinées à abréger les calculs nautiques	Tables diverses dont tables d'azimut à double argument	1876	6
PIERCE, M. R.	Position Tables for Aerial and Surface Navigation, HO209	Triangle rectangle log	1931	9
PINTO, J. C.	The Simplex Navigation and Avigation Tables	Triangle rectangle semi-log	1933	8
PITAUD, A	Tables d'azimut et tables nautiques	Table de logarithmes à 3 décimales	1939	6
POUVREAU, G.	Nouvelles tables de mer pour le calcul de la hauteur, de l'heure et de l'azimut	Table de calcul direct	1885	7
RADLER de AQUINO, F.	Altitude and Azimuth Tables	Triangle rectangle lecture directe sur le modèle de Thomson	1910	4

ROSE, G.	Nautische Tafeln	Tables d'usage général	1952	7
RUST, A.	Practical Tables for Navigators and Aviators	Table de calcul direct	1918	7
RUST, A.	Ex-Meridian Altitude, Azimuth and Star Finding Tables	Circumméridienne et divers	1908	13
SERVICE HYDROGRAPHIQUE de la MARINE	Table 902 (2 volumes)	Table d'azimut à triple argument	V1 : 1953 V2 : 1956	6
SERVICE HYDROGRAPHIQUE de la MARINE	Table 900	Table d'usage général	1963	8-13
SHROEDER, S. S. & SOUTHERLAND W. H. H.	HO260 et 261, ex HO71 et 120	Azimuths of Celestial Bodies	1882	6
SMART, W. M. & SHEARME, F. N.	Position Line Table	Triangle rectangle semi-log	1922	8
SOUILLAGOUËT, F.	Tables du point auxiliaire	Triangle rectangle semi-log et lecture directe	1891	2
SOULE, C. C. & DREISONSTOK, J. Y.	Line of Position by the Sumner Method	Table de calcul direct	1982	7
THOMSON, W.	Tables for Facilitating Sumner's Method at Sea	Triangle rectangle lecture directe	1876	2
TOWSON, J. T.	Tables to facilitate the Practice of Great Circle Sailing	Triangle rectangle lecture directe	1848	2
TOWSON, J. T.	Tables for the Reduction of Ex-Meridian Altitudes	Circumméridienne	1849	13
US NAVY HYDROGRAPHIC OFFICE	Simultaneous Altitudes and Azimuths of Celestial Bodies, HO201	Table à triple argument	1919	11
US NAVY HYDROGRAPHIC OFFICE	Tables of Computed Altitude and Azimuth, HO214 et HD486 (GB)	Table à triple argument	1936	11
US NAVY HYDROGRAPHIC OFFICE	Astronomical Navigation Tables HO218 et AP1618 (GB)	Table à triple argument	1941	11
US NAVY HYDROGRAPHIC OFFICE	Sight Reduction Tables for Air Navigation, vol I, HO249 et AP3270, NP 303 (GB)	Table à triple argument	1947-51	11
US NAVY HYDROGRAPHIC OFFICE	Sight Reduction Tables for Air Navigation, vol II & III, HO249 et AP3270, NP303 (GB)	Table à triple argument	1952	11
US NAVY HYDROGRAPHIC OFFICE	Sight Reduction Tables for Marine Navigation, HO229 et NP401 (GB)	Table à triple argument	1970	11
WEEMS, P. V. H.	Line of Position Book	Triangle rectangle semi-log	1927	8
WEEMS, P. V. H.	Star Altitude Curves	Abaque	1928	12
WEEMS, P. V. H.	The Secant Time Sight	Table de calcul direct	1944	7

BIBLIOGRAPHIE

La bibliographie relative à la navigation et à l'astronomie nautique sur la période considérée est extrêmement riche. On a simplement fait figurer dans les tableaux ci-après les différents ouvrages et articles qui ont été consultés, les dates de publication indiquées étant celles des éditions que nous avons eu entre les mains.

De nombreux ouvrages ont été publiés en France par Augustin Challamel dont la maison d'édition devint successivement et à partir des années 1920 la Société d'Éditions Géographiques Maritimes et Coloniales, les Éditions Maritimes et Coloniales, les Éditions Maritimes et d'Outre-Mer et enfin Outre-Mer ; les appellations seront respectivement abrégées en SEGMC, EMC, EMOM et OM dans les tableaux ci-après.

Histoire de la navigation et de l'astronomie nautique :

Auteurs	Titres	Références éditeurs	Dates
BELLEC, F.	Histoire universelle de la navigation (2 volumes)	Monza	V1 : 2016 V2 : 2017
BOISTEL, G.	L'observatoire de la Marine et du Bureau des Longitudes au Parc Montsouris 1875-1914	IMCCE-Edite	2010
CHAPUIS, O.	A la mer comme au ciel	Presses de l'Université Paris-Sorbonne	1999
COTTER, Ch. H.	A History of Nautical Astronomy	Hollis & Carter	1968
COTTER, Ch. H.	A History of the Navigator's Sextant	Brown, Son & Ferguson	1983
GARCIA FRANCO, S.	Historia del arte y ciencia de navegar (2 volumes)	Instituto Histórico de Marina	1947
KASPRZYK-ISTIN, M.-C.	Charles Bertin, professeur d'hydrographie et auteur d'une méthode de calculs nautiques au début du XXe siècle	Université de Nantes Centre F. Viète	2011
MARGUET, F.	Histoire générale de la navigation du XVe au XXe siècle	SEGMC	1931
MAY, W. E.	History of Marine Navigation	G. T. Foulis & Co	1973
SÉGÉRIC, J.-J.	Histoire du point astronomique en mer	Marines Edition	1re ed. : 2006 2e ed. : 2013
VANVAERENBERGH, M. & IFLAND, P.	Line of Position Navigation. Sumner and Saint-Hilaire, the two Pillars of Modern Celestial Navigation	Unlimited Publishing	2003

Traités, cours, manuels et aide-mémoires de navigation et d'astronomie nautique :

Auteurs	Titres	Références éditeurs	Dates
AILLET, B.	Aide-mémoire du capitaine	A. Challamel SEGMC	2e ed. : 1922 4e ed. : 1953
BEZOUT, É.	Traité de navigation (revu par de Rossel)	Vve Courcier	1814
BOURBON, Ph.	La navigation astronomique, fondements, applications, perspectives	Institut Océanographique	2000
BOWDITCH	The New American Practical Navigator, 13e édition	E. & G. W. Blunt	1842

BOWDITCH	American Practical Navigator (2 volumes)	DMAHC	V1 : 1977 V2 : 1975
BROWN, Ch.	Nicholls' Concise Guide (2 volumes)	Brown, Son & Ferguson	1951
BURTON, S. M.	A Manual of Modern Navigation, 2nd edition	Brown, Son & Ferguson	1941
BURTON, S. M.	The Art of Astronomical Navigation, 3rd edition	Brown, Son & Ferguson	1975
CAILLET, V. M	Traité de navigation	Robiquet	2e ed. : 1857 3e ed. : 1861 4e ed. : 1868
CAILLOU, M., LAURENT, D., PERCIER, F.	Traité de navigation	Masson	1989
CASPARI, É.	Cours d'astronomie pratique (2 volumes)	Gauthiers-Villars	V1 : 1888 V2 : 1889
CHAUVENET, W.	A Manual of Spherical and Practical Astronomy (2 volumes), 5e édition	J. B. Lippincott Company	1891
CONSTAN, P.	Cours élémentaire d'astronomie et de navigation (3 volumes)	Gauthier-Villars	Rééditions de 1936 (V3), 1940 (V1), 1946 (V2)
CORNET, Ch.	Cosmographie et navigation (3 volumes)	Gauthier-Villars	Sans date
COTTER, Ch. H.	The complete Nautical Astronomer	Hollis & Carter	1969
COUSIN, A.	Résumé pratique de navigation	A. Challamel	1905
COUSIN, A. & RENAUD, F.	Précis de cosmographie	SEGMC	1928
COUSIN, A. & RENAUD, F.	Précis de navigation	SEGMC	1928
DANJON, A.	Astronomie générale, 2e édition	A. Blanchard	1980
DE KERVILER, M.	Navigation astronomique pour le yacht de croisière	Plaisance	1968
DE LANNOY, G.	Précis de cosmographie et de navigation	A. Challamel	1896
DUBOIS, E.	Cours de navigation et d'hydrographie, 2e édition	Arthus Bertrand	1869
DUCOM, J.	Cours complet d'observations nautiques	Suwerinck	1re ed. : 1820 2e ed. : 1835
DUTTON, B.	Navigation and Nautical Astronomy, 10th edition	US Naval Institute	1951
ÉCOLE NAVALE	Manuel de navigation	SEGMC	1939
FAYE, H.	Cours d'astronomie nautique	Gauthier-Villars	1880
FOURNIER, C. F.	Traité de navigation, 3e édition	Macé	1839
GUÉPRATTE, Ch.	Problèmes d'astronomie nautique et de navigation, 1re édition	Lefournier et Deperiers	1816
GUILHAUMON, J. B.	Éléments de cosmographie et de navigation, 4e édition	Berger-Levrault	1906
HALL, W.	Modern Navigation	University Tutorial Press	1re éd. : 1904 2e éd. : 1909
HARBORD, M. A.	Glossary of Navigation, 2e édition	Griffin & co	1883

JACOBY, H.	Navigation	Macmillan	1918
LALANDE, J.	Abrégé de navigation, historique, théorique et pratique	Chez l'auteur	1793
LAVOLÉ	Cours d'astronomie de l'École Navale	SEGMC	1946
LE CALVÉ, A.	Cours d'astronomie nautique, 3e édition	EMOM	1960
LE CALVÉ, A.	Cours de navigation (3 volumes)	EMOM	Rééditions de 1959 (V1), 1964 (V2), 1966 (V3)
LECKY, S. T. S.	Wrinkles in Practical Navigation, 16th edition	G. Philip & Son	1912
LEDIEU, A.	Nouvelles méthodes de navigation	Dunod	1877
MACKAY, A.	The theory and Practice of Finding Longitude at Sea or Land	Chez l'auteur	1793
MARGUET, F.	Cours de navigation et de compas de l'École navale, 2e édition	A. Challamel	1921
MARGUET, F.	Cours d'astronomie de l'École navale, 2e édition	A. Challamel	1926
MARTIN, W. R.	A Treatise on Navigation and Nautical Astronomy, 3e édition	Longmans	1899
MASSENET, G. & HARDANT, W.	Éléments d'astronomie nautique	A. Challamel	1921
MASSENET, G. et HARDANT, W.	Traité de navigation (2 volumes)	A. Challamel	1923
MOURET, L.	Aide-mémoire de l'officier de la marine marchande	Barlatier	1906
NICHOLL, A. E.	Nicholls' Concise Guide to the Board of Trade Examinations, 20th edition	J. Brown & Son	1922
NORIE, J. W.	A Complete Epitome of Practical Navigation and Nautical Astronomy	Norie & Wilson	1896
PACÉ, Ch.	Navigation	ENMM Paimpol	Sans date
PACÉ, Ch.	Astronomie nautique	EMC	1958
PAGEL, L.	Cours de Navigation	Challamel	1878
PERRET, E.	Navigation, instruments, observations et calculs	Octave Doin	1908
RAPER, H.	The practice of Navigation and Nautical Astronomy, 18th edition	J. D. Potter	1887
ROSSER, W. H.	The self-Instructor in Navigation and Nautical Astronomy	J. Imray	1891
ROYAL NAVY	Admiralty Navigation Manual (3 volumes)	H. M. STATIONNARY OFFICE	1938
SIZAIRE, P.	Astronomie nautique, 1re édition	SEGMC	1951
STERN-VEYRIN, O.	Navigation en haute mer, 2e édition	Arthaud	1985
YVON-VILLARCEAU, A. & AVED de MAGNAC, H.	Nouvelle navigation astronomique	Gauthier-Villars	1877

Ouvrages de mathématiques :

Auteurs	Titres	Références éditeurs	Dates
BÉGHIN, A.	Traité théorique et pratique des règles à calculs Béghin ; règle de l'ingénieur et règle de l'officier de marine (8e édition)	Ch. Béranger	1924
D'OCAGNE, M.	Traité de nomographie	Gauthier-Villars	1899
DELACHET, A.	Les logarithmes et leurs applications	Que sais-je ? PUF	1960
LEONELLI, Z.	Supplément logarithmique	Gauthier-Villars	1876
LE PATOUREL, Ch.	The Slide Rule Manual for the Use of Seamen	Heath & Co	1937
MOLK, J.	Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées, tome VII, astronomie sphérique	Gauthier-Villars	1913
NAUX, Ch.	Histoires des logarithmes (2 volumes)	A. Blanchard	V1 : 1966 V2 : 1971

Ouvrages traitant de sujets particuliers en navigation et calculs nautiques :

Auteurs	Titres	Références éditeurs	Dates
BURCH, D.	Navigation de secours	Starpath	2013
COLLET, A.	Navigation astronomique simplifiée au moyen de la méthode de Sumner et des tables de Sir W. Thomson	Gauthier-Villars	1891
DE NEUFVILLE, S.	La navigation sans logarithmes	SEGMC	1945
DUBUS, F.-J.	Types de calculs de navigation et d'astronomie nautique	L. Prud'homme	1853
GOODWIN, H. B.	A Companion to the Azimuth Tables	J. Brown & Son	1925
GUYOU, É.	Les problèmes de navigation et la carte marine	Berger-Levrault	1896
HALL, W.	Appendix to Raper's Practice of Navigation	J. D. Potter	1913
HANSEN, L. F.	Trigonometry and Navigation	J. Brown & Son	1919
JOHNSON, A. C.	Brief and Simple Methods of Finding the Latitude and Longitude by Single and Double Altitudes	G. Philip & Son	1884
JOHNSON, A. C.	Nautical Astronomy Made Easy	J. D. Potter	1900
JOHNSON, A. C.	Short Tables and Rules for Finding Latitude and Longitude, 2nd edition	J. D. Potter	1900
JOHNSON, A. C.	How to Find the Time at Sea in Less than a Minute, 5th edition	J. D. Potter	1907
JOHNSON, A. C.	On Finding the Latitude and Longitude at Sea in Cloudy Weather, 35th edition	J. D. Potter	1916
KOLBE, G.	Long Term Almanac 2000-2050 with Concise Sight Reduction Tables	Starpath	2008
LE SOUDÉER, J.-É.	La droite de hauteur	Arthaud	1978

LETCHER, J. S.	Self-Contained Celestial navigation with HO208	International Marine Publishing Company	1977
MAZURE-DUHAMEL, J. A.	Mémoire sur l'astronomie nautique	Bachelier	1822
PUREY-CUST, H. E.	Sumner's Method, 2nd edition	J. D. Potter	1928
QUÉDEC & BOËLLE	Recueil de types de calculs	SEGMC	1929
RIGOT, J.	Aide-mémoire pour une navigation astronomique d'urgence	Édition de la Dyle	Sans date
SUMNER, Th. H.	A New and Accurate Method of Finding a Ship's Position at Sea	Th. Groom and Co	1843
TOWSON, J. Th.	Practical Information on the Deviation of the Compass	J. D. Potter	1912
WILLIS, E. J.	The Methods of Modern Navigation	Brown, Son & Ferguson	1935

Articles de la « Revue Maritime et Coloniale » et de la « Revue Maritime » :

Auteurs	Titres	Références
BERTIN, Ch.	La table de point sphérique	Juillet à décembre1913
BERTIN, Ch.	Le quadrant planisphérique	Juillet 1914
DELAFON, R.	Méthode rapide pour déterminer les droites et les courbes de hauteur et faire le point	Mars 1894
FASCI, A.	Mémoire sur le point observé et la détermination des courants à la surface des mers	Décembre 1869 Février 1870
GUYOU, É.	La méthode des distances lunaires, le présent, le passé, l'avenir	Juin 1902
GUYOU, É.	Nouvelle méthode pour déterminer les droites de hauteur et le point observé	Février 1909
HILLERET, P.	Etude sur les courbes de hauteur	Mars 1874
HILLERET, P.	Théorie générale des circumméridiennes	Octobre à décembre 1875
LEBLANC, Ch. M.	Graphique du point	Septembre 1891
LEBLANC, Ch. M.	Calcul d'une droite de hauteur par la table III de Souillagouët	Août 1893
MARCQ de SAINT-HILAIRE, A.	Note sur la détermination du point	Octobre 1873
MARCQ de SAINT-HILAIRE, A.	Calcul du point observé	Août et septembre 1875
VIGNOT, H.	Etude comparative de deux façons de résoudre le calcul d'angle horaire	Mai 1879

Articles de la revue « Navigation » de l'Institut français de Navigation :

Auteurs	Titres	Références
ANONYME	Recension de la table 1-2-3 de P. Domenjoud	Avril 1985
ANONYME	Les fonctions des tables de navigation	Juillet 1953
ANONYME	Comparaison pratique des tables de navigation	Juillet 1954

CALVET, X.	Les tables de calcul des triangles sphériques rectangles	Avril 1955
DOMENJOUD, P.	Un brin de magie dans les éphémérides	Janvier 1990
DONIOL, R.	Table de point « miniature » (hauteur et azimut)	Avril 1955
DONIOL, R.	La latitude méridienne par la méthode du commandant Guyou et par les tables spéciales	Juillet 1957
DUVAL, R. Ch.	Contribution à l'histoire de la droite de hauteur	Juillet et octobre 1955
DYEVRE, H.	Le point autour de midi	Octobre 1953
GOUGENHEIM, A.	Le calcul du point à la mer par les Tables de Poche du Commandant Guyou	Janvier et avril 1953
HUGON, P.	Comment navigue-t-on actuellement sur les navires français ?	Janvier et avril 1953
HUGON, P.	La droite de hauteur Marcq par une table maniable et de lecture directe	Juillet 1954
HUGON, P.	Qu'est devenu l'art de naviguer sur mer en 1963 ?	Juillet 1963
HUGON, P.	Une nouvelle table de circumméridiennes	Janvier 1964
HUGON, P.	Nouvelles tables pour le calcul de la droite de hauteur à partir du point estimé	Octobre 1974
MANNEVY, P.	Ce que fut le professeur général Pierre Hugon	Juillet 1988
MARCHAND, P.	Points d'étoiles	Octobre 1954

Articles du « Journal of Navigation » du Royal Institute of Navigation (G-B) :

Auteurs	Titres	Références
COTTER, Ch. H.	An Historical Review of the Ex-Meridian Problem	Vol 17 n°1 1964
COTTER, Ch. H.	Gaussian Logarithms and Navigation	Vol 24 n°4 1971
COTTER, Ch. H.	Sir William Thonson and the Intercept Method	Vol 25 n°1 1972
COTTER, Ch. H.	Aquino's Short Method Tables	Vol 26 n°2 1973
COTTER, Ch. H.	Martelli's Tables	Vol 26 n°4 1973
COTTER, Ch. H.	A Study of a Species of Short-Method Tables	Vol 27 n°3 1974
COTTER, Ch. H.	Sines, Versines and Haversines in Nautical Astronomy	Vol 27 n°4 1974
COTTER, Ch. H.	A Centenial Tribute to Marcq de Saint-Hilaire	Vol 28 n°4 1975
COTTER, Ch. H.	Nautical Astronomy and the Mercator Principle	Vol 29 n°1 1976
COTTER, Ch. H.	John Thomas Towson and the Intercept Method	Vol 30 n°2 1977
COTTER, Ch. H.	The Conception and Development of Weir's Diagram	Vol 30 n°3 1977
COTTER, Ch. H.	Direct Method of Sight Reduction: an Historical Review	Vol 35 n°2 1982
HOHENKERK, C. et alia	Astro Navigation Remebered	Vol 65 n°3 2012
KEIR MOILLIET, B. R.	Ciro Carić's Tables	Vol 4 n°1 1951
RADLER de AQUINO, F.	The Universal Sea and Air Navigation Tables and the a and b Almanac	Vol 4 n°2 1951

RADLER de AQUINO, F.	A New Wrinkle in Astro-Navigation	Vol 4 n°3 1951
SADLER, D. H.	Vice Admiral Radler de Aquino, an Appreciation of his Work	Vol 7 n°3 1954
SADLER, D. H.	Gaussian Logarithms and Navigation	Vol 25 n°2 1972

Articles de « Navigation », Journal of the Institute of Navigation USA :

Auteurs	Titres	Références
DOHM, J.	HO249 revised	Vol 3 n°3 1952
DUNLAP, G. D.	Capt. P. V. H. Weems and the Transition from Marine to Air Navigation	Vol 40 n°1 1993
FRANKLIN, F.	Methods Used in Celestial Navigation	Vol 4 n°1 1954
STORER, N. W.	Note on Dreisonstok's Method in Celestial Navigation	Vol 1 n°5 1947

American Mathematical Society, articles extraits des « Mathematical Tables and Other Aids to Computation »:

Auteurs	Titres	Références
HERRICK, S.	Rapid Navigation Tables. W. Myerscough & W. Hamilton	Vol 2 n°18 1947
SADLER, D. H.	Table de hauteur et d'azimut, A. A. F. type 10, prepared by M. L. Chamaleix	Vol 3 n°24 1948
SADLER, D. H.	Kortbestek Tafel. J. C. Lieuwen	Vol 4 n°32 1950
SMILEY, Ch. H.	Dreisonstok's Tables	Vol 1 n°3 1943
SMILEY, Ch. H.	Ageton, Dead Reckoning Altitude and Azimuth Tables	Vol 1 n°3 1943
SMILEY, Ch. H.	Astronomical Navigation Tables, Latitudes 65°-69°, HO218	Vol 1 n°3 1943
SMILEY, Ch. H.	Manual of Celestial Navigation. A. A. Ageton	Vol 1 n°4 1943
SMILEY, Ch. H.	Hughes'Tables. L. J. Comrie	Vol 1 n°4 1943
SMILEY, Ch. H.	Astronomical Position Lines Tables. J. Garcia	Vol 2 n°13 1946
SMILEY, Ch. H.	F-Tafel. Deutsche Seewarte	Vol 2 n°14 1946
SMILEY, Ch. H.	Line of Position Book. P. V. H. Weems	Vol 2 n°14 1946
SMILEY, Ch. H.	Martelli's Tables	Vol 2 n°15 1946
SMILEY, Ch. H.	Astro-Navigation Tables. E. E. Benest & E. M. Timberlake	Vol 2 n°15 1946
SMILEY, Ch. H.	Practical Celestial Air Navigation Tables. G. G. Hoehne	Vol 2 n°15 1946
SMILEY, Ch. H.	Publication HO214, Tables of Computed Altitude and Azimuth, latitudes 80° to 89° inclusive.	Vol 2 n°18 1947
SMILEY, Ch. H.	Universal Nautical & Aeronautical Tables. F. Radler de Aquino	Vol 2 n°18 1947
SMILEY, Ch. H.	Istituto Idrografica della Marina. Tavole H	Vol 3 n°26 1949
SMILEY, Ch. H.	Nouvelles tables pour le calcul de la droite de hauteur à partir du point estimé; P. Hugon	Vol 4 n°31 1950

Articles et publications d'origines diverses :

Auteurs	Titres	Publication	Année
ANONYME	Improved Method for Finding Altitude and Azimuth, Geographical Position and the Variation of the Compass	Monthly Weather Review	1905
BARTHET, J.	Méthode graphique pour faire le point en mer	Annales maritimes et coloniales	1847
BENCKER, H.	Regimen of the Sea or Nautical Compendium. Chronological & Analytical List of Various Tables or Treatises on Navigation intented to facilitate Nautical Computations and accelerate ship's position fonding.	Hydrographic Review	1943
BERTIN, Ch.	Sur une table de point sphérique	CR Académie des Sciences	1911
BOISTEL, G.	De quelle précision a-t-on réellement besoin en mer ?	Revue Histoire et Mesure	2006
BROWN, O. E. & NASSAU, J. J.	A Navigational Computer	Mathematical Association of America	1947
CURRIER, C. H.	The Alpha Beta Gamma Navigation Tables (Goodwin)	Bulletin of the American Mathematical Society	1925
FAVÉ, L. & ROLLET de L'ISLE, Ch.	Abaque pour la détermination du point en mer	Annales hydrographiques	1892
FOURNIER, F. É.	Notice nécrologique du Cdt Guyou	Académie des Sciences	1921
GUYOU, É.	Calcul du point observé à l'aide de la table des latitudes croissantes	Annales hydrographiques	1888
GUYOU, É.	Les courbes de hauteur	Annales hydrographiques	1901
GUYOU, É.	Résolution des problèmes de hauteur à la mer par la réduction à l'équateur. Nouvelles tables de navigation	CR Académie des Sciences	1911
HEATH, L. G.	The Ship's Position by the Sun's Altitude, Sumner's Method	Nautical Magazine	1846
HERRICK, S.	The Accuracy of Ageton's Method in Celestial Navigation	Astronomical Society of the Pacific	1944
JANICZEK, P. M.	Navigation Notes: the Concise Sight Reduction Tables	Navigation Foundation n° 95 & 96	2013
LAGARDE, L.	Historique du problème du méridien origine en France	Revue d'histoire des sciences	1979

PAGEL, L.	La latitude par les hauteurs hors du méridien, méthode facile et courte pour déterminer la position de l'observateur par les hauteurs	Annales maritimes et coloniales	1847
PERRET, E.	Note sur quelques applications de la nomographie à l'astronomie nautique	Annales hydrographiques	1904
RAPER, H.	On Captain Sumner's Method for Determining the Position of the Ship	Nautical Magazine	1844
RUDZINSKI, G.	Ultra Compact Sight Reduction	Ocean Navigator	2015
SMART, W. M.	The Position Line in Navigation	Monthly Notices of the Royal Astronomical Society	1919
TAIT, P. G.	Note on Captain Weir's Paper	Proceeding of the Royal Society of Edimburg	1889
THOMSON, W.	On the Determination of a Ship's Place from Observations of Altitude	Proceeding of the Royal Society	1871
WEIR, P.	Theoretical Description of a "New Azimuth Diagram"	Proceeding of the Royal Society of Edimburg	1889
WEIR, P.	Paper Explaining the Construction and Use of Weir's Azimuth Diagram	Australian Association for the Advancement of Science	1893

TABLES

de

NAVIGATION

1840 – 1980

ANNEXES

Paul BEDEL

Professeur général de l'Enseignement Maritime (2e s)

ANNEXE 0

TRANSCRIPTION du CALCUL de POINT de MIDI du CAPITAINE LEDRU

43e jour | Mardi 4 juillet 1905 | Tmp – A = 7,1 s

Calculs d'estime depuis le point de midi le 3 juillet :

Routes suivies	Distances	Variations de longitude	Variations de latitude	Latitudes	Longitudes
S63°E = 117° S40°E = 140° S75°E = 105°	152 milles 52 milles 62 milles	135,4 milles E + 33,4 miles E + 59,9 milles E Total: 228,7 milles E g = 285,9' E g = 4° 46' E	69,0' S + 39,8' S + 16,0' S Total: 124,8' S L = 2° 05' S	L = 36° 08' S l = 02° 05' S L = 38° 13' S Lat. estimée à l'instant de la 1re observation	G = 25° 18' W g = 04° 46' E G= 20° 32' W Long. estimée à l'instant de la 1re observation
S80°E = 100°	24 milles	24 milles E g = 31' E	l = 4' S	l = 00° 04' S **L = 38° 17' S** Latitude estimée à midi (heure de la méridienne)	g = 00° 31' E **G = 20° 01' W** Longitude estimée à midi (heure de la méridienne)
A midi le 3 juillet, le navire était par L = 36° 08' S et G = 25° 18' W, point de départ du calcul. La variation de longitude g est égale à la distance parcourue vers l'Est divisée par le cosinus de la latitude moyenne du parcours. Entre la 1re observation et la méridienne, la navire a parcouru 24 milles au S80°E.					

Calcul de l'angle horaire du Soleil au méridien de Paris à l'instant de la 1re observation :

Éléments relevés dans les Éphémérides Nautiques	1re mesure de hauteur	2e mesure de hauteur	Notations
Éqt du temps moyen : Em = 23h 55m 58s Déclinaison du Soleil : D = 22° 55' N	A = 11h 17m 39s + (Tmp – A) = 00h 00m 07s Tmp = 23h 17m 46s + Em = 23h 55m 58s Tvp = 23h 13m 44s	A = 11h 20m 00s + (Tmp – A) = 00h 00m 07s Tmp = 23h 20m 07s + Em = 23h 55m 58s Tvp = 23h 16m 05s	Heure du chronomètre (à 12 heures près) État absolu du chronomètre Temps moyen de Paris Équation du temps moyen Angle hor. du Soleil au méridien de Paris

Calcul du point :

1re mesure et azimut	Calcul de longitude	2e mesure	Calcul de longitude	Méridienne
H = 21° 48’ +C = +6’ H_v = 21° 54’ L = 38° 13’ Δ = 112° 55’ 2s = 173° 02’ s = 86° 31’ s – H_v = 64° 37’ Calcul d’azimut avec la table de Perrin: p’ = + 080 p’’ = + 1,25 p = + 2,05 Z_v = N32°E Z_c = N50°E W = 18°NW Compas avant S50°E	 cologcos = 0,104756 + cologsin = 0,035706 + logcos = $\bar{2}$, 783605 + logsin = $\bar{1}$, 955909 somme = $\bar{2}$, 879976 ½ Somme = $\bar{1}$, 439988 P/2 = 1h 03m 57s P = E 2h 07m 54s Tvg = 21h 52m 06s Tvp = 23h 13m 44s <u>G = 1h 21m 38s</u> G = 20° 22’ W g = 00° 31’ E G = 19° 51’ W ΔG = 00° 12’ W **Gmidi = 20° 03’ W**	H = 22° 03’ +C = +6’ H_v = 22° 09’ L = 38° 13’ Δ = 112° 55’ 2s = 173° 17’ s = 86° 39’ s – H_v = 64° 30’ Notations: Δ : distance polaire ; 2s = H_v + L + Δ ; P : angle au pôle calculé par logarithmes par la formule de Borda ; Tvg : angle horaire local du Soleil ; Longitude G = Tvp – Tvg.	cologcos = 0,104756 + cologsin = 0,035706 + logcos = $\bar{2}$, 766675 + logsin = $\bar{1}$, 955488 somme = $\bar{2}$, 862625 ½ Somme = $\bar{1}$, 431313 P/2 = 1h 02m 39s P = E 2h 05m 18s Tvg = 21h 54m 42s Tvp = 23h 16m 05s <u>G = 1h 21m 23s</u> (résultat non utilisé)	H = 28° 46’ + C = +8’ H_v = 28° 54’ 90° - H_v = 61° 06’ D = - 22° 55’ **Lmidi = 38° 11’ S** Lestimée = 38° 17’ S ΔL = 6’ N p = + 2,05 ΔG = p.ΔL = 12’ W p : coefficient Pagel

En définitive : latitude observée : 38° 11’ S, longitude observée : 20° 03’ W ;
latitude estimée : 38° 17’ S, longitude estimée : 20° 01’ W.

Depuis le point de midi la veille, le navire a parcouru 280 milles au S64°E (116°).

Nota : la procédure de calcul est détaillée en annexe 2-1.

ANNEXE 1-1

DÉFINITIONS et ÉLÉMENTS FONDAMENTAUX de CALCULS

Coordonnées géographiques d'un astre :

L'angle horaire au premier méridien (ou méridien origine), AHap (arc $g_r a$ mesuré sur l'équateur), est la longitude de A, projection terrestre de l'astre ou point substellaire, toujours compté de 0° à 360° (ou de 0 h à 24 h) à partir de ce méridien origine (Greenwich ou Paris aux époques considérées), positivement dans le sens horaire vu du pôle Nord (ou encore vers l'Ouest) ; la déclinaison D est la latitude du point A. Rappelons que la longitude G (arc $g_r Q$ mesuré sur l'équateur) d'un point Z de la surface de la terre est habituellement comptée de 0° à 180°, positivement vers l'Ouest, et négativement vers l'Est.

L'angle horaire au premier méridien permet ensuite, connaissant la valeur de la longitude G, de calculer l'angle horaire local AHag, compté de 0° à 360°, ou de 0 h à 24 h, (arc Qa mesuré sur l'équateur) à partir du méridien du lieu Z et dans le sens horaire vu du pôle Nord ; cet angle donnera accès à l'angle au pôle P du triangle de position de l'astre P_NZA.

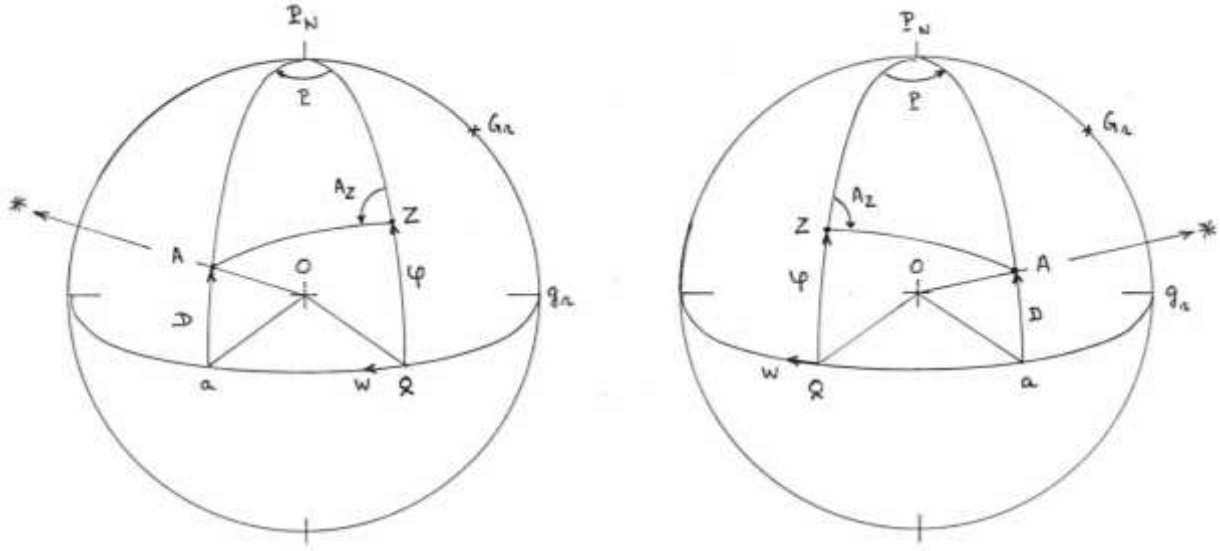


Fig : A1-1

En figure A1-1 ci-dessus, le pôle élevé est le pôle Nord et la sphère terrestre de gauche est relative à un astre A situé dans l'Ouest (W) d'un observateur placé en Z tandis que sur la sphère de droite est représenté un astre A qui serait dans l'Est d'un observateur placé en Z. On vérifie que l'on a toujours, à 360° près :

$$\mathrm{AHap} = \mathrm{AHag} + \mathrm{G} \quad \text{soit} \quad \mathrm{AHag} = \mathrm{AHap} - \mathrm{G}$$

Lorsque l'astre est dans l'Ouest de l'observateur, l'angle horaire local AHag est inférieur à 180° et est égal à l'angle au pôle P du triangle de position (P_NZA ici) ; dans le cas où l'astre est dans l'Est de l'observateur, l'angle horaire local AHag est supérieur à 180° et l'angle au pôle P est égal à son complément à 360°.

La latitude φ d'un lieu est aussi la hauteur du pôle terrestre située au-dessus de l'horizon ; en latitude Nord, le pôle Nord est au-dessus de l'horizon et sera qualifié de pôle élevé. En latitude Sud, c'est évidemment le pôle Sud qui est au-dessus de l'horizon et qui sera ainsi le pôle élevé. Au XIXe et dans la première moitié du XXe siècle, il était d'usage de construire le triangle de position d'un astre à partir du pôle élevé de façon à toujours travailler avec des

latitudes positives, comprises entre 0° et 90°, la déclinaison étant positive si elle est de même nom que la latitude, négative dans le cas contraire. Par la suite, il est apparu plus simple de construire systématiquement ce triangle à partir du pôle Nord et de considérer des latitudes et des déclinaisons répondant aux mêmes règles de signe, à savoir positives si elles sont Nord, négatives si elles sont Sud.

Eléments du triangle de position d'un astre :

Les éléments de ce triangle sphérique PZA construit à partir du pôle élevé (voir figure A1-1 dans laquelle le pôle Nord est le pôle élevé) sont définis dans le tableau ci-dessous :

Côtés			
PZ	Colatitude	$c = 90° - \varphi$	$0° \leq \varphi \leq 90°$
PA	Distance polaire	$\delta = 90° - D$	La déclinaison D est positive si elle est du nom de la latitude φ, négative dans le cas contraire ; $-90° \leq D \leq 90°$
ZA	Distance zénithale	$\xi = 90° - H$	Dans le cas d'un astre situé au-dessus de l'horizon vrai, la hauteur H est toujours positive et inférieure à 90° ; la distance zénithale est aussi notée N
Angles			
en P	Angle au pôle	P	Les trois angles sont toujours compris entre 0° et 180°. L'angle à l'astre est aussi appelé « angle parallactique ».
en Z	Angle au zénith	A_z	
en A	Angle à l'astre	A	

L'angle au zénith A_z donne accès à l'azimut de l'astre qui peut être exprimé :

- par quadrant, sous forme d'un angle Z_q exprimé de 0° à 90°, compté à partir du Nord ou du Sud, vers l'Est ou vers l'Ouest dans chacun des quadrants NE, SE, SW et NW,
- ou sous forme d'un angle Z compté de 0° à 360° à partir du Nord dans le sens horaire ou rétrograde.

Dans le cas où le triangle est construit à partir du pôle élevé, les différentes correspondances et déterminations des angles sont indiquées dans le tableau ci-après :

Pôle élevé : NORD			
Angle horaire local	Angle au pôle	Azimut Z_q par quadrant	Azimut Z de 0° à 360° à partir du N
AHag < 180°	P = AHag	si $A_z < 90°$: Z_q = N A_z W si $A_z > 90°$: Z_q = S (180° - A_z) W	360° - A_z
AHag > 180°	P = 360° - AHag	si $A_z < 90°$: Z_q = N A_z E si $A_z > 90°$: Z_q = S (180° - A_z) E	A_z
Pôle élevé : SUD			
AHag < 180°	P = AHag	si $A_z < 90°$: Z_q = S A_z W si $A_z > 90°$: Z_q = N (180° - A_z) W	180° + A_z
AHag > 180°	P = 360° - AHag	si $A_z < 90°$: Z_q = S A_z E si $A_z > 90°$: Z_q = N (180° - A_z) E	180° - A_z

Les différentes formules de trigonométrie sphérique[69] constituent les relations entre les éléments de ce triangle. En navigation astronomique, deux relations de base sont issues de la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique liant les 3 côtés et un angle :

$$\sin H = \sin \varphi \,.\, \sin D + \cos \varphi \,.\, \cos D \,.\, \cos P \quad (1)$$

$$\sin D = \sin \varphi \,.\, \sin H + \cos \varphi \,.\, \cos H \,.\, \cos A_z \quad (2)$$

On utilise également l'analogie des sinus :

$$\frac{\sin P}{\cos H} = \frac{\sin A_z}{\cos D} = \frac{\sin A}{\cos \varphi} \quad (3)$$

et la formule dite des cotangentes qui relie quatre éléments consécutifs, notamment P, φ, D et A_z :

$$\cos P \,.\, \sin \varphi = \tan D \,.\, \cos \varphi - \cot A_z \,.\, \sin P \quad (4)$$

Outre les formules particulières au triangle rectangle, ces 4 formules constituent la base essentielle des calculs de navigation. D'autres expressions, d'utilisation moins fréquente, peuvent intervenir dans les calculs ; elles seront précisées au fur et à mesure de l'étude. On remarquera que, à l'exception de la relation (3), ces formules ne sont pas « logarithmiques », c'est-à-dire constituées exclusivement de produits et de quotients de rapports trigonométriques.

Formules du calcul de l'azimut :

Quel que soit le point déterminatif choisi, l'angle au zénith, dont on déduira l'azimut, se calcule généralement par l'une des formules ci-dessous :

Azimut par la hauteur, déduit de la formule (2) :

$$\cos A_z = \frac{\sin D - \sin \varphi \,.\, \sin H}{\cos \varphi \,.\, \cos H} \quad (2')$$

Azimut par l'heure et la hauteur, déduit de la formule (3) :

$$\sin A_z = \frac{\sin P \,.\, \cos D}{\cos H} \quad (3')$$

Azimut par l'heure, déduit de la formule (4) :

$$\cot A_z = \frac{\tan D \,.\, \cos \varphi - \cos P \,.\, \sin \varphi}{\sin P} \quad (4')$$

Formules du calcul du point déterminatif Lalande :

Il s'agit ici de calculer la longitude du point déterminatif à partir de l'angle au pôle résultant de la latitude estimée, de la déclinaison et de la hauteur de l'astre. La relation de base est la formule (1) dans laquelle l'inconnue est P :

$$\cos P = \frac{\sin H - \sin \varphi \,.\, \sin D}{\cos \varphi \,.\, \cos D}$$

Cette relation n'est pas directement calculable par logarithmes et il convient de la transformer en produits et quotients de rapports trigonométriques. On forme donc la quantité $1 - \cos P$ qui donne après réduction au même dénominateur et contraction :

[69] Elles sont démontrées dans différents cours et traités cités en bibliographie ; sur ce sujet, on retiendra notamment le cours d'astronomie nautique de P. Sizaire.

$$1 - \cos P = 2.\left(\sin\frac{P}{2}\right)^2 = \frac{\cos(\varphi - D) - \sin H}{\cos\varphi \,.\, \cos D}$$

On transforme ensuite le numérateur en produit et on obtient, après avoir posé 2.s = (δ + φ + H) :

$$\left(\sin\frac{P}{2}\right)^2 = \frac{\cos s \,.\, \sin(s - H)}{\cos\varphi \,.\, \cos D} \quad \text{soit} \quad \sin\frac{P}{2} = \sqrt{\frac{\cos s \,.\, \sin(s - H)}{\cos\varphi \,.\, \sin\delta}} \quad (1')$$

Cette relation est désignée sous le nom de formule de Borda[70] qui, malgré son apparente complexité, est facile à calculer par logarithmes et ne fait appel à aucune règle de signe, d'où sa popularité, en France.

Les anglo-saxons lui préfère une version faisant intervenir les fonctions haversine et sécante. Par définition, les fonctions versine (ou sinus verse) et haversine (ou demi-sinus verse) d'un arc x sont définies par :

$$\text{vers}(x) = 1 - \cos x \quad \text{et} \quad \text{hav}(x) = \frac{1 - \cos x}{2} = \left(\sin\frac{x}{2}\right)^2$$

Sachant que l'on a, pour tout arc x :

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \text{et} \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

La formule (1') s'écrit alors :

$$\text{hav}(P) = \sec\varphi \,.\, \csc\delta \,.\, \cos s \,.\, \sin(s - \delta) \quad (1'')$$

La formule (1) peut également conduire à :

$$\text{hav}(P) = \sec\varphi \,.\, \sec D \,.\, \sqrt{\text{hav}[\xi + (\varphi - D)]}.\sqrt{\text{hav}[\xi - (\varphi - D)]} \quad (1''\text{bis})$$

Les formules (1') et (1'') permettent de calculer l'angle au pôle sans ambiguïté ; la formule (1''bis) se résout facilement avec les tables de Inman donnant les « half log haversine » correspondant aux deux derniers facteurs.

Plusieurs auteurs utilisent enfin la formule non logarithmique directement issue de la formule (1) :

$$1 - \cos P = \text{vers}(P) = \frac{\cos(\varphi - D) - \sin H}{\cos\varphi \,.\, \cos D} = \frac{\text{vers}(\xi) - \text{vers}(\varphi - D)}{\cos\varphi \,.\, \cos D} \quad (1''')$$

Ou encore :

$$\text{hav}(P) = \frac{\text{hav}(\xi) - \text{hav}(\varphi - D)}{\cos\varphi \,.\, \cos D} \quad (1''' \text{ bis})$$

Quelle que soit la formule employée, l'angle au pôle P donne accès à l'angle horaire local AHag selon la dénomination de l'azimut. La connaissance de l'angle horaire au premier méridien AHap à l'instant de la mesure donne la longitude du point déterminatif :

$$G = \text{AHap} - \text{AHag}$$

[70] Selon le même principe, on peut, à partir de l'expression (2'), établir une formule logarithmique équivalente donnant l'angle au zénith.

Formules du calcul du point déterminatif Borda :

L'inconnue est la latitude φ du point déterminatif. Celle-ci se calcule connaissant la hauteur, la déclinaison et l'angle au pôle P, issu de l'angle horaire au premier méridien à l'instant de la mesure AHap et de la longitude estimée G_e :

$$\text{AHag} = \text{AHap} - \text{G}_\text{e} \quad \text{et} \quad \text{P} = \text{AHag (astre à l'W) ou } 360° - \text{AHag (astre à l'E)}$$

Une méthode exacte de calcul est basée sur l'utilisation de la formule (1) dans laquelle on introduit un arc auxiliaire α. Cette formule peut s'écrire :

$$\sin \text{H} = \cos \text{D} \,.\, \cos \text{P} \,.\, \left[\frac{\sin \varphi}{\cot \text{D} \,.\, \cos \text{P}} + \cos \varphi\right]$$

On pose :

$$\tan \alpha = \cot \text{D} \,.\, \cos \text{P} \quad (5)$$

L'équation devient, après simplification :

$$\sin(\varphi + \alpha) = \frac{\sin \text{H} \,.\, \cos \alpha}{\sin \text{D}} \quad (5')$$

Il convient donc de :

1) calculer l'arc auxiliaire α à l'aide de sa formule de définition (5),
2) calculer la quantité (φ + α) à l'aide de la seconde équation (5'),
3) en déduire la latitude.

Les deux formules sont logarithmiques. Suivant les valeurs de l'angle au pôle P et le signe de la déclinaison, les déterminations de l'arc α sont :

	P < 90°	90° < P < 180°
D du nom de φ (D > 0°)	0° < α < 90°	- 90° < α < 0°
D de nom contraire à φ (D < 0°)	90° < α < 180°	Impossible si H > 0°

Remarque 1 : si α > 90° - φ, (φ + α) est à rechercher dans l'intervalle [90°, 180°] ;

Remarque 2 : la méthode algébrique décrite ici est équivalente à une décomposition du triangle de position en deux triangles rectangles selon la hauteur issue de la projection de l'astre A ; l'arc α est la colatitude du point K, pied de la hauteur issue de A.

Formules du calcul du point déterminatif Marcq :

La méthode consiste ici à calculer la hauteur estimée H_e en fonction de la latitude estimée, la déclinaison de l'astre et l'angle au pôle calculé comme ci-dessus. La relation de base est la formule (1) dont l'usage se généralisera, notamment en France. Le calcul s'effectue en recherchant par logarithmes la valeur du premier produit de deux sinus, puis la valeur du second produit de trois cosinus. La somme algébrique de ces deux quantités donne directement le sinus de l'arc cherché.

Les anglo-saxons ont utilisés très rapidement des formules issues des relations (1''') et (1''' bis) ci-dessus :

$$\text{vers}(\xi) = \text{vers}(\varphi - \text{D}) + \cos \varphi . \cos \text{D} \,.\, \text{vers}(\text{P}) \quad (7)$$

$$\text{hav}(\xi) = \text{hav}(\varphi - \text{D}) + \cos \varphi . \cos \text{D} \,.\, \text{hav}(\text{P}) \quad (7')$$

Enfin, comme dans le calcul de latitude ci-dessus, on peut aussi utiliser un angle auxiliaire. En utilisant la distance polaire δ à la place de la déclinaison D, la formule fondamentale (1) s'écrit :

$$\sin H = \sin \varphi \,.\, \cos \delta + \cos \varphi \,.\, \sin \delta \,.\, \cos P$$

En mettant sin φ en facteur et en introduisant un arc auxiliaire β tel que :

$$\tan \beta = \frac{\cos P}{\tan \varphi} \quad (8)$$

On obtient :

$$\sin H = \sin \varphi \,.\, (\cos \delta + \sin \delta \,.\, \tan \beta)$$

Soit, sachant qu'une tangente est le rapport d'un sinus par un cosinus, en réduisant au même dénominateur et en identifiant :

$$\sin H = \frac{\sin \varphi \,.\, \cos(\delta - \beta)}{\cos \beta} \quad (8')$$

La hauteur peut ainsi être calculée par des formules entièrement logarithmiques en évaluant d'abord β par la relation (8), puis la quantité (δ − β) et enfin en résolvant la relation (8'). Les formules sont algébriques, β étant toujours inférieur à 90° et ne prenant des valeurs négatives que lorsque l'angle au pôle est supérieur à 90°.

Remarque : la méthode algébrique décrite ici est équivalente à une décomposition du triangle de position en deux triangles rectangles selon la hauteur issue de la projection du zénith de l'observateur Z ; l'arc β est la colatitude du point L, pied de la hauteur issue de Z.

Les différentes formules établies permettent le calcul de la hauteur estimée H_e. L'intercept se calcule à en faisant la différence algébrique entre la hauteur vraie, issue de la mesure et de cette hauteur estimée. On écrira :

$$\text{Intercept} = H_v - H_e$$

Décomposition en deux triangles rectangles :

Dans sa présentation initiale, Marcq de Saint-Hilaire a effectué ses calculs sur la base de la décomposition en deux triangles rectangles selon la hauteur issue de A. Il utilise les formules (5) et (5') exposées précédemment puis calcule l'azimut également selon cette décomposition. Les auteurs français qui ont ensuite repris à leur compte les travaux initiés par Marcq de Saint-Hilaire (notamment A. Ledieu et H. Aved de Magnac) ont cherché à calculer la hauteur avec un maximum de précision et proposent plusieurs formules, dont certaines sont basées sur la décomposition du triangle de position en deux triangles rectangles. Enfin, de nombreuses tables de calcul de la hauteur et de l'azimut sont construites à partir d'une telle décomposition qui conduit à utiliser des relations facilement calculables par logarithmes entre 3 éléments d'un triangle rectangle. Ces relations s'établissent très simplement à l'aide de la règle du « pentagone de Neper » que l'on rappelle, dans son intégralité, ci-après (figure A1-2).

Règle du pentagone de Neper :

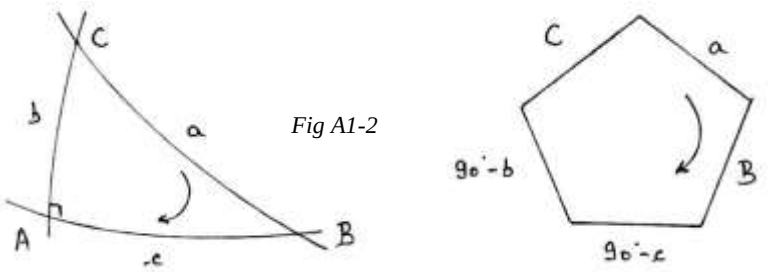


Fig A1-2

Soit un triangle sphérique ABC rectangle en A. Les 6 éléments du triangle lus dans un sens sont a, B, c, A, b, C. On trace un pentagone dont on désigne les côtés successifs, lus dans le même sens, par : a, B, 90° - c, 90° - b, C, ce qui revient à faire correspondre, dans le même ordre de succession, les côtés du pentagone aux éléments du triangle, en omettant l'angle droit A, et en remplaçant chaque côté de l'angle droit (b et c) par son complément.

La règle est la suivante : ***dans le pentagone, le cosinus d'un côté est égal au produit des sinus des deux côtés opposés ou au produit des cotangentes des deux côtés adjacents***.

Décomposition selon la hauteur issue de la projection de l'astre A :

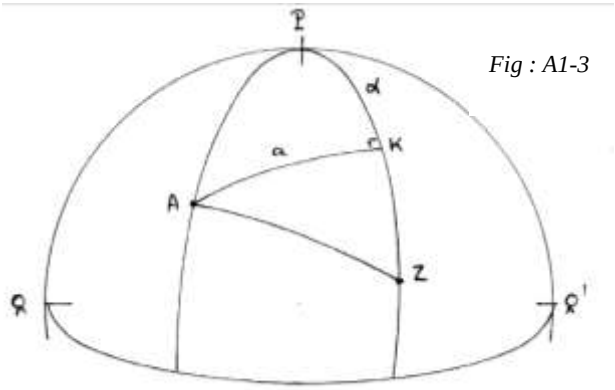


Fig : A1-3

Dans cette décomposition, les deux triangles rectangles qui seront résolus successivement pour trouver les éléments inconnus sont PAK et ZAK (figure A1-3). Dans le cas d'une recherche des éléments de la droite Marcq, le premier triangle permet de trouver l'arc AK, a, et la colatitude α du point K, le second triangle permet le calcul de la hauteur estimée et de l'angle au zénith compté à partir du pôle élevé.

En utilisant la règle du pentagone de Neper, on obtient successivement :

$$\tan\alpha = \cot D \,.\, \cos P \quad (5) \quad , \quad \cos a = \frac{\sin D}{\cos\alpha} \quad , \quad \sin H = \cos a \,.\, \sin(\varphi + \alpha) \quad , \quad \cos A_z = \cot(\varphi + \alpha) \,.\, \tan H \quad (5'')$$

On peut calculer directement la hauteur en remplaçant cos a par son expression dans la 3e équation, soit :

$$\sin H = \frac{\sin D . \sin(\varphi + \alpha)}{\cos\alpha} \quad (5')$$

On retrouve ici les formules (5) et (5') établies précédemment algébriquement.

Les différents cas de figures possibles sont schématisés en figure A1-4 ci-dessous :

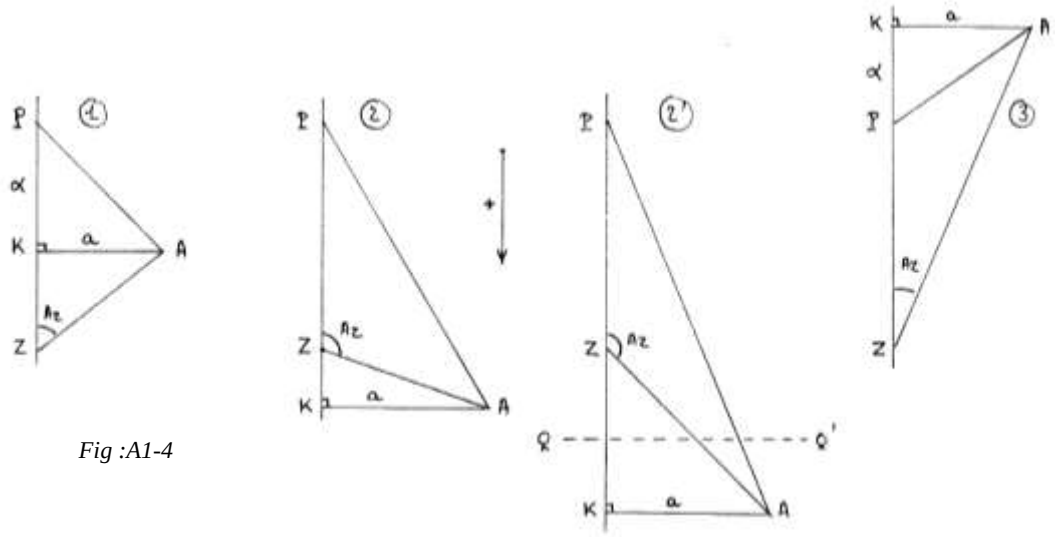


Fig :A1-4

En orientant positivement le méridien de l'observateur de P vers Z, les caractéristiques des quatre cas de figure sont indiquées dans le tableau ci-dessous :

Cas n°	D	α	P	A_z	KZ	
1	> 0°	0° < α < 90°	< 90°	< 90°	> 0	90° - (φ + α)
2	> 0°	0° < α < 90°	< 90°	> 90°	< 0	
2'	< 0°	90° < α < 180°	< 90°	> 90°	< 0	
3	> 0°	- 90° < α < 0°	> 90°	< 90°	> 0	

Les formules sont applicables algébriquement dans les quatre cas de figure, α et KZ ayant les déterminations fixées par les dispositions du tableau (équivalentes par ailleurs aux règles de détermination de la formule (5')). Cette formulation et les règles afférentes sont celles qui ont été utilisées par Marcq de Saint-Hilaire dans son mémoire de 1875.

<u>Décomposition selon la hauteur issue du zénith de l'observateur Z</u> :

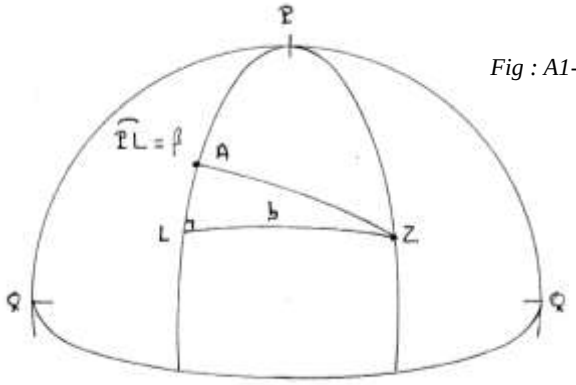


Fig : A1-5

Dans cette décomposition, les deux triangles rectangles qui seront résolus successivement pour trouver les éléments inconnus sont PZL et AZL (figure A1-5). Dans le cas d'une recherche des éléments de la droite Marcq, le premier triangle permet de trouver l'expression de l'arc AL, b, la colatitude β du point L et un angle en Z noté A_{z1} ; le second triangle permet le calcul de la hauteur estimée et d'un angle en Z noté A_{z2} ; l'angle au zénith cherché résulte, selon le cas de figure, de la somme ou de la différence de A_{z1} et A_{z2} ; l'angle au zénith est compté à partir du pôle élevé.

En utilisant la règle du pentagone de Neper, on obtient successivement :

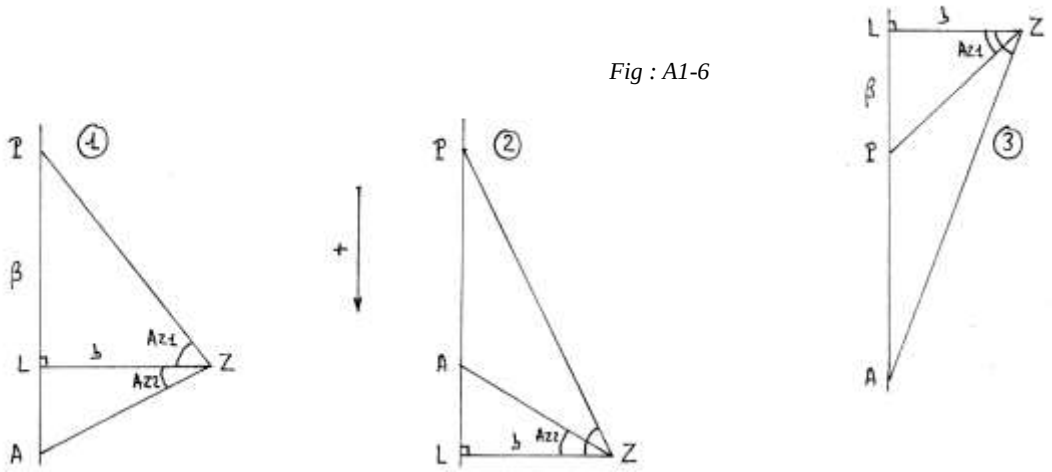
$$\tan\beta = \cot\varphi \,.\cos P \quad (8) \quad , \quad \cos b = \frac{\sin\varphi}{\cos\beta} \quad , \quad \cos A_{z1} = \sin P \,.\cos\beta \quad (8'')$$

$$\sin H = \frac{\cos(\delta-\beta).\sin\varphi}{\cos\beta} \quad (8') \quad , \quad \sin A_{z2} = \frac{\sin(\delta-\beta)}{\cos H} \quad (8''')$$

On retrouve ici les formules (8) et (8') établies précédemment algébriquement.

Les différents cas de figure possible sont schématisés en figure A1-6 ci-après. On remarquera que, le triangle de position étant construit à partir du pôle élevé, l'arc PL, β, ne peut excéder 90°.

Fig : A1-6



En orientant positivement le méridien de l'observateur de P vers Z, les caractéristiques des trois cas de figure sont indiquées dans le tableau ci-dessous :

Cas n°	P	A (angle à l'astre)	β	A_z	LA	
1	< 90°	< 90°	0° < β < 90°	$A_{z1} + A_{z2}$	> 0	δ - β
2	< 90°	> 90°	0° < β < 90°	$A_{z1} - A_{z2}$	< 0	
3	> 90°	< 90°	- 90° < β < 0°	$A_{z2} - A_{z1}$	> 0	

Les formules sont applicables algébriquement dans les quatre cas de figure, β et LA ayant les déterminations fixées par les dispositions du tableau.

Résolution générale d'un triangle rectangle :

Seule une formulation a été explicitée à partir des deux décompositions usuelles définies ci-dessus. D'autres ont été développées sachant qu'il suffit de connaître deux quelconques des cinq éléments d'un triangle rectangle ABC (figure A1-2) pour déterminer les trois autres, soit par logarithmes, soit par des tables donnant directement les résultats. Le tableau ci-après résume les 20 possibilités de calcul, les éléments connus figurant en têtes de colonnes et de lignes, les quantités calculées étant indiquées à leur intersection. Ces 20 possibilités se réduisent en fait à 10, chaque combinaison pointée d'un côté de la diagonale se retrouvant symétriquement de l'autre côté.

	a	b	c	B	C
a		cBC	bBC	bcC	bcB
b	cBC		aBC	acC	acB
c	bBC	aBC		abC	abB
B	bcC	acC	abC		abc
C	bcB	acB	abB	abc	

Les principales formulations utilisées seront explicitées au fur et à mesure de l'étude des tables.

Exemple :

Les données d'observation figurant dans le tableau ci-dessous, on explicite ci-après les différents calculs des éléments d'une droite de hauteur selon les différentes méthodes.

Estime		Observation		Coordonnées horaires	
φ_e	23° 06,0' S	Soleil		AHvp	59° 48,0'
G_e	21° 18,0' W	H_v	36° 12,0'	D	15° 24,0' N
AHvg = 38° 30,0' = P					

Les calculs de hauteur, longitude et latitude sont effectués par logarithmes à 6 décimales avec une table de type « Friocourt » ; on ne retient que 3 décimales pour les calculs d'azimut. Ce dernier calcul est effectué une fois pour toute en utilisant l'analogie des sinus (formule (3)).

On remarquera que le pôle élevé est ici le pôle S et que latitude et déclinaison sont de noms contraires.

1) <u>Méthode Marcq, formule semi-logarithmique</u> :

P =	38° 30,0'			logcos =	$\bar{1},893544$	logsin =	$\bar{1},794$
φ_e =	S 23° 06,0'	logsin =	$\bar{1},593659$	logcos =	$\bar{1},963704$		
D =	N 15° 24,0'	logsin =	$\bar{1},424156$	logcos =	$\bar{1},984120$	logcos =	$\bar{1},984$
		loga =	$\bar{1},017815$	logb =	$\bar{1},841368$		
		a =	- 0,104187				
		b =	0,694014	H_v =	36° 12,0'		
		$\sin H_e$ =	0,589827	H_e =	36° 08,7'	cologcos =	0,093
				Int =	+ 3,3'	logsin =	$\bar{1},871$
						A_z =	S132°W

Le produit de sinus (a) de la formule fondamentale est négatif car latitude et déclinaison sont de noms contraires. L'angle au zénith est compté à partir du S et est supérieur à 90° ; on trouve S132°W, soit N48°W ou 312°. Le point déterminatif Z' est situé à 3,3' dans le 312° du point estimé.

2) <u>Méthode Marcq, décomposition en deux triangles rectangles selon la hauteur issue de A</u> :

P =	38° 30,0’	logcos =	$\bar{1},893544$		
D =	N 15° 24,0’	logcot =	0,559964	logsin =	$\bar{1},424156$
φ_e =	S 23° 06,0’				
α =	109° 23,4’	logtg =	0,453508	cologcos =	0,478866
$\varphi_e + \alpha$ =	132°29,4’			logsin =	$\bar{1},867700$
		H_v =	36° 12,0’		
		H_e =	36° 08,7’	logsin =	$\bar{1},770722$
		Int =	+ 3,3’		

On est ici dans le cas de figure 2’ dans lequel l’arc α est compris entre 90° et 180°.

3) Point déterminatif Lalande :

φ_e =	S 23° 06,0’	cologcos =	0,036296		
δ =	105° 24,0’	cologsin =	0,015880		
H_v =	36° 12,0’				
2s =	164° 42,0’				
s =	82° 21,0’	logcos =	$\bar{1},124248$		
s – H_v =	46° 09,0’	logsin =	$\bar{1},858029$		
		somme =	$\bar{1},034453$		
		demi-somme =	$\bar{1},517227$		
		P/2 =	19° 12,6’	AHvp =	59° 48,0’
		P =	38° 25,1’	AHvg =	38° 25,1’
				G =	W 21° 22,9’

La distance polaire δ est supérieure à 90° car latitude et déclinaison sont de noms contraires. Le point déterminatif L a pour coordonnées φ_e = 23° 06,0’ S, G = 21° 22,9’ W.

4) Point déterminatif Borda :

P =	38° 30,0’	logcos =	$\bar{1},893544$		
D =	N 15° 24,0’	logcot =	0,,559964	cologsin =	0,575844
α =	109° 23,4’	logtg =	0,453508	logcos =	$\bar{1},521134$
H_v =	36° 12,0’			logsin =	$\bar{1},771298$
		$\varphi + \alpha$ =	132° 24,4’	logsin =	$\bar{1},868276$
		α =	109° 23,4’		
		φ =	S 23° 01,0’		

On retrouve évidemment la même valeur de α que dans le calcul n° 2. Le point déterminatif B a pour coordonnées φ = 23° 01,0’ S, G_e = 21° 18,0’ W.

5) Méthode de Sumner :

En choisissant deux latitudes arbitraires φ_1 = 23° 00,0’ S et φ_2 = 23° 15,0’ S encadrant la latitude estimée et en utilisant deux fois la formule de Borda, on trouve les longitudes correspondantes des points S_1 et S_2 définissant la droite de hauteur.

On ne détaille pas les calculs qui donnent :

S_1 : φ_1 = 23° 00,0’ S, G_1 = 21° 17,0’ W ; S_2 : φ_2 = 23° 15,0’ S, G_2 = 21° 31,7’ W.

6) <u>Méthode Marcq, décomposition en deux triangles rectangles selon la hauteur issue de Z</u> :

Ce dernier calcul est détaillé dans sa totalité.

P =	38° 30,0'	logcos =	$\bar{1},893544$			logsin =	$\bar{1},794$				
φ_e =	S 23° 06,0'	cologtg =	0,370044	logsin =	$\bar{1},593659$						
δ =	105° 24,0'										
β =	61° 24,5'	logtg =	0,263588	cologcos =	0,320060	logcos =	$\bar{1},680$				
δ – β =	43° 59,5'			logcos =	$\bar{1},856995$	logcos =	$\bar{1},474$	logsin =	$\bar{1},842$		
		H_v =	36° 12,0'								
		H_e =	36° 08,6'	logsin =	$\bar{1},770714$	A_{z1} =	72,7°	cologcos =	0,093		
		Int =	+ 3,4'			A_{z2} =	59,4°	logsin =	$\bar{1},935$		
						A_z =	132,1°				

On est ici dans le cas de figure n° 1. L'angle au zénith est donc la somme des deux angles trouvés A_{z1} et A_{z2}. Le pôle élevé étant Sud, l'angle au zénith est compté à partir de ce pôle et on a A_z = S132,1°W = N47,9°W = 312,1°. La légère différence d'intercept observée par rapport aux calculs 1) et 2) précédents est due aux arrondis des tables.

L'ensemble des résultats est illustré par la construction de la droite de hauteur en figure A1-7 ci-dessous.

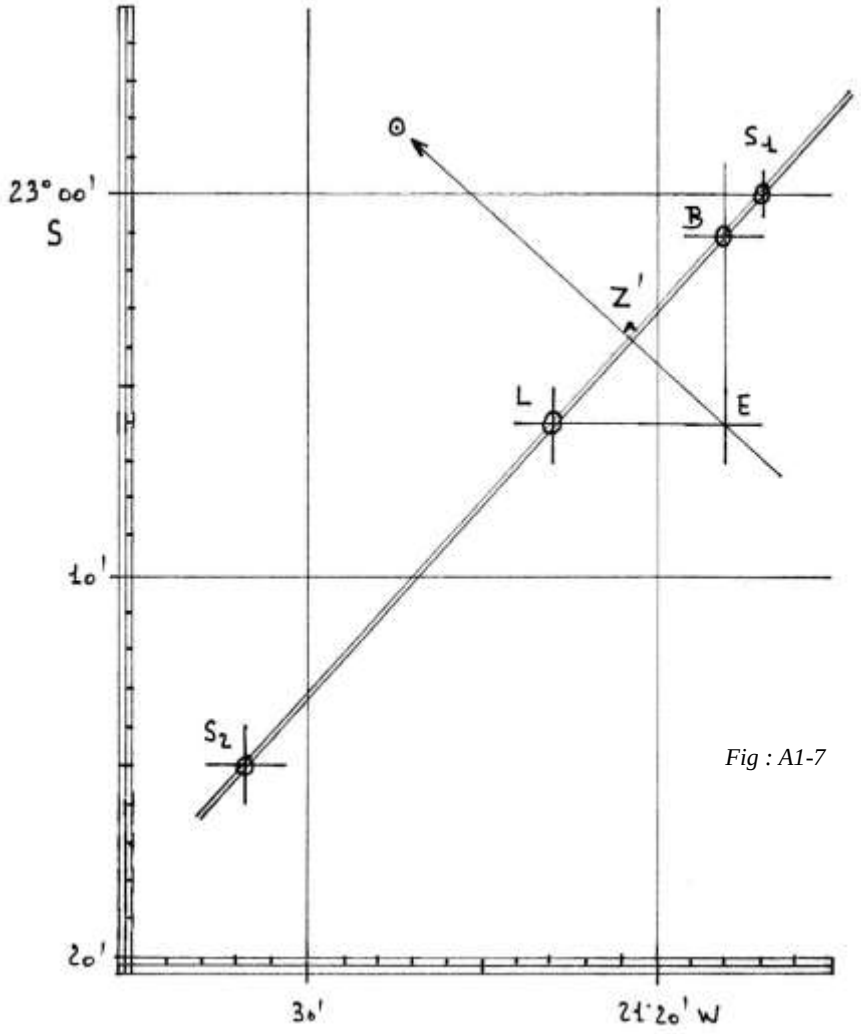


Fig : A1-7

Latitude aux passages au méridien :

Si on mesure la hauteur H d'un astre à l'instant de l'un de ses passages au méridien, la latitude peut se calculer à l'aide d'une simple opération algébrique. Lorsque l'astre passe au méridien supérieur d'un lieu, son angle horaire local est de 0° ou 360° ; l'angle au pôle est alors nul. À bord d'un navire en route, on considère le passage de l'astre au méridien estimé dont on détermine l'instant à l'aide des Éphémérides Nautiques (ou d'un almanach nautique) connaissant la vitesse en longitude de sa projection terrestre par rapport au navire. Lorsque l'astre passe au méridien inférieur, son angle horaire et son angle au pôle sont de 180° ; l'instant du passage se détermine selon le même principe que pour un passage au méridien supérieur.

Sur les figures A1-8, A1-9 et A1-10 ci-après, la verticale du lieu est notée ZZ', la ligne des pôles PP', P étant le pôle élevé, HH' est la trace de l'horizon vrai et QQ' la trace de l'équateur ; la projection terrestre de l'astre est en A. La latitude φ du lieu correspond à la hauteur du pôle élevé au-dessus de l'horizon ou encore à l'angle entre le plan de l'équateur et la direction de la verticale du lieu.

Passages au méridien supérieur :

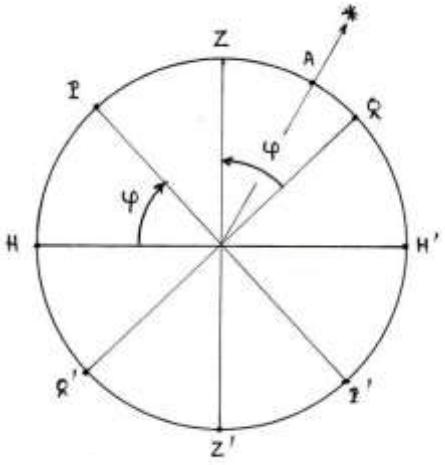


Fig : A1-8

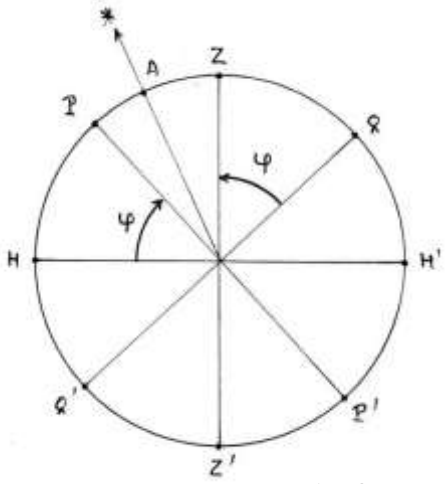


Fig : A1-9

Le méridien supérieur est le demi-grand cercle PZP'. Sur les figures A1-8 et A1-9, on a la relation entre les arcs du méridien :

$$\varphi = QZ = QA + AZ = \xi + D$$

La relation est algébrique en considérant la distance zénithale $|\xi| = 90° - H$ et en posant $\xi > 0$ si on tourne le dos au pôle élevé pour observer (figure A1-8) et $\xi < 0$ si on fait face à ce pôle (figure A1-9). On donne à D le signe conventionnel adopté au début de ce chapitre.

Passage au méridien inférieur :

Le méridien inférieur est le demi-grand cercle PZ'P' ; pour qu'un astre soit visible au moment de son passage au méridien inférieur, il faut que latitude et déclinaison soient de même nom et que D > 90° - φ. Sur la figure A1-10, on a la relation entre les arcs du méridien :

$$\varphi = QZ = QQ' - Q'A - AZ = 180° - (D + \xi)$$

D et ξ sont ici toujours positives.

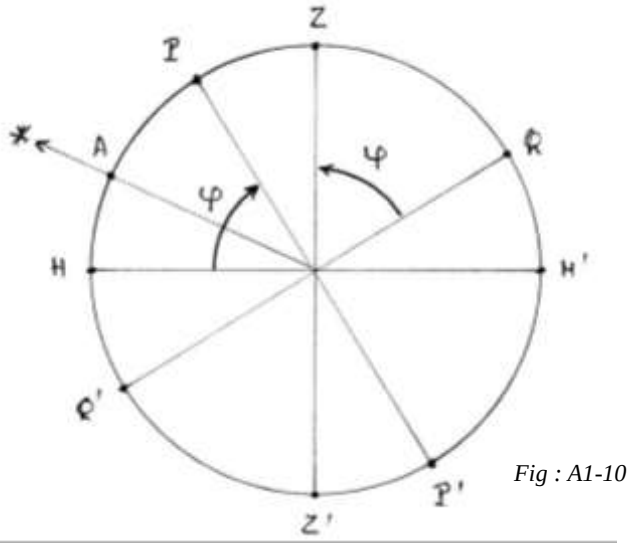


Fig : A1-10

La droite de hauteur résultant d'observations méridiennes se construit sur la carte selon la méthode du méridien estimé, le point déterminatif ayant pour coordonnées la longitude estimée à l'instant du passage et la latitude calculée suite à l'observation et à l'aide de l'une des formules ci-dessus. L'azimut de l'astre à ce moment étant Nord ou Sud, la droite méridienne est orientée Est-Ouest. Elle a les mêmes limites de validité qu'une droite de hauteur quelconque.

Remarques :

1) Si l'observateur est immobile et si la déclinaison de l'astre est constante (étoile), la hauteur maximale de l'astre, ou culmination, est observée lors du passage au méridien supérieur et sa hauteur minimale est, le cas échéant, observée lors du passage au méridien inférieur.
   Dans le cas d'un observateur ayant un mouvement sensible en latitude et/ou d'un astre à déclinaison variable, l'instant du passage au méridien supérieur diffère légèrement de l'instant de la culmination.
2) À bord d'un navire, on observe la hauteur d'un astre à l'instant de son passage au méridien estimé supérieur ou inférieur ; par abus de langage, l'instant du passage au méridien estimé supérieur est communément appelé « heure de la méridienne » et l'observation correspondante « méridienne » et il est souvent confondu, en pratique, avec l'instant de sa culmination.

Variations des coordonnées horizontales d'un astre :

On donne ci-dessous les formules permettant de calculer les variations de la hauteur ΔH et de l'azimut ΔA_z d'un astre consécutives à des petites variations de la latitude $\Delta\varphi$, de la déclinaison ΔD et de l'angle au pôle ΔP. Ces formules sont obtenues par différentiation. On obtient :

$$\Delta H = \cos A \,.\, \Delta D - \cos \varphi \,.\, \sin A_z \,.\, \Delta P + \cos A_z \,.\, \Delta \varphi \quad (9)$$

$$\cos H \,.\, \Delta A_z = \sin A \,.\, \Delta D + \cos A \,.\, \cos D \,.\, \Delta P - \sin H \,.\, \sin A_z \,.\, \Delta \varphi \quad (10)$$

Dans ces expressions, A représente l'angle à l'astre (ou angle parallactique). La relation (9) sera notamment utilisée lorsque l'on cherchera la correction à apporter à la hauteur suite à un écart ΔD entre valeurs de déclinaison réelle D et « de calcul », ou auxiliaire, D_a, imposé par l'usage de certaines tables. On aura alors :

$$\Delta H = \cos A \,.\, (D - D_a)$$

ANNEXE 1-2

LOGARITHMES

Les logarithmes constituent l'outil essentiel du calcul scientifique jusqu'à l'avènement du calculateur électronique. Ils ont été inventés par Jean Neper (ou John Napier, 1550-1617), théologien et mathématicien écossais, qui avait eu l'idée de former une table de correspondance entre les termes successifs d'une suite (ou progression) géométrique et d'une suite arithmétique ; dans ces conditions, à un produit de deux termes de la suite géométrique correspond une somme des deux termes correspondants de la suite arithmétique et réciproquement. Ces tables de correspondance ont été créées initialement pour simplifier les calculs trigonométriques relatifs au traitement des observations astronomiques. Neper publia ses travaux sur les logarithmes dans deux traités : « Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio » et « Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio ». Le premier fut édité dès 1614 alors que le second, indiquant le procédé de construction d'une table de logarithmes, ne le fut qu'en 1619, après sa mort. Les logarithmes décimaux furent étudiés par le mathématicien anglais Henry Briggs (1556-1630) qui poursuivait les travaux initiés par Neper. Briggs publia en 1624, sous le titre de « Arithmetica Logarithmica », la première table de logarithmes décimaux. Cette table donne les logarithmes des nombres et des rapports trigonométriques avec 14 décimales. Les fonctions logarithmes et exponentielles ne furent mises en évidence qu'à partir de la fin du XVIIe siècle.

Aujourd'hui, les logarithmes sont étudiés et utilisés essentiellement sous leur aspect fondamental de fonction mathématique et ne servent plus à l'exécution des calculs numériques. Il nous a donc paru utile d'indiquer succinctement comment était présentée la notion de logarithme aux élèves des écoles d'hydrographie à la fin du XIXe siècle et de rappeler les règles du calcul logarithmique ainsi que les conventions d'écriture.

Système de logarithmes :

Un système de logarithmes est constitué d'un ensemble de deux suites, l'une géométrique et l'autre arithmétique écrites en correspondance ; les deux progressions sont calées l'une par rapport à l'autre en faisant correspondre au terme 1 de la suite géométrique le terme 0 de la suite arithmétique :

x	0	…	q^{-1}	1	q	q^2	q^3	…	q^m	…	q^n	…	q^{m+n}	…	$+\infty$
Logarithme de x	$-\infty$	…	-r	0	r	2.r	3.r	…	m.r	…	n.r	…	m.r+n.r	…	$+\infty$

On reconnait sur la première ligne une suite géométrique de raison positive q et, au-dessous, une suite arithmétique de raison positive r. Au produit des deux termes $q^m.q^n = q^{m+n}$ correspond la somme m.r + n.r et réciproquement. Une fois le tableau construit, on peut donc remplacer par correspondance un produit par une somme et un quotient par une différence.

Plutôt que de travailler avec une suite arithmétique de termes quelconques, il est apparu plus simple d'utiliser la suite des nombres entiers de raison 1. On appelle base du système le réel positif b de la suite géométrique auquel correspond le terme 1 de la suite arithmétique. On a alors le tableau suivant :

x	0	…	b^{-1}	1	b	b^2	b^3	…	b^m	…	b^n	…	b^{m+n}	…	$+\infty$
Logarithme de x	$-\infty$	…	-1	0	1	2	3	…	m	…	n	…	m+n	…	$+\infty$

On reconnait sur la ligne supérieure la suite géométrique de raison q = b et sur la ligne inférieure la suite arithmétique des nombres entiers de raison r = 1. Au produit de deux termes de la suite géométrique $b^m.b^n = b^{m+n}$ correspond la somme m + n.

Logarithmes décimaux :

Compte tenu de leurs avantages, les logarithmes décimaux (notation log), ou vulgaires, de base b = 10, ont essentiellement été retenus pour l'exécution des calculs numériques ; le tableau des correspondances est le suivant :

x	0	…	10^{-1}	1	10	10^2	10^3	…	10^m	…	10^n	…	10^{m+n}	…	$+\infty$
log x	$-\infty$	…	-1	0	1	2	3	…	m	…	n	…	m+n	…	$+\infty$

Ce tableau ne donne pas les logarithmes décimaux des nombres compris entre deux puissances de 10 successives. Pour les obtenir, il convient de définir deux nouvelles suites donnant des termes intermédiaires. Par exemple, si on désire évaluer les logarithmes correspondant aux nombres de l'intervalle [10,100] , on pourra adopter une subdivision en 1024 sous intervalles (on choisit $1024 = 2^{10}$ au lieu de 1000 pour n'avoir à extraire que des racines carrées). La raison r de la suite arithmétique (les logarithmes) sera donnée par : $2 = 1 + 2^{10}.r$, soit $r = 2^{-10}$. La raison q de la suite géométrique correspondante est alors donnée par :

$$100 = 10.\,q^{1024} \quad \text{soit} \quad q = \sqrt[1024]{10} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{10}}}}$$

On a alors, pour l'intervalle considéré :

x	10,00000	10,02251	10,04507	…	19,98855	20,03355	…	100
log x	1,000	1,001	1,002	…	1,301	1,302	…	2,0000

On peut ainsi procéder pour les intervalles suivants du nombre x en resserrant plus ou moins les sous intervalles de calcul selon le degré de précision souhaité. La méthode est archaïque et n'est évidemment plus employée depuis longtemps mais c'est de cette manière qu'étaient présentés les logarithmes dans les écoles d'hydrographie.

Règles générales du calcul logarithmique :

1) Le logarithme d'un produit de plusieurs facteurs est égal à la somme des logarithmes des facteurs du produit.
2) Le logarithme d'un quotient est égal à la différence entre le logarithme du dividende et le logarithme du diviseur.
3) Le logarithme d'une puissance d'un nombre s'obtient en multipliant le logarithme du nombre par l'exposant de la puissance.
4) Le logarithme d'une racine d'un nombre s'obtient en divisant le logarithme du nombre par l'indice de la racine.

Règles particulières d'usage des logarithmes décimaux :

Tout nombre réel positif x peut toujours s'écrire : $x = a.10^n$ avec $a \in [1,10[$. On a donc, sous forme logarithmique : $\log x = n + \log a$ avec $\log a \in [0,1[$.

n est appelée caractéristique du logarithme. Si le nombre est supérieur ou égal à 1, la caractéristique est l'entier positif ou nul obtenu en diminuant de 1 le nombre des chiffres de la partie entière de ce nombre. Si ce nombre est inférieur à 1, la caractéristique est négative et est égale au rang à partir de la virgule de la première décimale non nulle.

log a est la mantisse du logarithme. La mantisse d'un nombre ne change pas lorsque l'on multiplie ou divise ce nombre par une puissance de 10. En conséquence, les tables de logarithmes usuelles donnent uniquement les

mantisses des logarithmes des nombres de 1000 à 9999 ce qui est suffisant pour trouver les logarithmes de tous les nombres possibles. Par exemple pour a = 2, il conviendra de rechercher la mantisse pour l'argument 2000 de la table qui donnera 30103 (à 5 décimales). On pourra écrire ensuite : $\log 200 = 2{,}30103$ puisque $200 = 2.10^2$ et $\log 0{,}002 = \bar{3}, 30103$ puisque $0{,}002 = 2.10^{-3}$. Pour des raisons de commodité d'écriture, on note $\bar{n} = -n$.

Il n'est pas d'usage d'effectuer des soustractions de logarithmes. Pour n'utiliser que des additions, on définit le cologarithme d'un nombre : $\operatorname{co}\log x = \log 1/x = -\log x$.

Logarithmes décimaux des rapports trigonométriques : les différentes tables usuelles donnent directement les logarithmes et cologarithmes décimaux des sinus, cosinus, tangentes etc …d'un arc. Les logarithmes calculés apparaissent alors avec leurs caractéristiques et leurs mantisses.

Autre écriture des logarithmes décimaux des nombres inférieurs à 1 : ces logarithmes étant négatifs, on peut aussi convenir de leur ajouter puis de leur retirer 10 ; on obtiendra un nombre positif auquel il faudra ensuite soustraire 10. Par exemple pour x = 0,002 :

$$\log 0{,}002 = -2{,}69897 = (+10 - 2{,}69897) - 10 = 7{,}30103 - 10$$

En pratique, on écrira seulement 7,30103, la soustraction de 10 étant éventuellement à faire mentalement à l'issue d'un calcul. Cette présentation est très utilisée dans les pays anglo-saxons pour exprimer les logarithmes des rapports trigonométriques. On la trouve également en France dans certaines tables anciennes (Tables de Bagay par exemple). À noter que le nombre obtenu ne sera positif que si le logarithme est supérieur à -10. Pour un logarithme compris entre -10 et -20, on conviendra d'ajouter 20 ; si ce logarithme est compris entre -20 et -30, on conviendra alors d'ajouter 30 etc.

Comme on peut le constater, le calcul logarithmique obéit à des règles particulières aujourd'hui complètement oubliées. Grâce à un enseignement rigoureux et une pratique journalière, les officiers des marines de guerre et de commerce maitrisaient complètement ces techniques de calcul.

ANNEXE 1-3

TABLES NUMÉRIQUES

DÉFINITIONS, CONVENTIONS, INTERPOLATIONS

Une table numérique de la grandeur u, fonction d'une ou de plusieurs variables, donne les valeurs prises par u pour des valeurs discrètes de la (ou des) variable(s) dont elle est fonction. Dans le domaine des calculs de navigation, la grandeur u peut être fonction d'une ou deux ou trois variables ; la table correspondante sera, respectivement, à simple, double ou triple argument d'entrée.

Les fonctions considérées, sont définies, continues et dérivables sur les intervalles où elles font l'objet d'une table de valeurs numériques.

Table à simple argument :

La grandeur u est fonction d'une seule variable, ou argument, x dont les valeurs tabulaires sont choisies à l'intérieur d'un intervalle utile de travail et sont espacées, en général, d'un intervalle constant h, l'intervalle d'argumentation. Pour chacune des valeurs tabulaires, la grandeur u est calculée et est inscrite dans la table avec un nombre de chiffres significatifs fixé. Dans le cas où l'intervalle d'argumentation h est constant, la table se présentera sous la forme générale suivante :

x	u
x_0	u_0
$x_1 = x_0 + h$	u_1
$x_2 = x_0 + 2.h$	u_2
$x_3 = x_0 + 3.h$	u_3
…	…
$x_k = x_0 + k.h$	u_k
$x_{k+1} = x_0 + (k+1).h$	u_{k+1}
...	…
$x_n = x_0 + n.h$	u_n

Cette table pourra être caractérisée par la notation $x_0(h)x_n$ indiquant que l'argumentation commence avec la valeur tabulaire x_0 de l'argument, se termine avec la valeur x_n, avec un intervalle d'argumentation constant h. On remarque que, dans ce cas, les valeurs tabulaires de l'argument constituent une progression arithmétique de premier terme x_0 et de raison h.

Pour des raisons liées à l'interpolation (voir ci-après), l'intervalle d'argumentation peut être variable et prendre plusieurs valeurs successives h, h' et h'' par exemple. On écrira alors pour caractériser une table de ce type : $x_0(h)x_i(h')x_j(h'')x_n$ signifiant que l'argumentation commence avec la valeur tabulaire x_0, avec un intervalle d'argumentation h jusqu'à la valeur tabulaire x_i, puis avec un intervalle h' jusqu'à la valeur x_j et enfin avec un intervalle h'' jusqu'à la valeur tabulaire finale x_n.

Concernant les tables de navigation, la variable (ou argument) considérée x est très fréquemment un angle ou un arc exprimé dans le système sexagésimal, en degrés, minutes et secondes (ou dixièmes de minutes) ou en heures, minutes et secondes. On écrit alors x = E(x) + F(x), avec E(x) la partie entière de l'argument, c'est-à-dire le nombre de degrés ou d'heures et F(x) la partie fractionnaire de l'argument, c'est-à-dire le nombre de minutes et, éventuellement secondes (ou dixièmes de minutes). La table peut alors être disposée comme suit :

E(x) F(x) → ↓	0’	…	$F(x_k)$	…	60’
…	…	…	↓	…	…
$E(x_k)$	→	→	u_k	...	…
…	…	…	…	…	…

L’argumentation de la partie fractionnaire commence nécessairement à 0 pour se terminer à 59 ou 60.

La valeur u_k correspondant à l’argument x_k se lit à l’intersection de la ligne relative à $E(x_k)$ et de la colonne relative à $F(x_k)$.

Dans ce genre de disposition, l’argumentation des lignes et colonnes peut être intervertie.

Table à double argument :

La grandeur u est alors fonction de deux variables x et y. La table se présente sous la forme d’un tableau à deux entrées sur lequel sont portées, en tête de colonne et en entrée de ligne les valeurs tabulaires des arguments x et y.

y x → ↓	x_0	x_1	…	x_i	…	x_m
y_0	u_{00}	u_{10}	…	u_{i0}	…	u_{m0}
y_1	u_{01}	u_{11}	…	u_{i1}	…	u_{m1}
…	…	…	…	…	…	…
y_j	u_{0j}	u_{1j}	…	u_{ij}	…	u_{mj}
…	…	…	…	…	…	…
y_n	u_{0n}	u_{1n}	…	u_{in}	…	u_{mn}

L’intervalle d’argumentation peut être identique ou non pour les deux variables, constant ou non. Dans le cas d’intervalles constants h et h’, on pourra caractériser la table ci-dessus par : $x_0(h)x_m$, $y_0(h')y_n$.

La variable, ou argument, x est ici l’entrée en colonne ou argument horizontal, la variable y est l’entrée en ligne ou argument vertical.

Table à triple argument :

La grandeur u est alors fonction de trois variables x, y et z. On constitue alors, pour chacune des valeurs tabulaires de z, un tableau à deux entrées x et y analogue à la table ci-dessus.

Dans le cas où $z_0(h'')z_p$, la table sera constituée de (p + 1) tableaux caractérisés par $x_0(h)x_m$, $y_0(h')y_n$. L’argument z est alors l’entrée en tableau.

Interpolation :

Une table numérique de la grandeur u donne les valeurs correspondant aux valeurs tabulaires de la (ou des) variable(s) d'entrée. Interpoler, c'est estimer la valeur prise par la grandeur u pour une (ou des) valeur(s) de la (ou des) variable(s) différente(s) des valeurs tabulaires.

Les tables de calcul de navigation sont en général conçues pour que le principe de l'interpolation linéaire soit applicable, sans erreur appréciable, dans pratiquement tous les cas de figures usuels : on se limitera donc, dans ce bref descriptif des méthodes, à l'exposé de ce principe simple. L'éventuel recours à des formules d'interpolation plus précises sera examiné au cas par cas.

Comme son nom l'indique, l'interpolation linéaire consiste à admettre que la variation de la grandeur u entre deux valeurs tabulaires est proportionnelle à la variation correspondante de la variable d'entrée, c'est-à-dire de l'argument. Géométriquement (figure A1-11), cela revient à dire que l'arc correspondant M_kM_{k+1} de la courbe représentative (C) de la fonction considérée dont est issue la grandeur u est assimilable à un segment de droite. Dans ces conditions, si on cherche à évaluer une estimation û de la valeur de u pour une valeur de la variable x comprise entre x_k et x_{k+1}, on calculera le taux de variation moyen $\Delta u/h$ de la fonction sur l'intervalle d'argumentation, puis on multipliera ce taux par la variation de la variable d'entrée depuis une valeur tabulaire. Le résultat de cette opération donne la variation correspondante de la grandeur u. On a ainsi :

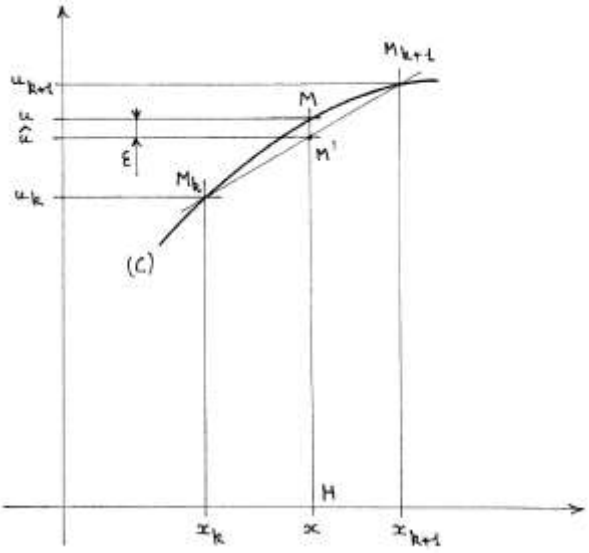


Fig : A1-11

$$\frac{\Delta u}{h} = \frac{u_{k+1} - u_k}{h}$$

$$u \approx \hat{u} = u_k + \frac{\Delta u}{h}.(x - x_k) = u_{k+1} - \frac{\Delta u}{h}.(x_{k+1} - x)$$

Une interprétation graphique de ces résultats est représentée en figure A1-11 ci-contre. La première relation permet le calcul de û à partir des valeurs tabulaires inférieures, la seconde, à partir des valeurs tabulaires supérieures ; employées algébriquement, elles conduisent naturellement toutes les deux au même résultat. Il est cependant plus naturel (et plus sûr) d'employer la première relation.

Il figure fréquemment dans les tables des tableaux donnant directement le résultat du calcul des parties proportionnelles, c'est-à-dire du produit du taux de variation moyen par la variation de la variable d'entrée ; l'entrée dans ces tableaux étant parfois limitée au demi-intervalle d'argumentation, il y sera nécessaire d'employer l'une ou l'autre des relations en partant de la valeur tabulaire, x_k ou x_{k+1},la plus voisine de la valeur considérée x.

Dans une très large majorité des cas on admet que u = û, c'est à dire que la différence $\varepsilon = |u - \hat{u}|$ reste inférieure à une demi-unité du dernier chiffre significatif avec lequel la grandeur u est exprimée dans la table.

Le procédé que l'on vient de décrire est directement applicable à une table à simple argument.

Interpolation linéaire double :

C'est le type d'interpolation que l'on aura à effectuer dans une table à double argument lorsque les valeurs des deux variables d'entrée diffèrent des valeurs tabulaires. Cette interpolation, dite aussi « en croix », consiste à effectuer successivement trois interpolations linéaires simples comme exposé ci-dessus.

Supposons que les valeurs considérées x et y des variables d'entrée soient telles que $x_i < x < x_{i+1}$ et $y_j < y < y_{j+1}$. On effectue tout d'abord deux interpolations linéaires simples pour trouver les deux valeurs de la grandeur u correspondant à x_i et y puis à x_{i+1} et y (on interpole alors selon y, à x_i et x_{i+1} donnés) puis, on effectue la 3e interpolation linéaire entre les deux valeurs trouvées, selon x. On peut aussi inverser l'ordre en interpolant d'abord selon x puis, selon y. L'ordre des interpolations sera choisi en fonction de la commodité des calculs.

Les opérations à effectuer peuvent être résumées dans le tableau ci-dessous :

	x_i	x	x_{i+1}
y_j	$u_{i,j}$	u_j interpolation linéaire selon x	$u_{i+1,j}$
y	u_i interp. linéaire selon y	u en ligne : interpolation linéaire selon x entre u_i et u_{i+1}. ou en colonne : interpolation linéaire selon y entre u_j et u_{j+1}.	u_{i+1} interp. linéaire selon y
y_{j+1}	$u_{i,j+1}$	u_{j+1} interpolation linéaire selon x	$u_{i+1,j+1}$

Interpolation linéaire triple :

C'est l'interpolation à employer dans les tables à triple argument lorsque les trois variables d'entrées x, y et z diffèrent des variables tabulaires. Si on a ici $x_i < x < x_{i+1}$, $y_j < y < y_{j+1}$ et $z_k < z < z_{k+1}$, on effectuera deux interpolations doubles selon x et y, l'une pour le tableau relatif à z_k l'autre pour le tableau relatif à z_{k+1}, puis une dernière interpolation linéaire simple, selon z entre les deux valeurs trouvées au stade précédent. Il y aura au total sept interpolations linéaires simples à effectuer.

Exemple :

Une table à double argument x et y donne les valeurs suivantes d'une grandeur u :

y ↓ x →	16°	17°
20°	5 h 10 m 56 s	5 h 15 m 23 s
21°	5 h 04 m 50 s	5 h 09 m 17 s

On demande d'évaluer u pour x = 16° 45' et y = 20° 36'.

On relève que l'accroissement moyen de u lorsque x augmente de 60' (1°) est de 4 m 27 s pour les deux valeurs tabulaires de y. De même, l'accroissement moyen de u lorsque y augmente de 60' est de – 6 m 06 s. L'ordre des interpolations est ici indifférent. On a ici interpolé d'abord selon y puis selon x ; les calculs sont résumés dans le tableau ci-dessous :

y ↓ x →	16°	16° 45'	17°
20°	5 h 10 m 56 s		5 h 15 m 23 s
20° 36'	5h 10m 56s – (6m 06s).36/60 = 5 h 07 m 16 s	5h 07m 16s + (4m 27s).45/60 = **u = 5 h 10 m 36 s**	5h 15m 23s – (6m 06s).36/60 = 5 h 11 m 43 s
21°	5 h 04 m 50 s		5 h 09 m 17 s

Dans le cas présent, le calcul est rapide car la diminution de u de 3 m 40 s est identique dans les colonnes 16° et 17°. Le calcul sera ici rendu aisé si on dispose d'une table de parties proportionnelles résolvant la « règle de 3 » $\Delta u.mm/60$, en fonction de Δu, différence tabulaire de la grandeur tabulée, et mm, nombre de minutes de l'argument x ou y.

Emploi des logarithmes proportionnels :

La partie proportionnelle, ou variation de la grandeur u depuis sa valeur tabulée u_k (ou u_{k+1}), donnée par la formule $(x - x_k).\Delta u/h$ peut s'effectuer relativement facilement à l'aide de « logarithmes proportionnels » (également appelés par J. Lalande « logarithmes logistiques »). Il conviendra cependant de travailler, le cas échéant, en valeur absolue pour éviter les valeurs négatives.

Sous forme logarithmique, la relation s'écrit :

$$\log|u - u_k| = \log|\Delta u| - \log h + \log(x - x_k)$$

En multipliant les deux membres par -1 et en ajoutant logh dans chaque membre, on obtient :

$$\log h - \log|u - u_k| = \log h - \log|\Delta u| + \log h - \log(x - x_k)$$

On définit ensuite le logarithme proportionnel (p log) comme étant la différence entre le logarithme de l'intervalle d'argumentation h et celui d'une variation et on obtient :

$$p\log|u - u_k| = p\log|\Delta u| + p\log(x - x_k)$$

Si ces logarithmes sont mis en table pour une valeur de h donnée, on pourra calculer simplement la variation de la grandeur u depuis sa valeur tabulée u_k.

Par exemple, J. Lalande donne, dans ses tables d'angle horaire, ces logarithmes pour un argument variant de 0 à 72' (ou 72 min), avec un intervalle de 1'' (ou 1 s) calculés pour h = 1° (ou 1 h), soit 3600'' (ou s). La recherche des deux termes du membre de droite de l'équation ci-dessus est très rapide, sans qu'il n'y ait besoin d'interpoler. La variation cherchée se détermine en entrant « à l'envers » dans la table avec la somme des deux logarithmes proportionnels trouvés précédemment.

Exemple : lorsque l'argument x = 20°, une grandeur u prend la valeur de 5 h 10 m 56 s ; lorsque l'argument x = 21°, la grandeur u prend la valeur de 5 h 04 m 50 s. Calculer u, par interpolation linéaire et à l'aide de l'extrait de table de logarithmes proportionnels de Lalande ci-dessous, lorsque x = 20° 36'.

″ ou s ′ ou m→ ↓	…	3	…	6	…	36	…
0		1,3010		1,0000		0,2218	
1		1,2986		0,9988		0,2216	
2		1,2962		0,9976		0,2214	
…		…		…		…	
5		1,2891		0,9940		0,2208	
6		1,2868		0,9928		0,2206	
7	…	1,2845	…	0,9916	…	0,2204	…
…		…		…		…	
39		1,2159		0,9553		0,2141	
40		1,2139		0,9542		0,2139	
41		1,2119		0,9532		0,2137	
…		…		…		…	

Le calcul peut se disposer comme suit :

Diff. tabulaire :	$\Delta u =$	- 6 m 06 s	$p \log\lvert\Delta u\rvert$	$= 0{,}9928$
Variation de x :	$x - x_k =$	36’	$p \log\lvert x - x_k\rvert$	$= 0{,}2218$
	$u - u_k =$	- 3 m 40 s	$p \log\lvert u - u_k\rvert$	$= 1{,}2146$
	$u_k =$	5 h 10 m 56 s		
	u =	**5 h 07 m 16 s**		

Des tables du même genre, construites pour h = 3 heures (10800 s), étaient employées pour l’interpolation des distances lunaires.

ANNEXE 2-1

CALCUL DU POINT À MIDI AU DÉBUT DU XXe SIÈCLE

Faire le « point à midi » consiste à fixer la position du navire à midi, heure du bord, c'est à dire lorsque la montre d'habitacle[71], qui règle la tenue de l'estime ainsi que les activités journalières et la vie courante, indique 12 heures. Le Soleil étant l'astre naturellement observable dans la journée, le point à midi sera obtenu par le recoupement d'une ou plusieurs droites de hauteur obtenues dans la matinée avec une droite de hauteur particulière résultant de l'observation du Soleil au moment de son passage au méridien estimé du navire. L'instant de cette dernière observation est relativement aisé à fixer à la minute près et la droite de hauteur correspondante est simple à construire puisqu'elle résulte d'un calcul de latitude issu d'une addition algébrique (voir annexe 1-1). Il conviendra naturellement de ramener l'ensemble des observations à une même heure, midi, par transport des droites selon les éléments de l'estime.

Dans une navigation au long cours, le point fait à « midi » est commode pour récapituler la distance parcourue depuis la veille à la même heure et en déduire une vitesse moyenne, calculer la distance qui reste à parcourir jusqu'au port de destination, estimer la date et une heure probable d'arrivée, relever le totalisateur du nombre de tours d'hélice et vérifier le « coefficient[72] », dresser l'état des diverses consommations et existants, en bref, faire le bilan de la journée passée et établir une projection sur la suite de la traversée. Nous évoquons ici le cas du navire de commerce à « propulsion mécanique » ; sur un voilier, les choses étaient à la fois plus simples et plus approximatives notamment en ce qui concerne la date et l'heure d'arrivée. Quel que soit le navire, l'élaboration du point à midi et l'annonce des différents éléments dont il est porteur possède un certain caractère rituel qui vient rompre la monotonie de chaque jour de mer.

Sur une large partie de l'époque qui nous intéresse, jusqu'au début des années 1950, le « midi » en question correspond au temps solaire vrai local : la montre d'habitacle est calée, approximativement, sur ce temps augmenté de 12 heures. Ainsi, la montre devrait-elle indiquer 12 h au moment où le Soleil passe au méridien estimé supérieur du navire. Le calage précis se fait une à deux fois par jour, notamment lors des circonstances favorables au calcul d'heure ou encore grâce au chronomètre ; si on prend soin de corriger l'indication de la montre du déplacement en longitude du navire depuis la dernière remise à l'heure, celle-ci indique, à 12 heures près, l'angle horaire local du Soleil, ce qui permet de traiter directement, sans avoir recours au chronomètre, les problèmes relatifs aux observations du Soleil pour lesquels cet angle horaire n'a besoin d'être connu qu'à la minute d'heure près : calculs d'azimut, préparation d'observations et repérages au voisinage du méridien. Le chronomètre reste l'instrument de précision, nécessaire pour marquer l'instant d'une mesure de hauteur en vue de son utilisation pour fixer un lieu de position. Cet instrument permet de déterminer le « temps moyen de Paris » (jusqu'en 1911) puis le « temps moyen de Greenwich » (jusqu'en 1925) puis ce même temps augmenté de 12 h de façon à ce qu'il soit 0 h à minuit et non à midi ; ce dernier sera baptisé « temps universel », et noté TU, en 1928.

Cette façon de procéder était concevable à l'époque où le navire constituait une entité isolée, sans lien avec la terre. Avec la généralisation des installations radio sur tous les navires, au lendemain de la Seconde Guerre mondiale, le temps en usage à bord, indiqué et piloté par la montre d'habitacle, est, théoriquement, le temps du fuseau horaire dans lequel se trouve le navire. Pratiquement, pour une traversée transocéanique, on évalue le décalage horaire total entre ports de départ et d'arrivée et on répartit ce décalage sur le nombre de nuits prévues à la mer de façon à ce que la différence entre temps universel et temps bord reste un nombre entier de demi-heures ; on organise enfin la mise en place du décalage pour que le « midi solaire » ait lieu moins de deux heures après le « midi bord ». Une fois les modalités du décalage adoptées, souvent variables d'une compagnie de navigation à l'autre, on effectue l'avance ou le retard des montres chaque nuit fixée à minuit.

[71] Rappelons que cette montre, placée dans l'abri de navigation ou la chambre des cartes, doit son nom au fait qu'elle était primitivement fixée à proximité de l'habitacle du compas.

[72] Le coefficient est le rapport de la vitesse en nœuds par le nombre de tour par minute de l'hélice. Ce rapport s'établit expérimentalement aux essais du navire et permet d'évaluer la vitesse surface connaissant la vitesse de rotation de l'hélice.

Il est tout d'abord à noter que, au début du XXe siècle, il n'est pas d'usage de travailler graphiquement sur un canevas : tous les éléments sont donc calculés. À cette époque, la méthode Marcq de Saint-Hilaire est loin d'être d'un emploi généralisé et c'est le point déterminatif Lalande qui est le plus utilisé (méthode du parallèle estimé). De même, l'azimut du Soleil n'apparait en général pas explicitement dans les calculs : les différents auteurs mettent en évidence à la place le coefficient Pagel, noté p, qui représente la variation d'angle au pôle de l'astre lorsque la latitude φ varie de 1' (hauteur et déclinaison restant constantes) ; c'est aussi la variation de longitude consécutive à un déplacement sur la droite de hauteur tel que la latitude varie de 1'. Plusieurs procédés ont été proposés pour calculer ce coefficient : dans le calcul qui suit, on utilise la méthode préconisée par V.-M. Caillet ; les méthodes déduites des recherches de J.-A. Mazure-Duhamel, L. G. Heath et L. Pagel seront explicitées en annexe 2-3. Le niveau de précision des calculs relevé dans les différents ouvrages de navigation de la fin du XIXe siècle est la seconde d'arc ; le dixième de minutes se généralise ensuite au XXe siècle.

L'astre observé est évidemment le Soleil et les opérations se déroulent en quatre temps :

1er temps : la position estimée du navire ayant pour coordonnées φ_e, G_e, on effectue une première observation du Soleil au sextant et on calcule les éléments de la droite de hauteur correspondante à savoir les coordonnées du point déterminatif Lalande φ_e, G et le coefficient Pagel p ; on recale l'estime sur le point déterminatif trouvé.

2e temps : on effectue ensuite le calcul de l'heure du passage du Soleil au méridien estimé supérieur du navire. Il y a deux cas de figure à envisager :

- montre réglé sur le temps solaire vrai : le réglage aura été effectué suite au calcul de longitude du 1er temps et l'heure, approchée, du passage correspondra à l'indication 12 h ; cette heure sera éventuellement corrigée du déplacement en longitude ;
- montre réglée sur une autre base : le calcul s'effectue par approximations successives à partir des données des Éphémérides Nautiques ou par simple division de l'angle au pôle trouvé au 1er temps par la vitesse relative en longitude du navire par rapport au Soleil.

Avec les éléments d'estime (route et vitesse fond), on calcule les coordonnées φ'_e, G'_e du point estimé, à l'heure prévue du passage du Soleil au méridien supérieur estimé du navire.

3e temps : on observe le Soleil à l'instant calculé du passage au méridien et on calcule la latitude φ_{midi} observée qui en résulte :

$$\varphi_{midi} = \xi_v + D$$

Expression dans laquelle ξ_v est la distance zénithale méridienne, complément de la hauteur vraie mesurée, et D la déclinaison du Soleil à cet instant (voir annexe 1-1).

4e temps : on effectue le calcul des coordonnées du point ; la latitude est évidemment φ_{midi} tandis que la longitude se calcule à partir de la différence de latitude ($\varphi_{midi} - \varphi'_e$) et du coefficient Pagel p. On a ainsi, en veillant à appliquer les signes correspondant au cas de figure considéré :

$$G = G'_e \pm |\varphi_{midi} - \varphi'_e|.p = G'_e \pm p.|\Delta\varphi|$$

Si la montre est calée sur le temps vrai local, on a directement les coordonnées du point de midi. Si celle-ci est calée sur une autre base, il conviendra d'effectuer un calcul d'estime donnant les coordonnées du point à midi heure du bord. Les coordonnées finales trouvées sont enfin arrondies à la minute.

On notera que, si l'on a pris soin d'observer à l'instant calculé du passage au méridien supérieur du navire, l'angle au pôle estimé du Soleil est nul. Le triangle de position du Soleil est donc réduit à un arc de grand cercle : le vertical et le méridien estimés sont confondus. Le point déterminatif de la droite correspondante se trouve à l'intersection du méridien estimé à l'instant de l'observation et du cercle de hauteur. La latitude de ce point se détermine directement par la formule $\varphi_{midi} = \xi_v + D$ et sa longitude est la longitude estimée G'_e.

Dans la pratique, à l'époque qui nous intéresse, l'observation de la « méridienne » puisque telle était l'expression consacrée, était un moment important de la vie du bord et plusieurs officiers venaient observer simultanément la hauteur du Soleil ; tous se mettaient en observation un peu avant l'heure dite, les uns se fixant sur l'heure calculée, d'autres visant plutôt la culmination, ce qui pouvait donner lieu à de vives discussions … Après la Seconde Guerre mondiale, et à bord des navires de charge, l'observation de la hauteur méridienne revenait au seul officier chargé de la navigation.

On développe ci-dessous un exemple, relatif à un calcul de point par observations du matin et méridienne ; le calcul du coefficient Pagel est conduit selon un procédé figurant dans le Traité de Navigation de V.-M. Caillet (3e édition, 1861).

Eléments de calcul			
1re observation	AHvp = 144° 37,1'	D = 0° 29,2' N	H_v = 24° 53,4'
Observation méridienne	Latitude φ_{midi} = 48° 15,5' N		
Position estimée à l'instant de la 1re observation : φ_e = 48° 29,7' N, G_e = 164° 08,2 E			
Entre les deux observations, le navire a parcouru 8,4 milles au S42°W (222°)			

Le premier calcul de longitude, effectué avec la formule de Borda (formule (1') établie en annexe 1-1) est développé ci-dessous :

δ =	89° 30,8'	cologsin =	0,000016	0'	0,000016
φ_e =	48° 29,7'	cologcos =	0,178693	+10'	0,180124
H_v =	24° 53,4'				
2s =	162° 53,9'				
s =	81° 26,9'	logcos =	$\bar{1}$,172314	+5'	$\bar{1}$,168093
s – H_v =	56° 33,5'	logsin =	$\bar{1}$,921399	+5'	$\bar{1}$,921815
		$\log\sin^2$ =	$\bar{1}$,272422		$\bar{1}$,270048
		logsin =	$\bar{1}$,636211		$\bar{1}$,635024
		P/2 =	25° 38,4′		25° 33,9′
		P =	51° 16,8′ E	P + 10p =	51° 07,9′ E
		AHvg =	308° 43,2′	10p =	−8,9′
		AHvp =	144° 37,1′		
		G =	164° 06,1′ E		

Si la latitude estimée du navire est exacte, sa longitude est celle calculée.

Dans la colonne de droite, on a calculé l'angle au pôle résultant d'une latitude égale à la latitude estimée augmentée de 10' ; les éléments s et s – H_v augmente simultanément chacun de 5'. Entre ces deux valeurs de latitude, l'angle au pôle diminue de 8,9' ; cette quantité est notée 10p, p étant la variation d'angle au pôle correspondant à une augmentation de latitude de 1' ou coefficient Pagel. Une autre méthode de calcul est proposée par L. Pagel (voir annexe 2-3) ; cette dernière a, selon V.-M. Caillet, « *le désavantage de présenter des chances d'erreur plus grandes par le jeu des signes qui y sont multipliés* » ; il utilise donc le procédé ci-dessus qui conduit à effectuer deux fois le calcul d'angle au pôle.

À l'instant de cette première observation, on adopte comme position le point L (il s'agit en fait du point déterminatif Lalande) de coordonnées φ_e et G. De ce point, le navire parcourt 8,4 milles au S42°W ; l et g étant les variations de latitude et longitude correspondant, le point estimé L' a alors pour coordonnées :

$\varphi_e =$	48° 29,7' N	G =	164° 06,1' E
+ l =	6,2' S	+ g =	8,5' W
$\varphi'_e =$	48° 23,5' N	$G'_e =$	163° 57,6' E

Nota : m étant la distance parcourue, R la route suivie (exprimée de 0° à 360°) et φ_m la latitude moyenne du parcours, les variations de latitude et de longitude se calcule par les formules approchées suivantes :

$$l = m.\cos R \quad , \quad g = \frac{-m.\sin R}{\cos \varphi_m}$$

L'observation de la méridienne met en évidence un écart $\Delta\varphi$ entre latitudes estimée et observée d'où une correction de longitude ΔG égale à $p.\Delta\varphi$. Le calcul de la longitude à midi est alors :

$\varphi_{midi} =$	48° 15,5' N	$G'_e =$	163° 57,6' E
$- \varphi'_e =$	48° 23,5' N	$+ \Delta G =$	7,1' W
$\Delta\varphi =$	8,0' S	$G_{midi} =$	163° 50,5' E

Il y a lieu d'être attentif au signe de la variation de longitude ΔG. Dans le cas de figure, l'angle au pôle diminue lorsque la latitude augmente algébriquement (p = - 0,9'). Comme AHvg = 360° - P, l'augmentation de latitude conduit à une augmentation de l'angle horaire local ; comme enfin, G = AHvp – AHvg, l'augmentation d'angle horaire local conduit à une diminution de longitude. Dans la situation considérée, la variation de latitude est négative (la latitude à midi est inférieure à la latitude estimée), en conséquence, la longitude augmente algébriquement (ΔG est W). La figure A2-1 ci-dessous illustre le problème en utilisant les lieux de position ; l'azimut du Soleil lors de la première observation est Z = 120,7°.

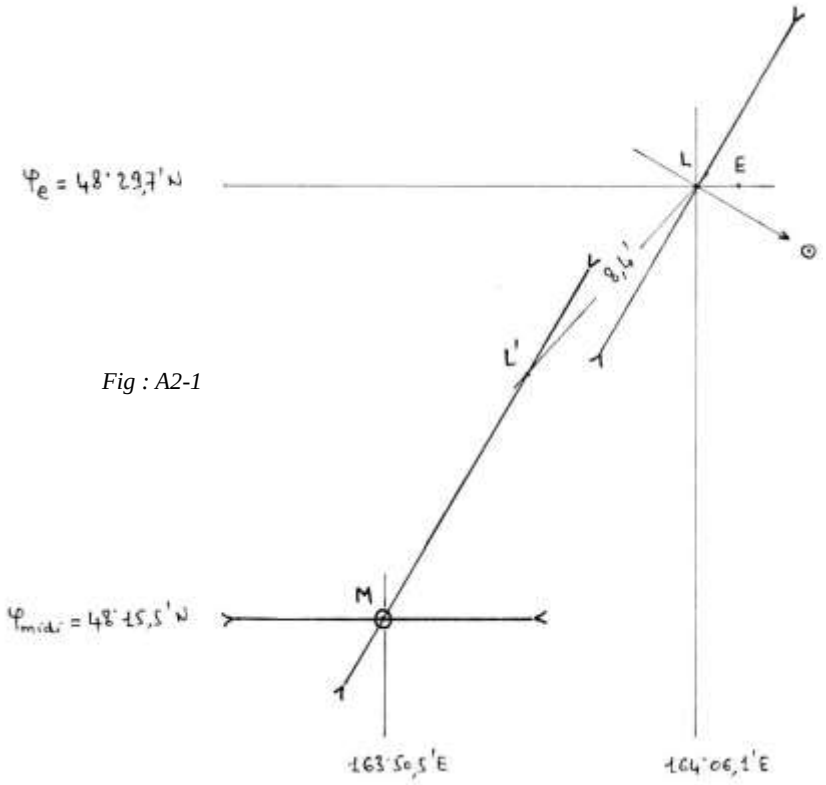


Fig : A2-1

ANNEXE 2-2

TABLES de L. HOMMEY

Ces tables donnent l'angle au pôle (en heures, minutes, secondes et tierces) pour des valeurs entières de la latitude, de la déclinaison et la hauteur vraie ainsi que les parties proportionnelles permettant l'interpolation au voisinage des valeurs tabulées. Elles sont disposées conformément au tableau ci-dessous.

LATITUDE = 14°. Déclinaison de même dénomination				
DÉCLINAISON = 10°				
Hauteur vraie	Minutes d'intervalle	Angle horaire et parties proportionnelles pour la HAUTEUR	Parties proportionnelles pour la LATITUDE	Parties proportionnelles pour la DÉCLINAISON
…	…	…	…	…
44°		3 h 07 m 41 s 08 t		
	30' 5' 1'	2 m 03 s 39 t 20 s 36 t 4 s 07 t	- 6 t - 1 t 0 t	+ 20 s 10 t + 3 s 22 t + 40 t
45°		3 h 03 m 33 s 50 t		
	30' 5' 1'	2 m 03 s 40 t 20 s 37 t 4 s 07 t	- 41 t -7 t - 1 t	+ 20 s 07 t + 3 s 21 t + 40 t
…	…	…	…	…

Dans cet extrait, les parties proportionnelles pour la latitude sont négatives, indiquant que l'angle au pôle diminue lorsque la latitude augmente en valeur absolue ; elles sont positives pour la déclinaison, indiquant que l'angle au pôle varie dans le même sens que la déclinaison. Le signe n'est pas explicité pour la hauteur, le sens de variation de l'angle au pôle étant facilement identifiable en descendant une même colonne.

À l'aide des éléments figurant dans ce tableau, calculer l'angle au pôle d'un astre dont la déclinaison est D = 10° 15' N et la hauteur H = 44° 36' en un lieu de latitude φ = 14° 12' N. On recherchera les éléments de calcul pour une latitude de 14°, une hauteur de 45° et une déclinaison de 10°, sans chercher à interpoler les parties proportionnelles :

	Angle au pôle tabulé =	3 h 03 m 33 s 50 t
Ecart en hauteur : - 24' = - (4x5' + 4x1')	Interpolation pour H : 4x(20 s 37 t) + 4x(4 s 07 t) =	+ 1 m 38 s 56 t
Ecart en latitude : + 12' = 2x5' + 2x1'	Interpolation pour φ : 2x(-7 t) + 2x(-1 t) =	- 16 t
Ecart en déclinaison : 15' = 3x5'	Interpolation pour D : 3x(3 s 21 t) =	+ 10 s 03 t
	Angle au pôle cherché =	**3 h 05 m 22 s 33 t**

Résultat que l'on pourra arrondir à la seconde près : 3 h 05 m 23 s ; le calcul direct donne : 3 h 05 m 24s.

ANNEXE 2-3

FORMULES DE MAZURE-DUHAMEL ET HEATH, MÉTHODE PAGEL

Dans son « Mémoire sur l'astronomie nautique » (1822), J.-A. Mazure-Duhamel établit, par des considérations géométriques simples, l'expression de la variation ΔP de l'angle en pôle d'un astre consécutive à des variations de latitude Δφ et de hauteur ΔH en fonction de l'azimut et de la latitude. En utilisant la distance zénithale ξ, complément de la hauteur H, il écrit :

$$\Delta P = \cot A_z \,.\, \sec \varphi . \Delta\varphi + \csc Az \,.\, \sec \varphi \,.\, \Delta\xi$$

Dans cette expression, ΔP, Δφ et Δξ sont exprimées dans la même unité. À partir de là, Mazure-Duhamel calcule, en fonction de l'azimut A_z et de la latitude φ, pour Δφ = Δξ = 1', les deux termes de la variation d'angle au pôle et en dresse la table dont l'objectif premier est de connaître les incertitudes sur l'angle au pôle résultant d'incertitudes sur la latitude et la hauteur.

En réétudiant le problème, et en ne considérant que la variation de latitude Δφ, L. G. Heath établit une seconde forme de la formule de J.-A. Mazure-Duhamel :

$$\Delta P = \left(-\frac{\tan \varphi}{\tan P} + \frac{\tan D}{\sin P}\right) . \Delta\varphi = \cot A_z \,.\, \sec \varphi \,.\, \Delta\varphi$$

Outre les considérations géométriques utilisées par J.-A. Mazure-Duhamel, cette expression et l'égalité s'obtiennent plus généralement en différentiant la formule fondamentale appliquée au triangle de position de l'astre, $\sin H = \sin \varphi \,.\, \sin D + \cos \varphi \,.\, \cos D \,.\, \cos P$, par rapport à la latitude et l'angle au pôle (les autres paramètres étant considérés comme constants), puis en exprimant l'azimut à l'aide de la formule des quatre éléments consécutifs.

Si on pose Δφ = 1', variation unitaire de latitude, la variation correspondante d'angle au pôle, que l'on notera p, puisqu'il s'agit de ce que l'on nommera le coefficient Pagel, a alors pour expression :

$$p = \left(-\frac{\tan \varphi}{\tan P} + \frac{\tan D}{\sin P}\right) = \cot A_z \,.\, \sec \varphi$$

J.-A. Mazure-Duhamel préconise la formulation écrite à droite alors que L. G. Heath utilisera celle écrite à gauche et calculera, en 1845, deux tables : la table A qui donne le premier terme en fonction de la latitude φ et de l'angle au pôle P, et la table B qui donne le second en fonction de la déclinaison D et de l'angle au pôle P. Ces tables sont assez grossières, avec une argumentation limitée en déclinaison (24°) ainsi qu'en latitude (68°) et des intervalles d'argumentation importants, notamment pour l'angle au pôle. Elles seront par la suite considérablement améliorées et étendues puis complétées d'une table C permettant le calcul d'azimut (voir le chapitre 6 consacré à l'étude des tables d'azimut).

Dans son étude publiée en 1847, Louis Pagel indique une autre méthode, permettant de calculer la variation d'angle au pôle, donc, par déduction, la variation de longitude, consécutive à une variation de latitude de 1' basée sur la formule de Borda et des considérations relatives aux différences tabulaires figurant dans les tables de logarithmes.

Rappelons la formule qui s'écrit :

$$\left(\sin \frac{P}{2}\right)^2 = \frac{\cos s \,.\, \sin(s - H)}{\cos \varphi . \sin \delta}$$

Expression dans laquelle P est l'angle au pôle cherché, δ la distance polaire et 2s = H + φ + δ. Sous forme logarithmique, cette expression devient :

$$2\log\sin\frac{P}{2} = \log\cos s + \log\sin(s-H) - \log\cos\varphi - \log\sin\delta$$

En différentiant cette expression par rapport à P et φ, on obtient, M étant le module des logarithmes décimaux (M = 1/ln10 = 0,43429448…) :

$$M.\cot\frac{P}{2}.dP = \frac{M}{2}.\cot(s-H).d\varphi - \frac{M}{2}.\tan s\,.d\varphi + M.\tan\varphi\,.d\varphi$$

Soit, en passant aux accroissements :

$$2M.\cot\frac{P}{2}.\Delta P = [M.\cot(s-H) - M.\tan s + 2M.\tan\varphi].\Delta\varphi$$

Soit encore :

$$\Delta P = \frac{2k_1 - k_2 + k_3}{2k}.\Delta\varphi = p.\Delta\varphi$$

Le coefficient Pagel p que l'on a fait apparaître peut se calculer en utilisant les quantités notées k, k_1, k_2, k_3, qui sont les taux de variation des différents logarithmes utilisés et qui peuvent se lire directement dans les tableaux de différences tabulaires qui figurent dans les tables ; celles-ci donnent les valeurs de ces taux exprimés pour la valeur de l'argument et son intervalle d'argumentation (par exemple 15'' pour la table de Friocourt). Cette méthode de calcul compliquée (et peu précise si les intervalles de détermination des taux de variations sont petits) semblait prévaloir à l'École navale[73]. Il est évident que le calcul par les tables de Mazure-Duhamel ou de Heath est beaucoup plus expéditif.

Exemple de calcul :

Eléments de calcul			
1re observation	AHvp = 334° 46,4'	D = 5° 31,0' S	H_v = 23° 54,0'
2e observation	AH'vp = 63° 54,5'	D' = 5° 25,3' S	H'_v = 31° 25,0'
Position estimée à l'instant de la seconde observation : φ_e = 41° 54' N, G_e = 25° 59' W			
Entre les deux observations, le navire a parcouru 35,5 milles au 240°			

δ =	95° 31,0'	colog sin =	0,002016		
φ_e =	41° 54,0'	colog cos =	0,128245	2 k_1 =	+ 57
H_v =	23° 54,0'				
2s =	161° 19,0'				
s =	80° 39,5'	log cos =	$\bar{1},210376$	- k_2 =	- 192
s – H_v =	56° 45,5'	log sin =	$\bar{1},922396$	k_3 =	+ 21
		log sin² =	$\bar{1},263033$	somme =	- 114
		log sin =	$\bar{1},631517$		
		P/2 =	25° 20,7′	k =	+ 67
		P =	50° 41,4′E		
		AHvg =	309° 18,6′		
		AHvp =	334° 46,4′		
		G_1 =	25° 27,8′W	p_1 =	- 0,85 '/'

[73] Voir l'ouvrage d'Alfred Ledieu « Les nouvelles méthodes de navigation, étude critique » (1877), page 26, où il écrit « *Comme ce mode jouit d'une grande vogue …* ».

Le second calcul de longitude, selon la même formule et pour une même latitude, donne :

$\delta' =$	95° 25,3'	cologsin =	0,001947		
$\varphi_e =$	41° 54,0'	cologcos =	0,128245	$2k_1 =$	+ 57
$H'_v =$	31° 25,0'				
2's =	168° 44,3'				
s' =	84° 22,2'	logcos =	$\bar{2},991687$	- $k_2 =$	- 320
s' – $H'_v =$	52° 57,2'	logsin =	$\bar{1},902082$	$k_3 =$	+ 24
		logsin² =	$\bar{1},023961$	somme =	- 239
		logsin =	$\bar{1},511981$		
		P'/2 =	18° 58,2′	k =	+ 92
		P' =	37° 56,4′W		
		AH'vg =	37° 56,4′		
		AH'vp =	63° 54,5′		
		$G_2 =$	25° 58,1′W	$p_2 =$	- 1,30 '/'

Pour calculer les coordonnées du point observé à l'instant de la seconde observation, il convient tout d'abord de rectifier la longitude G_1 résultant de la première observation en fonction du déplacement du navire.

R étant l'angle de route et m la distance parcourue, les déplacements en latitude et en longitude entre les deux observations sont respectivement :

$$l = m.\cos R = 17{,}8'S \quad \text{et} \quad g = \frac{-m.\sin R}{\cos \varphi_m} = 41{,}3'W$$

De la première observation résulte un lieu de position, noté (D_1) sur le schéma explicatif (échelle non respectée) de la figure A2-2. Ce lieu, qui n'était pas tracé sur la carte à l'époque de L. Pagel, passe par le point L_1 dont la latitude est celle ayant été choisie pour effectuer le calcul, φ_e, et dont la longitude est G_1. À l'instant de la seconde observation, l'ensemble des positions possibles du navire résultant de la première observation est la droite (D'_1), transformée de (D_1) dans une translation de 35,5 milles dans le 240°. Cette droite coupe le parallèle de latitude φ_e en L'_1 dont la longitude G'_1 est égale à :

$$G'_1 = G_1 + g - p_1.l = 25° 27{,}8' + 41{,}3' - 15{,}1' = 25° 54{,}0'W$$

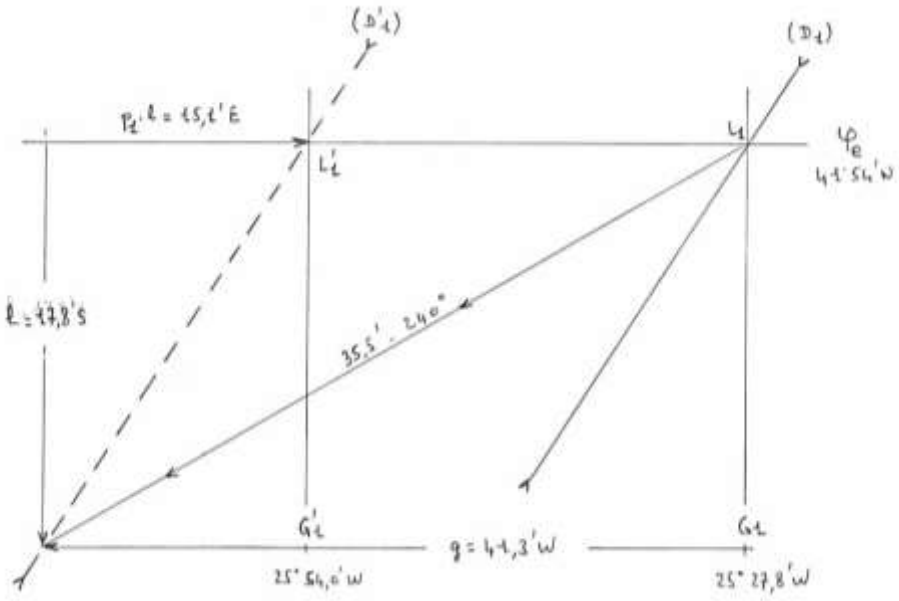


Fig : A2-2

De la seconde observation résulte un lieu de position que l'on a noté (D_2) sur la figure 2-4 ci-dessous. Le point à l'instant de cette observation se trouve à l'intersection des droites (D_2) et (D'_1) ; on calcule ses coordonnées en utilisant les coefficients Pagel.

Signe des coefficients : les signes indiqués dans les tableaux de calcul de longitude correspondent au sens de variation de l'angle au pôle pour une augmentation de latitude de 1'. Si on passe à la variation correspondante de longitude, on établira que la première est bien négative mais que la seconde est positive (si la latitude augmente, P diminue, donc AHvg diminue et comme AHvp est fixé, G, nécessairement augmente). φ et G étant les coordonnées du point à l'instant de la seconde observation, on pose $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_e$, et on écrit, algébriquement :

$$G - G'_1 = p_1.\Delta\varphi \quad \text{et} \quad G - G_2 = -p_2.\Delta\varphi \quad \text{soit, par différence: } \Delta\varphi = \frac{G_2 - G'_1}{p_1 + p_2} = -1{,}9' \quad \text{et} \quad \varphi = 41°\,52{,}1'\text{N}$$

$$G = G'_1 + p_1.\Delta\varphi = G_2 - p_2.\Delta\varphi = 25°\,55{,}6'\text{W}$$

Les coordonnées du point à l'instant de la seconde observation sont donc, à la minute près :

φ = 41° 52' N, G = 25° 56' W

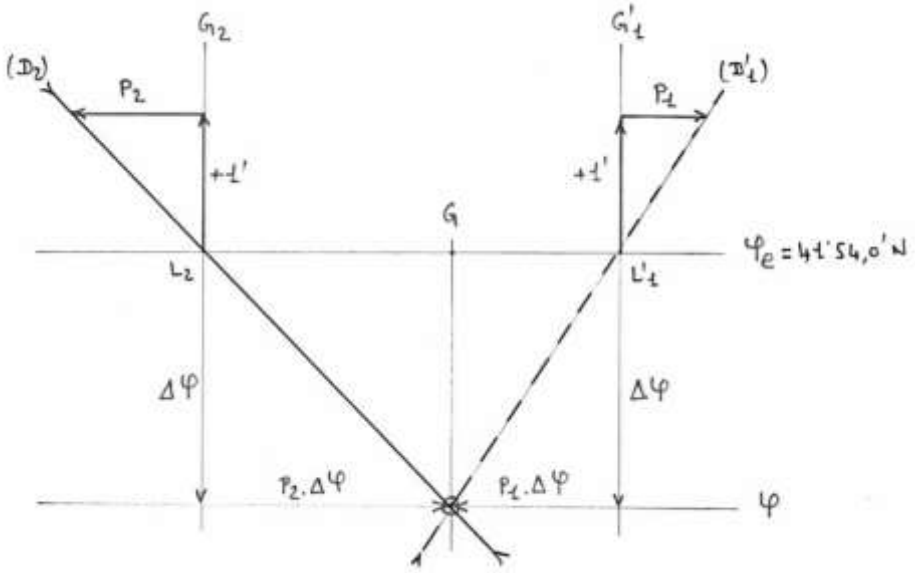


Fig : A2-3

Pour tenter une explication claire du principe du calcul, on a utilisé la notion de lieu de position rectiligne sur la carte marine mais, au milieu du XIXe siècle, il n'était pas admis de travailler graphiquement. La figure A2-3 ci-dessus permet de visualiser les coefficients Pagel et les signes qui leurs sont attribués.

Par la suite, la méthode sera simplifiée et formalisée, notamment par A. C. Johnson à partir de 1880, par l'emploi des tables de calcul initiées par Heath en Grande Bretagne et par Perrin, en France.

ANNEXE 2-4

TABLES de MACKAY, TABLES de INMAN

Tables de Mackay :

Formulation :

À partir de la formule fondamentale, $\sin H = \sin\varphi \,.\, \sin D + \cos\varphi \,.\, \cos D \,.\, \cos P$ on peut écrire :

$$\cos P = \sin H \,.\, \sec\varphi \,.\, \sec D - \tan\varphi \,.\, \tan D = X - \tan\varphi \,.\, \tan D$$

C'est la forme qu'a retenu A. Mackay.

Mise en table et opérations :

Une première table (table XXVII) donne le logarithme du produit $\sec\varphi \,.\, \sec D$ en fonction de la latitude φ et de la déclinaison D ; une seconde table (XXVIII) donne la valeur naturelle du produit des deux tangentes en fonction de la latitude et de la déclinaison et enfin, une troisième table (XXIX) donne P en fonction de son cosinus.

Il convient donc d'aller relever le logarithme du sinus de H dans les tables des logarithmes des rapports trigonométriques, de l'ajouter au logarithme trouvé dans la table XXVII puis de rechercher le nombre X correspondant. À ce nombre X, on ajoute ou retranche, suivant les noms respectifs de φ et de D, la valeur naturelle trouvée dans la table XXVIII ; on obtient ainsi le cosinus de P qui sera extrait à l'aide de la table XXIX.

Exemple :

Calcul de l'angle au pôle P sachant que la latitude est $\varphi = 42° 15'$ N, la déclinaison D = 19° 51' N et la hauteur H = 43° 55'.

Extraits des tables XXVII et XXVIII :

TABLE XXVII **FOR COMPUTING THE APPARENT TIME**					**TABLE XXVIII** **FOR COMPUTING THE APPARENT TIME**				
Latitude	Déclinaison				Latitude	Déclinaison			
	…	19°	20°	…		…	19°	20°	…
0° … 42° 43° … 60°	…	0243 … 1533 1602 … 3254	0270 … 1559 1629 … 3280	…	0° … 42° 43° … 60°	…	0 … 3100 3211 … 5964	0 … 3277 3394 … 6304	…

Le calcul se décline ensuite comme suit :

log secφ.secD =	0,1572	table XXVII
+ log sinH =	9,8411	table de logarithmes des rapports trigonométriques
log X =	9,9983	
X =	0,9961	table de logarithmes des nombres
- tanφ.tanD =	- 0,3279	table XXVIII
cosP =	0,6682	
P =	48° 04’	table XXIX ou table des valeurs naturelles des rapports trigo.

On remarquera la difficulté que posent les interpolations en croix dans les tables XXVII et XXVIII.

Tables de Inman :

Formulation :

La formule employée par J. Inman a été établie à l’annexe 1-1 (formule 1’’bis) ; on la rappelle ci-dessous :

$$\mathrm{hav(P)} = \sec\varphi \,.\, \sec \mathrm{D} \,.\, \sqrt{\mathrm{hav}[\xi + (\varphi - \mathrm{D})]} . \sqrt{\mathrm{hav}[\xi - (\varphi - \mathrm{D})]}$$

on écrira, sous forme logarithmique :

$$\log \mathrm{hav(P)} = \log \sec\varphi + \log \sec \mathrm{D} + \frac{1}{2}\log \mathrm{hav}[\xi + (\varphi - \mathrm{D})] + \frac{1}{2}\log \mathrm{hav}[\xi - (\varphi - \mathrm{D})]$$

Mise en table et opérations :

Après avoir calculé les sommes algébriques [ξ ± (φ – D)], on recherche les logarithmes des sécantes dans une première table à simple entrée, argumentée de minute en minute d’arc puis, directement, les demi-logarithmes des sommes algébriques dans une seconde table à simple entrée, également argumentée toutes les minutes d’arc. Après avoir effectué la somme des quatre logarithmes, on recherche l’angle au pôle dans la table des haversines argumentées toutes les secondes de temps (soit toutes les 15’’ d’arc). Cette dernière table donne, en fonction de l’argument, les valeurs naturelles des haversines ainsi que les logarithmes correspondants. Les logarithmes figurant dans les différentes tables sont exprimés avec cinq décimales.

Exemple :

Avec les mêmes données que ci-dessus, on obtient [ξ + (φ – D)] = 68° 29’ et [ξ - (φ – D)] = 23° 41’ ; le calcul se déroule ensuite comme suit :

log secφ =	0,13064	table des log sécante
log secD =	0,02660	table des log sécante
½log hav[ξ + (φ – D)] =	4,75027	table des half log haversine
½log hav[ξ - (φ – D)] =	4,31219	table des half log haversine
log hav(P) =	9,21970	
P =	48° 03,8’	table des log haversine

Les tables n’ont pas été reproduites mais sont faciles à reconstituer avec une calculatrice scientifique.

ANNEXE 2-5

TABLES FOR FACILITATING SUMNER'S METHOD AT SEA

SIR W. THOMSON

La table conçue par Sir W. Thomson est une simple table de résolution des triangles sphériques rectangle dans laquelle les deux arguments d'entrées sont les côtés de l'angle droit, notés a et b, les éléments calculés étant la co-hypoténuse (complément de l'hypoténuse) et l'un des angles non droit, notés co-hyp et A. Un extrait en est donné dans les pages qui suivent pour traiter un exemple.

Le triangle de position de l'astre PZA que considère Thomson est construit à partir du pôle céleste N ou S de l'hémisphère dans lequel se trouve l'astre : dans ces conditions, P est donc du nom de la déclinaison et celle-ci est toujours positive, comprise entre 0° et 90° ; la latitude est positive si elle est du même nom que la déclinaison, négative dans le cas contraire. Pour résoudre le problème, le triangle PZA est décomposé en deux triangles rectangles selon la hauteur sphérique issue de A ; si on note K le pied de cette hauteur, les deux triangles rectangles sont PKA et ZKA. On note « a » la hauteur AK, « b » le côté PK et « b' » le côté KZ. Les autres notations sont celles couramment rencontrées pour désigner les angles et côtés du triangle de position.

Deux configurations du triangle PZA sont à considérer selon que le point K est situé à l'intérieur de l'arc PZ ou à l'extérieur (figure A2-4), l'angle au pôle restant inférieur à 90° ; le cas où celui-ci est supérieur à 90° n'a pas été explicitement envisagé par Thomson.

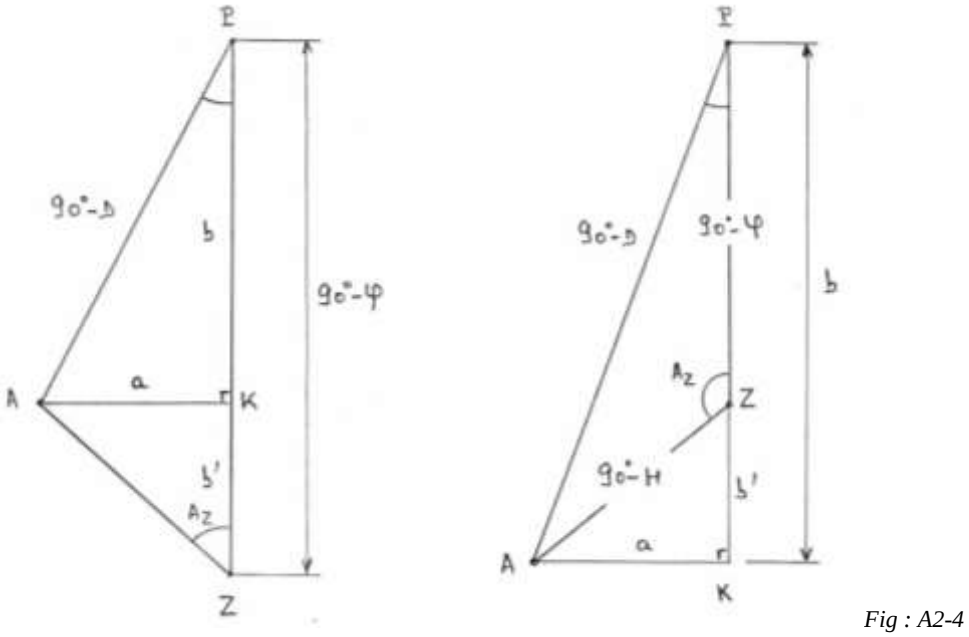


Fig : A2-4

Dans les deux cas de figure, la relation entre b, b' et la latitude φ peut s'écrire :

$$b' = |90° - (\varphi + b)|$$

Les formules de trigonométrie sphérique (règle du pentagone de Neper), appliquée aux deux triangles rectangles PKA et ZKA donnent :

$$\sin D = \cos a \,.\, \cos b \quad \text{et} \quad \sin P = \frac{\sin a}{\cos D} \quad ; \quad \sin H = \cos a \,.\, \cos b' \quad \text{et} \quad \sin A_z = \frac{\sin a}{\cos H}$$

Il est à remarquer que l'angle noté A_z représente l'azimut compté de 0° à 90° à partir du pôle du nom de la déclinaison de l'astre ou du pôle opposé, vers l'E ou vers l'W.

La procédure préliminaire du calcul est ensuite la suivante :

1) La hauteur mesurée au sextant est corrigée pour donner la hauteur vraie notée H dans ce qui suit.
2) Un almanach nautique donne, pour l'instant de l'observation, l'angle horaire de l'astre au méridien origine AHap et sa déclinaison D.
3) Les coordonnées du point estimé à l'instant de l'observation sont relevées sur la carte (ou le canevas de Mercator) : φ_e et G_e.
4) On calcule une valeur approchée de l'angle horaire local $AHag_e = AHap - G_e$ puis de l'angle au pôle P.

On fixe ensuite la latitude auxiliaire φ_a égale au nombre entier de degrés le plus voisin de la latitude estimée φ_e.

Il s'agit ensuite de trouver les arguments d'entrée dans la table, a et b, qui sont inconnus. Sir W. Thomson donne des règles précises mais compliquées pour y parvenir suite à un certain nombre de tâtonnements. Il parait plus clair (et surtout plus sûr) de calculer la valeur de a fixant la colonne dans laquelle devra s'effectuer la recherche. On a en effet, dans le triangle PAK :

$$\sin a = \sin P \,.\, \cos D$$

Cette formule est à rapprocher d'une formule de construction de la table : $\sin(co - hyp) = \cos a \,.\, \cos b$. On peut ainsi évaluer directement avec la table de Thomson, en entrant en colonne avec le complément de l'angle au pôle P (valeur entière la plus voisine de l'angle au pôle évalué ci-dessus) et en ligne avec la déclinaison D (valeur entière la plus voisine de la déclinaison considérée). On relève a dans la colonne co-hyp et on en retient la valeur entière la plus proche.

On recherche ensuite dans la table la colonne correspondant à la valeur entière de a ainsi déterminé.

1re recherche dans la colonne « a » :

On détermine un encadrement du couple connu (D, P) auquel correspond les lignes b et b + 1° et on interpole pour la valeur considérée de déclinaison. On obtient ainsi un angle au pôle auxiliaire P_a et la valeur de b correspondante b_a.

2e recherche dans la même colonne « a » :

Avec la latitude auxiliaire φ_a, et les valeurs de b et b + 1°, on évalue les valeurs correspondantes de b' et, pour ces valeurs, on recherche les deux couples (H, A_z). On effectue enfin l'interpolation entre ces deux couples pour la valeur b'_a correspondant à b_a (en pratique, l'interpolation est inutile pour A_z).

À l'issue de ces opérations, nous avons les résultats d'un calcul dont les éléments principaux d'entrée sont la latitude auxiliaire φ_a et la déclinaison donnée de l'astre D. Les résultats trouvés, après l'interpolation ci-dessus, sont :

- l'angle au pôle auxiliaire P_a donnant accès à l'angle horaire local auxiliaire $AHag_a$ (égal à P_a ou 360° - P_a suivant le cas),
- l'angle au zénith (azimut) A_z,
- la hauteur auxiliaire H_a.

La longitude auxiliaire G_a se déduit de l'angle horaire local auxiliaire : $G_a = AHap - AHag_a$. Ce dernier calcul permet de porter le point auxiliaire sur la carte (ou le canevas) pour tracer le lieu de position ; ses coordonnées sont φ_a et G_a. De ce point, l'astre serait observé à la hauteur auxiliaire calculée H_a. La hauteur mesurée, et corrigée, H, en est en général différente. Thomson indique alors de tracer la droite passant par le point auxiliaire, orientée perpendiculairement à la direction de l'astre puis de construire une droite parallèle, distante de la première de la

quantité ($H - H_a$), vers l'astre si cette quantité est positive, dans le sens opposé si elle est négative. Cette dernière droite est le lieu de position.

Exemple :

Les données de calcul sont rassemblées dans le tableau ci-dessous.

Estime		Coordonnées horaires		Observation	
φ_e	31° 12' N	AHvp	84° 54,0'	H	35° 10,0'
G_e	45° 18' W	D	8° 18,0' S		Soleil
AHvg = 39° 36,0' ; P = 39° 36,0' W					

On adopte comme latitude auxiliaire $\varphi_a = 31°$ N et la recherche préliminaire dans la table (ou par un calcul) donne a = 39°.

Recherche dans la table dont on donne un extrait ci-dessous :

b	a = 38°		a = 39°		a = 40°	
	co-hyp	A	co-hyp	A	co-hyp	A
...	...	...	...	...	...	...
40°	37° 08'	50° 33'	36 32'	51 33'	35° 56'	52° 33'
41°	36° 30'	49° 59'	35° 55'	50° 59'	35° 19'	51° 59'
42°	35° 51'	49° 25'	35° 17'	50° 26'	34° 42'	51° 26'
43°	35° 12'	48° 53'	34° 38'	49 54'	34° 04'	50° 54'
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
78°	9° 26'	38° 37'	9 18'	39 37'	9° 10'	40° 37'
79°	8° 39'	38° 31'	8° 32'	39° 31'	8° 24'	40° 31'
80°	7° 52'	38° 26'	7° 45'	39° 26'	7° 39'	40° 26'
81°	7° 05'	38° 21'	6 59'	39 21'	6° 53'	40° 21'
...	...	...	...	...	...	...

Compte tenu des valeurs d'angle au pôle estimé (P = 39° 36') et de déclinaison (D = 8° 18'), on trouve, dans la colonne a = 39°, un encadrement de b tel que $79° < b_a < 80°$; comme $b' = |90° - (\varphi + b)|$, l'encadrement correspondant est tel que $41° < b_a' < 42°$ (φ est négative dans ce cas de figure).

Interpolations :

On interpole linéairement pour D = 8° 18', entre les valeurs tabulées de 8° 32' et 7° 45', ce qui donne :

$$b_a = 79{,}2979° \text{ et } A = P_a = 39° 30'.$$

La valeur correspondante de b' est : $b_a' = 90° - \varphi_a - b_a = 41{,}7021°$. L'interpolation, pour cette valeur de b_a', entre les deux lignes supérieures donne la hauteur auxiliaire :

$$\text{co-hyp} = H_a = 35° 28'.$$

L'angle en Z est déterminé à vue: $A_z = 50{,}5°$.

Déterminations :

Compte tenu des calculs préliminaires (P_e = 39° 36' W), l'angle au pôle auxiliaire est P_a = 39° 30' W et l'angle horaire local correspondant $AHvg_a$ = 39° 30'.

L'azimut est compté à partir du Sud (D est Sud), vers l'W ; on a donc $Z_a = 180° + 50,5° = 230,5°$.

Coordonnées du point auxiliaire :

- latitude : $\varphi_a = 31°$ N,
- longitude : $G_a = AHvp - AHvg_a = 84°\ 54,0' - 39°\ 30' = 45°\ 24'$ W.

Point déterminatif :

Il est situé dans le 230,5° du point auxiliaire à $(H - H_a) = -18$ milles (ou dans le 50,5° à + 18').

La construction de la droite de hauteur à partir du point auxiliaire A est indiquée sur la figure A2-5 ci-dessous. On y a également représenté la droite résultant des mêmes données d'observation mais calculée à partir du point estimé E selon la méthode Marcq de Saint-Hilaire et par la formule fondamentale (l'intercept est de -6,0' et l'azimut calculé est identique). On note, dans ce cas, un écart d'environ une demi-minute entre les deux droites.

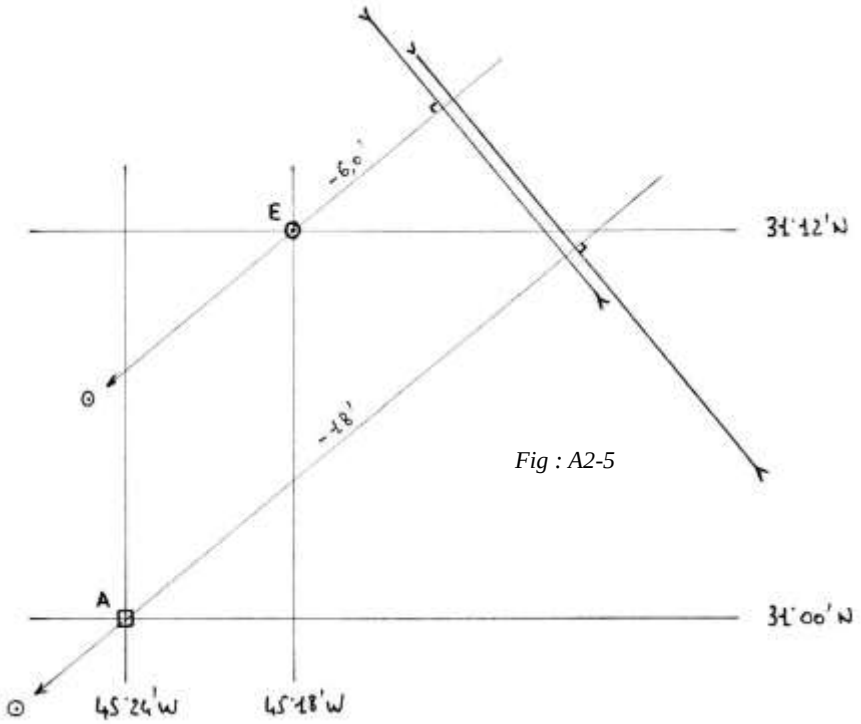


Fig : A2-5

ANNEXE 2-6

TABLES de SOUILLAGOUËT

Formulation des tables I et II :

Les tables I et II sont conçues pour calculer la hauteur de l'astre à partir d'une décomposition du triangle de position en deux triangles rectangles selon la hauteur issue du zénith. Les formules utilisées, (8) et (8'), ont été établies en annexe 1-1 ; on les rappelle ci-dessous :

$$\tan\beta = \cot\varphi \,.\, \cos P \quad (8) \quad , \quad \sin H = \frac{\cos(\delta - \beta) \,.\, \sin\varphi}{\cos\beta} \quad (8')$$

Dans ces expressions, β désigne l'arc auxiliaire défini en annexe 1-1, les autres symboles ayant leur signification usuelle.

Les tables I et II, à double argument, donnent, en fonction de l'angle au pôle P et de la latitude φ, l'arc β et le logarithme de sinφ/cosβ ; ces quantités sont respectivement exprimées à 5'' près et avec 5 décimales.

La hauteur est ensuite calculée, après détermination de l'arc (δ − β) conformément aux dispositions du tableau figurant en annexe 1-1 par un calcul logarithmique de la forme :

$$\log\sin H = \log\frac{\sin\varphi}{\cos\beta} + \log\cos(\delta - \beta)$$

Ce dernier calcul fait appel à une table des logarithmes des rapports trigonométriques à 5 décimales au moins.

Les tables I et II sont identiques dans leur conception et ne diffèrent que par l'intervalle d'argumentation. En table I, cet intervalle est de 1 minute d'heure pour l'angle au pôle et 15' pour la latitude, l'angle au pôle étant compris entre 0 et 3 h et 9 h et 12 h ; en table II, l'intervalle est élargi respectivement à 2 minutes et 30', l'angle au pôle étant alors compris entre 3 h et 9 h (45° et 135°).

Les coordonnées du point auxiliaire à partir duquel sera calculé l'intercept correspondent directement aux arguments d'entrée dans la table. La latitude auxiliaire sera l'argument d'entrée en colonne le plus proche de la latitude estimée et la longitude auxiliaire sera telle que l'argument d'entrée en ligne soit le plus proche de l'angle au pôle estimé.

Ainsi, les coordonnées du point auxiliaire, φ_a et G_a, sont les plus proches des coordonnées du point estimé, φ_e et G_e, conduisant aux arguments d'entrée de la table. Si on note Δφ et ΔG les valeurs des différences entre latitudes et longitudes estimées et auxiliaires, la distance m entre points estimé et auxiliaire a pour expression :

$$m = \sqrt{(\Delta\varphi)^2 + (\Delta G \cos\varphi_m)^2}$$

φ_m désigne la latitude moyenne entre φ_e et φ_a. Dans le cas de l'utilisation des tables de Souillagouët, Δφ et ΔG ont pour valeurs maximales 7,5' (table I) et 15' (tables II). La distance m ne saurait donc excéder 10,6 milles dans le premier cas et 21,2 milles dans le second.

Formulation de la table III :

La table III est conçue pour calculer l'azimut de l'astre, ainsi qu'une valeur approchée de sa hauteur, à partir d'une décomposition du triangle de position en deux triangles rectangles selon la hauteur issue de l'astre. Avec la symbolisation définie en annexe 1-1, les formules utilisées sont les suivantes :

$$\tan\alpha = \cot D \,.\cos P \quad (5)\ , \quad \sin a = \cos D \,.\sin P\ ,$$

$$\cot A_{zq} = \tan Ampl = \cos(\varphi + \alpha)\,.\cot a\ , \qquad \sin H = \cos a\,.\sin(\varphi + \alpha)$$

Les deux premières relations permettent de calculer les arcs auxiliaires a et α, puis, les suivantes, utilisant les mêmes expressions trigonométriques, donnent accès à l'amplitude (complément de l'azimut par quadrant A_{zq}) et la hauteur.

La table III est à double argument, l'argument d'entrée en colonne (D puis a) variant de 0° à 90°, l'argument d'entrée en ligne (P puis φ + α) variant de 0 à 12 h ou 0° à 180°. L'intervalle d'argumentation de 30' est le même pour les deux entrées, sur toute l'étendue de la table. Les éléments calculés (a et α puis Ampl et H) sont exprimés à la minute d'arc près.

La table III a été essentiellement conçue pour le calcul de l'azimut et la vérification du calcul de la hauteur ; elle peut aussi servir à résoudre plusieurs autres problèmes courants de navigation : lever et coucher d'un astre, circonstances favorables au calcul d'heure, navigation par l'arc de grand cercle et identification d'un astre. En fixant judicieusement le point auxiliaire et à l'aide d'interpolations, il est également possible d'effectuer l'ensemble du calcul des éléments de la droite de hauteur à l'aide de la seule table III (interpolation de Leblanc).

Exemple :

Les données de calcul sont rassemblées dans le tableau ci-dessous.

Estime		Coordonnées horaires		Observation	
φ_e	37° 10' S	AHvp	234° 34,0'	H_v	25° 00,0'
G_e	75° 39' E	D	8° 25,0' N	Soleil	
$AHvg_e$ = 310° 13,0'; P_e = 49° 47,0' E					

L'angle au pôle étant supérieur à 45° (3 heures), on doit utiliser la table II et considérer un angle au pôle auxiliaire P_a arrondi aux 30' rondes les plus proches soit P_a = 50° 00,0' E = 3 h 20 m 00 s E (soit $AHvg_a$ = 310°)

Dans ces conditions, la longitude du point auxiliaire est $G_a = AHvp - AHvg_a$ = 75° 26,0' E.

La latitude du point auxiliaire (noté S) arrondie aux 30' rondes les plus proches de la latitude estimée est φ_a = 37° 00,0' S.

L'extrait pertinent de la table II est reproduit ci-dessous :

P	36° 00'		36° 30'		37° 00'		37° 30'		P
	β	Log	β	Log	β	Log	β	Log	
3h00m	44°13'25''	$\bar{1},91392$	43°42'00''	$\bar{1},91527$	43°10'45''	$\bar{1},91660$	42°39'40''	$\bar{1},91793$	9h00m
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
3h18m	41°47'35''	$\bar{1},89673$	41°16'20''	$\bar{1},89841$	40°45'20''	$\bar{1},90008$	40°14'40''	$\bar{1},90174$	9h42m
3h20m	41°30'00''	$\bar{1},89476$	40°58'50''	$\bar{1},89648$	40°27'50''	$\bar{1},89819$	39°57'10''	$\bar{1},89989$	9h40m
3h22m	41°12'10''	$\bar{1},89277$	40°41'00''	$\bar{1},89453$	40°10'00''	$\bar{1},89629$	39°39'30''	$\bar{1},89802$	9h38m
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

La table donne, pour P_a = 3 h 20 m et φ_a = 37° 00' S, les valeurs de β et de $\log(\sin\varphi_a/\cos\beta)$. Le calcul se décline ensuite ainsi :

β =	40° 27,8’	$\log(\sin\varphi_a/\cos\beta)$ =	$\bar{1},89819$	
δ =	98° 25,0’			
δ – β =	57° 57,2’	$\log\cos(\delta-\beta)$ =	$\bar{1},72478$	H_v = 25° 00,0’
		$\log\sin H_a$ =	$\bar{1},62297$	H_a = 24° 49,1’
				$H_v - H_a$ = + 10,9’

Pour le calcul de l’azimut, le premier extrait nécessaire de la table III est reproduit ci-dessous :

P	**Z**	**7° 30’**		**8° 00’**		**8° 30’**		**9° 00’**		**9° 30’**		**Z**	**P**
		82° 30’		82° 00’		81° 30’		81° 00’		80° 30’			
		α	a	α	a	α	a	α	a	α	a		
2h00	30°00	81°21	29°43	80°47	29°41	80°12	29°38	79°38	29°36	79°04	29°33	150°00	10h00
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
3h18	49°30	78°32	48°56	77°47	48°51	77°02	48°46	76°18	48°41	75°33	48°35	130°30	8h42
3h20	50°00	78°25	49°25	77°40	49°20	76°55	49°15	76°09	49°10	75°24	49°04	130°00	8h40
3h22	50°30	78°18	49°54	77°32	49°50	76°47	49°44	76°01	49°39	75°16	49°33	129°30	8h38
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
4h00	60°00	75°15	59°10	74°18	59°03	73°21	58°56	72°25	58°48	71°30	58°40	120°00	8h00

Entrant dans la table avec une déclinaison de 8° 25’ et un angle au pôle de 3h 20m, on trouve, après interpolation entre 8° et 8° 30’ : α = 77° 02,5’ et a = 49° 15,8’ ≈ 49,3°.

Etant donné que latitude et déclinaison sont de noms contraires, la détermination correcte de l’arc α est le supplément de la valeur trouvée ci-dessus (voir la configuration des triangles et le tableau de l’annexe 1-1), soit 102° 57,5’.

On entre donc à nouveau dans la table III avec a = 49,3° en argument horizontal (entrée colonne) et φ + α = 139° 57,5’ (soit 140°) en argument vertical (entrée ligne, à droite). L’extrait utile de la table III donne :

P	**Z** φ + α	**47° 30’**		**48° 00’**		**48° 30’**		**49° 00’**		**49° 30’**		**Z** φ + α	**P**
		42° 30’		42° 00’		41° 30’		41° 00’		40° 30’			
		Ampl	H	Ampl	H	Ampl	H	Ampl	H	Ampl	H		
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
2h40	40°00	35°04	25°44	34°36	25°28	34°08	25°12	33°40	24°56	33°12	24°40	140°00	9h20
2h42	40°30	34°52	26°01	34°24	25°45	33°56	25°29	33°28	25°13	33°00	24°57	140°30	9h18
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

On obtient, comme valeur de l’amplitude, arrondie au demi-degré, colonne α : Ampl = 33,5°. Cette amplitude est Est puisque l’angle horaire local est supérieur à 180° et Nord, du nom de la déclinaison dans ce cas. On a donc Ampl = E33,5°N, soit un azimut au N56,5°E ou 056,5°.

En colonne a, on trouve la valeur approchée de la hauteur, comprise entre 24°56’ et 24°40’.

L'interpolation de Leblanc :

Elle consiste à n'utiliser que la table III pour trouver les éléments de la droite de hauteur en choisissant un point auxiliaire permettant les deux entrées successives directement en ligne. On interpole ensuite soigneusement entre colonnes. Toujours sur la base du même exemple, on adopte un angle au pôle auxiliaire P_a = 3h 20m, ce qui correspond, au même instant, à une longitude auxiliaire G_a = 75° 26' E ; on a déterminé au paragraphe précédent a = 49° 15,8' et α = 102° 57,5'.

On adopte ensuite une latitude auxiliaire φ'_a = 37° 02,5' N, ce qui conduit à une valeur entière de φ'_a + α de 140°. On interpole alors pour la valeur a = 49° 15,8' entre les colonnes 49° et 49° 30' pour obtenir la hauteur, soit H_a = 24° 47,6' que l'on arrondira à 24° 48'.

L'intercept est alors de $H_v - H_a$ = + 12' à partir du point auxiliaire qui vient d'être défini.

Après avoir effectué un calcul par rapport au point estimé, on a regroupé ci-dessous les différents résultats :

Point de calcul	Latitude	Longitude	Intercept	Azimut
Estimé (E)	37° 10,0' S	075° 39,0' E	+ 7,8'	056,5°
Souillagouët (S)	37° 00,0' S	075° 26,0' E	+ 10,9'	056,5°
Leblanc (L)	37° 02,5' S	075° 26,0' E	+ 12'	056,5°

Le graphique du calcul est représenté en figure A2-6.

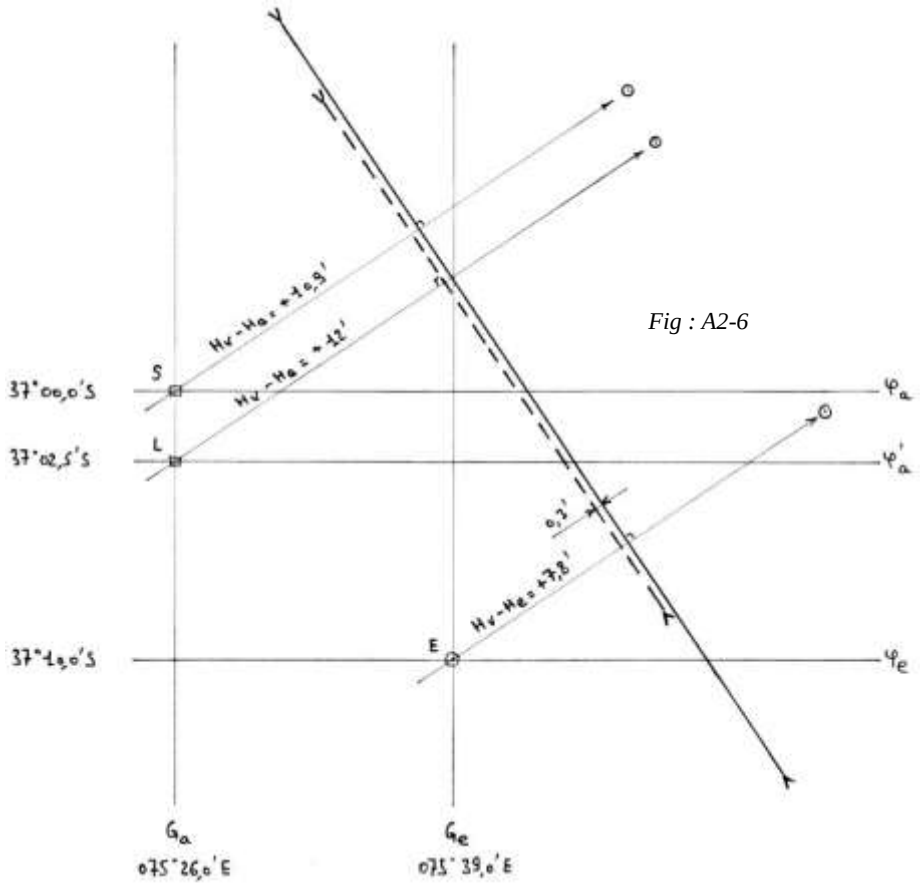


Fig : A2-6

ANNEXE 3-1

TABLES de POCHE

Les fonctions λ et coλ :

x étant un nombre réel quelconque, soit la fonction T définie par $T(x) = \tan(45° + x/2)$. Cette fonction est définie pour tout x différent de 90° + k.180° (k entier relatif).

Considérons maintenant la fonction $T(90° - x) = \tan(90° - x/2) = \cot x/2$. Cette fonction est définie pour tout x différent de k.180° ; elle est notée coT(x).

À partir des expressions de définition, et pour x quelconque, on établit algébriquement que les fonctions T(x) et coT(x) vérifient les résultats résumés dans le tableau ci-dessous :

x	-x	90° - x	90° + x	180° - x	180° + x
T(x)	1/T(x)	coT(x)	-coT(x)	-T(x)	-1/T(x)
coT(x)	-coT(x)	T(x)	1/T(x)	1/coT(x)	-1/coT(x)

Les expressions de définition permettent de vérifier les deux identités fondamentales suivantes :

$$T(x) = \frac{coT(x) + 1}{coT(x) - 1} \quad \text{et} \quad coT(x) = \frac{T(x) + 1}{T(x) - 1}$$

Elles serviront notamment à déterminer directement T(x) connaissant coT(x) et réciproquement sans passer par le calcul de l'argument x.

On considère maintenant un réel φ appartenant à l'intervalle $[0°, 90°[$ et la fonction λ(φ) telle que :

$$\lambda(\varphi) = \frac{10800}{\pi} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi}$$

dont l'expression est, après intégration :

$$\lambda(\varphi) = \frac{10800}{\pi} . \ln \tan \left(45° + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{10800}{\pi} . \ln T(\varphi)$$

et on pose :

$$co\lambda(\varphi) = \frac{10800}{\pi} . \ln \cot \frac{\varphi}{2} = \frac{10800}{\pi} . \ln coT(\varphi)$$

ln désignant le logarithme népérien, les fonctions λ et coλ sont appelées latitude et colatitude croissantes. Pour une latitude φ donnée, positive, λ(φ) représente sur la carte de Mercator, la distance, en minutes d'équateur et à l'échelle de la carte, entre les images de l'équateur et du parallèle de latitude φ.

Méthode du parallèle estimé (Lalande) :

Le triangle de position PZA de l'astre à l'instant de l'observation est ici construit à partir du pôle de l'hémisphère dans lequel se trouve l'astre (par raccourci : pôle de l'astre). Z est le point déterminatif cherché, situé sur le parallèle estimé de l'observateur. Les éléments connus sont les trois côtés : PZ, PA et ZA, compléments respectifs de la

latitude φ, de la déclinaison D et de la hauteur H, celle-ci représentant ici la hauteur vraie de l'astre résultant de la mesure à l'instant considéré. Dans ce qui suit, on utilisera la distance zénithale ξ = 90° - H. Les éléments inconnus sont l'angle au pôle P de l'astre d'où l'on déduira la longitude du point déterminatif et l'azimut Z de l'astre permettant de tracer la droite de hauteur de part et d'autre du point déterminatif.

Pour faire apparaître les fonctions T et coT, il convient d'utiliser les formules établies par Borda ; appliquées au triangle de position, ces formules donnent :

$$\left(\cot\frac{P}{2}\right)^2 = \frac{\cos\left(\frac{\varphi + D - \xi}{2}\right).\cos\left(\frac{\varphi + D + \xi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{D + \xi - \varphi}{2}\right).\sin\left(\frac{\varphi - D + \xi}{2}\right)} = coT^2(P)$$

$$\left(\cot\frac{A_z}{2}\right)^2 = \frac{\sin\left(\frac{D + \xi - \varphi}{2}\right).\cos\left(\frac{\varphi + D - \xi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{D + \xi + \varphi}{2}\right).\sin\left(\frac{\varphi - D + \xi}{2}\right)} = coT^2(A_z)$$

On pose ensuite :

$$\cot\frac{c_1}{2} = coT(c_1) = \frac{\cos\left(\frac{\varphi + D - \xi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi - D + \xi}{2}\right)} \quad \text{et} \quad \cot\frac{c_2}{2} = coT(c_2) = \frac{\cos\left(\frac{\varphi + D + \xi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{D + \xi - \varphi}{2}\right)}$$

On a donc :

$$coT^2(P) = coT(c_1).coT(c_2) \quad \text{et} \quad coT^2(A_z) = \frac{coT(c_1)}{coT(c_2)} \quad (1)$$

Après avoir remplacé $coT(c_1)$ et $coT(c_2)$ par leurs expressions, développement, transformation puis simplification, on arrive à :

$$T(c_1) = \frac{\tan\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right)}{\tan\left(45° + \frac{D - \xi}{2}\right)} \quad \text{et} \quad T(c_2) = \frac{\tan\left(45° + \frac{D + \xi}{2}\right)}{\tan\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right)}$$

Ce que l'on écrira finalement :

$$T(c_1) = \frac{T(\varphi)}{T(D - \xi)} \quad \text{et} \quad T(c_2) = \frac{T(D + \xi)}{T(\varphi)} \quad (2)$$

Nous venons donc d'établir qu'il est possible de calculer l'angle au pôle et l'azimut de l'astre à l'instant de l'observation en utilisant exclusivement les fonctions T et coT. Il convient maintenant de passer à la résolution du problème avec les fonctions λ et coλ en retenant que l'argument d'entrée dans les tables de latitude croissante est nécessairement positif et compris entre 0° et 90°.

Rappelons que :

- la déclinaison est toujours positive, de même que la distance zénithale ξ,
- la latitude est positive si elle est du nom de la déclinaison, négative dans le cas contraire.

Supposons tout d'abord que latitude et déclinaison soient de même nom, que (D – ξ) soit positif et que (D + ξ) soit inférieur à 90°. En passant aux logarithmes népériens puis aux fonctions λ et coλ, les équations (2) deviennent :

$$\lambda(c_1) = \lambda(\varphi) - \lambda(D - \xi) \quad \text{et} \quad \lambda(c_2) = \lambda(D + \xi) - \lambda(\varphi)$$

Si la table fournit, pour chaque valeur de l'argument, les valeurs correspondantes des fonctions λ et coλ, nous avons par simple correspondance les valeurs de $co\lambda(c_1)$ et de $co\lambda(c_2)$. De même, en passant aux logarithmes puis aux fonctions coλ, les équations (1) s'écrivent :

$$2.\text{co}\lambda(\text{P}) = \text{co}\lambda(\text{c}_1) + \text{co}\lambda(\text{c}_2) \quad \text{et} \quad 2.\text{co}\lambda(\text{A}_z) = \text{co}\lambda(\text{c}_1) - \text{co}\lambda(\text{c}_2)$$

On extraira P et A_z directement de ces deux équations, en retenant que l'azimut est compté à partir du pôle de l'astre.

Le cas que l'on vient de traiter est particulier ; il convient d'établir une règle générale de calcul basée sur les propriétés des fonctions T et coT et λ et coλ. Indiquons tout d'abord que :

- si la latitude est de nom contraire à D, on écrira : $\lambda(\varphi) = -\lambda|\varphi|$;
- si (D – ξ) est négatif, on écrira : $\lambda(\text{D} - \xi) = -\lambda|\text{D} - \xi|$;
- si (D + ξ) est supérieur à 90°, on recherchera la latitude croissante de son supplément 180° - (D + ξ).

On peut alors construire le tableau suivant :

φ et D	$\lambda(\text{c}_1)$		$\lambda(\text{c}'_2) = \lambda(\text{c}_2)$ ou $\lambda(180° - \text{c}_2)$	
	$\text{D} - \xi > 0$	$\text{D} - \xi < 0$	$\text{D} + \xi < 90°$	$\text{D} + \xi > 90°$
mêmes noms	$\lambda(\varphi) - \lambda(\text{D} - \xi)$	$\lambda(\varphi) + \lambda\|\text{D} - \xi\|$	$\lambda(\text{D} + \xi) - \lambda(\varphi)$	$\lambda[180° - (\text{D} + \xi)] - \lambda(\varphi)$
noms contr.	s.o.	$-\lambda\|\varphi\| + \lambda\|\text{D} - \xi\|$	$\lambda(\text{D} + \xi) + \lambda\|\varphi\|$	$\lambda[180° - (\text{D} + \xi)] + \lambda\|\varphi\|$

Selon les valeurs de (D – ξ) et de (D + ξ), on calcule respectivement les quantités $\lambda(c_1)$ et $\lambda(c'_2)$ conformément aux dispositions du tableau et on détermine, à l'aide de la table, les coλ correspondants puis on effectue la somme et la différence :

$$\text{S} = \text{co}\lambda(\text{c}_1) + \text{co}\lambda(\text{c}'_2) \qquad \Delta = \text{co}\lambda(\text{c}_1) - \text{co}\lambda(\text{c}'_2)$$

On pose ensuite :

$$\text{S} = 2.\text{co}\lambda(\text{u}) \ , \ \Delta = 2.\text{co}\lambda(\text{v}) \ \text{ si } \Delta > 0 \text{ ou } |\Delta| = 2.\text{co}\lambda(180° - \text{v}) \text{ si } \Delta < 0$$

En effet, une différence Δ négative implique un $\text{co}\lambda(\text{v}) < 0$ donc une $\cot(\text{v}/2) < 1$ d'où un angle v supérieur à 90°. L'argumentation de la table étant limitée à 90°, on extrait le supplément (180° - v) en entrant avec la valeur absolue de Δ.

Si (D + ξ) est inférieur à 90°, on pourra écrire que $\lambda(c_2) = \lambda(c'_2)$, conformément à la définition de c_2 et on a : $\text{S} = \text{co}\lambda(c_1) + \text{co}\lambda(c_2) = 2.\text{co}\lambda(\text{P})$ et $\Delta = \text{co}\lambda(c_1) - \text{co}\lambda(c_2) = 2.\text{co}\lambda(\text{A}_z)$.

On a donc, dans ce cas, u = P et $v = A_z$.

Si (D + ξ) est supérieur à 90°, nous avons un $\text{T}(c_2)$ négatif égal à $-\text{T}(c'_2) = -\text{T}(180° - c_2)$. L'analyse, à l'aide du tableau des relations entre arcs supplémentaires montre que :

$$\ln \text{coT}(\text{c}'_2) = -\ln \text{coT}(\text{c}_2)$$

On a donc :

$$\text{S} = \text{co}\lambda(\text{c}_1) + \text{co}\lambda(\text{c}_2) = 2\text{co}\lambda(\text{u}) \qquad \Delta = \text{co}\lambda(\text{c}_1) - \text{co}\lambda(\text{c}_2) = 2\text{co}\lambda(\text{v})$$

Dans ce cas, nous avons alors : $u = A_z$ et v = P.

En résumé :

$co\lambda(c_1) + co\lambda(c'_2)$	$S = 2.co\lambda(u)$
$co\lambda(c_1) - co\lambda(c'_2) > 0$	$\Delta = 2.co\lambda(v)$; $v < 90°$
$co\lambda(c_1) - co\lambda(c'_2) < 0$	$\lvert\Delta\rvert = 2.co\lambda(180° - v); v > 90°$
$D + \xi < 90°$	P = u et A_z = v
$D + \xi > 90°$	P = v et A_z = u
L'azimut A_z est toujours compté à parti du nom du pôle de l'astre	

Exemple :

L'exemple ci-après illustre le calcul de l'angle au pôle P et de l'azimut A_z de l'astre à partir des données qui sont : la latitude estimée, simplement notée φ ici, la déclinaison D de l'astre et sa hauteur vraie H_v. Il ne sera pas discuté ici du caractère E ou W de l'observation (connu au moment de l'observation) et du calcul de longitude qui nécessite la donnée supplémentaire de l'angle horaire de l'astre au premier méridien à l'instant de l'observation. Les extraits de table nécessaires n'ont pas été reproduits mais les exemples peuvent facilement être simulés à l'aide d'une calculatrice ou traités avec une table de Friocourt.

Données	φ = 17° 19,0' N	D = 22° 52,0' N	H_v = 10° 15,4'

ξ =	79° 44,6'			λ(φ) =	1055,2
D + ξ =	102° 36,6'	supp =	77° 23,4'	λ(180 - (D + ξ)) =	7572,8
D – ξ =	- 56° 52,6'			$\lambda\lvert D - \xi\rvert$ =	4169,1
$co\lambda(c_1)$ =	1528,9	← ←	← ←	← ← $\lambda(c_1)$ =	5224,3
$co\lambda(c'_2)$=	1040,5	← ←	← ←	← ← $\lambda(c'_2)$ =	6517,6
S =	2569,4	u =	69° 04,2'		
Δ =	488,4	v =	85° 56,0'		
		P = 85° 56,0' A_z = N 69°			

(D + ξ) est ici supérieur à 90° ; on a donc P = v et A_z = u.

Méthode du méridien estimé (Borda) :

Le tracé de la droite de hauteur n'est pratiquement applicable par la méthode du parallèle estimé que lorsque l'azimut de l'astre est compris entre 30° et 150° puis 210° et 330°. Dans les autres cas, il faut recourir à la méthode du méridien estimé. Les Tables de Poche permettent aussi de résoudre le problème dont les données sont ici :

- l'angle au pôle estimé de l'astre P, déduit de l'instant de l'observation et de la longitude estimée,
- la déclinaison D de l'astre,
- la hauteur vraie H, donc la distance zénithale de l'astre ξ = 90° - H.

Les inconnues à déterminer sont l'azimut A_z de l'astre et la latitude φ du point déterminatif.

Pour expliciter la méthode, nous nous placerons dans l'hypothèse où (D + ξ) est inférieur à 90°.

Calcul de l'azimut A_z :

L'analogie des sinus appliquée au triangle de position de l'astre donne :

$$\frac{\sin A_z}{\sin P} = \frac{\csc P}{\csc A_z} = \frac{\cos D}{\sin \xi}$$

On a donc :

$$\csc A_z = \csc P \,.\, \frac{\sin \xi}{\cos D}$$

Soit sous forme logarithmique et multiplié par le facteur 10800/π :

$$\frac{10800}{\pi} . \ln \csc A_z = \frac{10800}{\pi} . \ln \csc P - \frac{10800}{\pi} . \ln \frac{\cos D}{\sin \xi} = co\lambda(Y) - co\lambda(X)$$

A partir des valeurs connues de D et de ξ, on établit :

$$coT(X) = \frac{\cos D}{\sin \xi} = \frac{\frac{T(D+\xi)}{T(D-\xi)} + 1}{\frac{T(D+\xi)}{T(D-\xi)} - 1}$$

Compte tenu de l'identité fondamentale, si l'on sait déterminer les latitudes croissantes de (D + ξ) et de (D – ξ), on obtiendra, après soustraction des deux quantités, la colatitude croissante relative au rapport cherché :

$$\lambda(X) = \lambda(D + \xi) - \lambda(D - \xi)$$

D'où, en examinant la table coλ(X), et par conséquent la quantité :

$$co\lambda(X) = \frac{10800}{\pi} . \ln \frac{\cos D}{\sin \xi}$$

On établit ensuite :

$$\csc P = \frac{T^2(P) + 1}{T^2(P) - 1}$$

On a de même, en examinant la table en regard de 2.λ(P) :

$$co\lambda(Y) = \frac{10800}{\pi} . \ln \csc P$$

On arrive donc à :

$$\frac{10800}{\pi} . \ln \csc A_z = co\lambda(Y) - co\lambda(X)$$

Comme :

$$T^2(Az) = \frac{\csc A_z + 1}{\csc A_z - 1}$$

La colatitude croissante correspondant à $(10800/\pi) . \ln \csc A_z$ est égale à 2.λ(A_z) d'où l'on extraira l'azimut A_z (on notera également coλ(A_z) nécessaire à la suite du calcul).

Remarque : l'angle d'azimut qui est extrait ici est compris entre 0° et 90° ; l'azimut est donc ici compté à partir du N ou du S, vers l'E ou vers l'W. Il n'y a pas d'ambiguïté de détermination en pratique si on prend soin de relever

l'astre, même sommairement. Dans la résolution de la suite du problème (calcul de la latitude), l'azimut est à compter de 0° à 180° à partir du pôle de l'astre.

Calcul de la latitude φ :

On avait établi précédemment, dans le cas où (D + ξ) < 90° :

$$2.\mathrm{co}\lambda(\mathrm{P}) = \mathrm{co}\lambda(\mathrm{c_1}) + \mathrm{co}\lambda(\mathrm{c_2}) \quad \text{et} \quad 2.\mathrm{co}\lambda(\mathrm{A_z}) = \mathrm{co}\lambda(\mathrm{c_1}) - \mathrm{co}\lambda(\mathrm{c_2})$$

En faisant la somme des deux relations, on obtient :

$$\mathrm{co}\lambda(\mathrm{c_1}) = \mathrm{co}\lambda(\mathrm{P}) + \mathrm{co}\lambda(\mathrm{A_z})$$

P et A_z étant connus, $\mathrm{co}\lambda(c_1)$ peut donc se déterminer facilement, de même que, par correspondance dans la table, $\lambda(c_1)$. On a ensuite :

$$\lambda(\mathrm{c_1}) = \lambda(\varphi) - \lambda(\mathrm{D} - \xi) \quad \text{soit} \quad \lambda(\varphi) = \lambda(\mathrm{D} - \xi) + \lambda(\mathrm{c_1})$$

d'où l'on déduira la latitude φ.

Exemple :

Les extraits des « Tables de Poche » nécessaires n'ont pas été reproduits mais cet exemple peut facilement être simulé à l'aide d'une calculette ou traité avec la table VI de Friocourt (latitudes croissantes).

Données	P = 15° 30,0' E	D = 15° 24,0' N	H_v = 57° 30,0'	φ_e = 45° 00' N

$\lambda(D+\xi)$ =	3282,6	$\lambda(P)$ =	941,6		
$+\lambda\lvert D-\xi\rvert$ =	1041,6	$2\lambda(P)$ =	1883,1	$\mathrm{co}\lambda(Y)$ =	4536,5
$\lambda(X)$ =	4324,2	→ →	→ →	$-\mathrm{co}\lambda(X)$ =	-2009,8
		$2\lambda(A_z)$ =	3591,4	← ←	2526,7
		$\lambda(A_z)$ =	1795,7	$\mathrm{co}\lambda(A_z)$ =	-4692,3
		A_z =	**151,3°**	$+\mathrm{co}\lambda(P)$ =	6856,3
$\lambda(c_1)$ =	4085,1	← ←	← ←	$\mathrm{co}\lambda(c_1)$ =	2164,0
$-\lambda\lvert D-\xi\rvert$ =	-1041,6				
$\lambda(\varphi)$ =	3043,5	**φ =**	**45° 09,7' N**		

Avec $\lambda(A_z)$ = 1795,7, la table donne A_z = S28,653° E, soit, à partir du N, A_z = N151,347°E, valeur qu'il convient de retenir pour poursuivre le calcul. Cette valeur, supérieure à 90°, implique un $\mathrm{co}\lambda(A_z)$ négatif.

ANNEXE 3-2

NOUVELLES TABLES de NAVIGATION

Principe du calcul des éléments de la droite de hauteur :

Les coordonnées de la position estimée du navire étant φ_e et G_e, on observe, à un instant donné, un astre A. On note H la hauteur vraie résultant de la mesure au sextant ; $\xi = 90° - H$ est la distance zénithale correspondante, D, la déclinaison de l'astre et P_e son angle au pôle estimé.

De même qu'avec les « Tables de Poche », le triangle de position est construit à partir du pôle de l'hémisphère dans lequel se trouve l'astre : la déclinaison D est donc toujours positive. Le raisonnement est conduit dans le cas où :

- latitude et déclinaison sont de même nom (donc $\varphi_e > 0$),
- $H > D$, la courbe de hauteur correspondante est alors dite de 1re espèce (le raisonnement est identique dans le cas de courbes de 2e et de 3e espèce).

La figure A3-1 ci-après représente la courbe de hauteur relative à l'observation, notée (C), dont les parallèles limites ont pour latitude $(D + \xi) = 90° + D - H$ et $(D - \xi) = D + H - 90°$; A est la projection terrestre de l'astre et E la position estimée ; Z' est le point déterminatif Marcq de Saint-Hilaire à partir duquel on tracera la droite de hauteur, tangente à la courbe. EZ' est un arc du vertical estimé, confondu ici avec sa tangente issue du point E. ω est le centre de symétrie de la courbe qui est inscrite dans un fuseau dont le demi-angle d'ouverture est noté g_m.

Toute courbe de hauteur inscrite dans ce fuseau est superposable à la courbe (C), notamment celle qui en serait déduite par translation verticale telle que le point E ait pour transformé le point E_0 situé sur l'équateur ; cette courbe translatée, notée (C_0), est dite réduite à l'équateur et correspond à l'observation, fictive, d'un astre dont la projection terrestre est A_0, de déclinaison D_0, à la hauteur H_0. Le calcul des éléments de la droite correspondante à partir du point E_0 est particulièrement simple puisque la latitude de calcul est nulle. On aura, à partir de la formule fondamentale donnant la hauteur et de la formule des cotangentes donnant l'azimut, dans le triangle de position de l'astre fictif A_0, et en posant $\varphi_0 = 0°$:

$$\sin H_{e0} = \cos D_0 . \cos P_e \quad \text{et} \quad \cot A_{ze0} = \frac{\tan D_0}{\sin P_e}$$

Dans la translation, le vecteur $\overrightarrow{EZ'}$ est resté invariant et on a $\overrightarrow{EZ'} = \overrightarrow{E_0 Z'_0}$ dont la valeur algébrique est égale à $H_0 - He_0$, en minutes d'arc de l'équateur de la carte supposée prolongée jusqu'à ce grand cercle, c'est-à-dire des minutes d'arc du parallèle local de la carte. L'intercept final, à reporter à partir du point estimé réel, en minutes de latitude à la latitude locale, est égal à :

$$(H_0 - H_{e0}) . \cos \varphi_e = H - H_e$$

Pour résoudre complètement le problème, il reste à déterminer H_0 et D_0.

Sur la carte marine, on a, en raisonnant sur la figure A3-1 et en utilisant les notations λ et coλ définies dans l'étude des Tables de Poche :

$$QC = co\lambda(H - D) \ , \ QC' = -co\lambda(H + D) \ , \ QF = \lambda(\varphi_e)$$

d'où l'on déduit :

$$FC = QC - QF = co\lambda(H - D) - \lambda(\varphi_e) \ , \ FC' = QC' - QF = -co\lambda(H + D) - \lambda(\varphi_e)$$

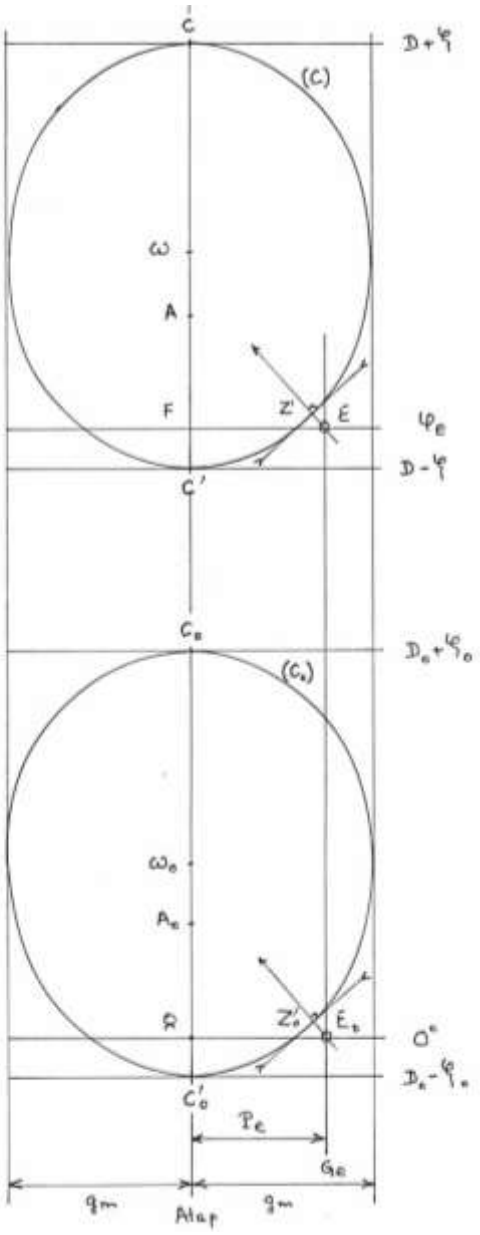


Fig : A3-1

La propriété de superposition implique :

$$QC_0 = FC \quad \text{et} \quad QC'_0 = FC'$$

ce qui donne :

$$co\lambda(H_0 - D_0) = co\lambda(H - D) - \lambda(\varphi_e) \quad \text{et} \quad co\lambda(H_0 + D_0) = co\lambda(H + D) + \lambda(\varphi_e)$$

Ces deux relations permettent de calculer la somme et la différence de H_0 et de D_0 d'où on déduira leurs valeurs respectives.

Les Nouvelles Tables de Navigation d'Émile Guyou permettent de calculer :

1) H_0 et D_0 en fonction de la latitude et de (H + D) et (H – D),
2) H_{e0} et A_{ze0} en fonction de P_e et de D_0.

Mise en table, emploi et exemple :

Il convient tout d'abord de noter que, pour un usage commode de ces tables, on est conduit à substituer au point estimé un point auxiliaire dont la latitude φ_a est un multiple de 20' et la longitude G_a est telle que l'angle au pôle auxiliaire P_a soit aussi un multiple de 20'. Les Nouvelles Tables de Navigation d'Émile Guyou sont constituées de deux volumes.

Tome I, Réduction à l'Équateur :

La table donne en fonction de la latitude auxiliaire φ_a, de (H + D) et de la valeur absolue de (H – D) les quantités $½.(H_0 + D_0)$ et $½.(H_0 + D_0)$, cette dernière étant donnée en valeur absolue.

Une double page correspond à chacune des valeurs de la latitude auxiliaire exprimée de 0° à 60° avec un intervalle d'argumentation de 20'. Cette double page contient deux tables partielles : l'une commençant dans le haut de la page de gauche dont l'argument varie de 0° à 90° + φ_a ; cette table se poursuit sur la page de droite puis est suivie par une autre table dont l'argument varie de 0° à 90° - φ_a. Ces limites dans l'argumentation sont celles que ne peuvent pas dépasser les arguments $|H \pm D|$ quand le cercle de hauteur est coupé par le parallèle de latitude φ_a. Pour ces deux tables, à simple entrée $|H \pm D|$, l'intervalle d'argumentation est de 10'. Sur la partie droite de chaque page figure les tableaux de parties proportionnelles permettant d'exprimer les résultats au dixième de minute près.

Si latitude et déclinaison sont de même nom, les arguments sont respectivement (H + D) pour la table de gauche et $|H - D|$ pour la table de droite. Dans le cas contraire, l'argument est $|H - D|$, à gauche et (H + D) à droite.

Les éléments lus dans les tables sont $1/2(H_0 - D_0)$ avec une entrée (H + D), $1/2|H_0 - D_0|$ avec une entrée $|H - D|$. Ces éléments sont exprimés en minutes et dixièmes pour, selon É. Guyou : « … *éviter les nombres complexes*. ».

La demi-somme et la demi-différence des éléments réduits permettent le calcul de H_0 et de D_0. Le calcul est ici à conduire algébriquement et peut amener à trouver :

- une déclinaison réduite D_0 négative ; ceci indique que le nom du pôle de « l'astre réduit » est opposé à celui de l'astre observé ;
- une hauteur réduite H_0 négative lorsque l'angle au pôle est supérieur à 90° ; la distance zénithale de « l'astre réduit » est alors supérieure à 90°.

Tome II, Calcul de la Hauteur et de l'Azimut :

Chaque page de cette table correspond à une valeur de l'angle au pôle P_a arrondie à un multiple de 20'. Chaque page contient deux tables, l'une donnant la hauteur estimée réduite H_{e0}, l'autre, placée du côté de la marge extérieure, donnant l'azimut estimé réduit A_{z0}. L'argument d'entrée commun dans ces tables est la déclinaison réduite D_0 (en valeur absolue), calculée à l'aide de la table I. L'intervalle d'argumentation est de 10' pour le calcul de la hauteur et de 20' pour le calcul d'azimut. Un tableau des parties proportionnelles est donné pour interpoler la hauteur.

L'azimut, exprimé de 0° à 90°, sera nommé avec le nom de D_0 et la détermination E ou W de P_a ; la hauteur estimée réduite sera positive si $P_a < 90°$, négative si $P_a > 90°$. Les tables sont à simple entrée et n'appellent pas de remarques particulières.

Exemple :

Données	AHap = 249° 51,1'	D = 48° 54,0' N	H_v = 12° 14,0'	φ_e = 25° 06' N G_e = 149° 37' W

On adoptera un point auxiliaire de latitude φ_a = 25° 00' N et de longitude G_a = 149° 31,1' W donnant un angle au pôle P_a = 100° 20,0' W et on calcule H + D = 61° 08,0' et D – H = 36° 40,0'.

La table I donne : ½.(H_0 + D_0) = 1237,1’ et ½.(D_0 – H_0) = 1648,8’. En faisant la somme et la différence de ces deux expressions, on obtient respectivement : D_0 = 2885,9’ (N) et H_0 = - 411,7’.

La table II donne ensuite pour P_a = 100° 20’ et D_0 : H_{e0} = -412,8’ et A_{z0} = N41,5°W

L’intercept réduit est donc de : $H_0 – H_{e0}$ = -411,7’ – (- 412,8’) = +1,1’

Cet intercept étant exprimé en minutes du parallèle de latitude φ_a, on retiendra finalement : $H_v – H_e = +1,1.\cos\varphi_a$ = +1,0’.

Les résultats sont conformes à ceux obtenus avec une méthode directe. Les tables, à simple argument vu leurs dispositions, n’ont pas été représentées mais le calcul peut aisément être reconstitué à l’aide d’une calculatrice.

Comparaisons avec la droite Marcq :

En avertissement de ses Nouvelles Tables de Navigation, comme dans son mémoire publié dans la « Revue Maritime » en 1909, Émile Guyou déclare :

> « *Avec les présentes tables, au contraire, tout est nouveau. La droite de hauteur à laquelle elles conduisent n’est plus la droite Marcq de Saint-Hilaire* ».

Sans rentrer dans des détails trop théoriques, indiquons simplement le fondement de cette déclaration. On sait que la droite Marcq de Saint-Hilaire se construit à partir d’un point de calcul (point estimé ou auxiliaire) en portant, à partir de ce point, l’image de l’arc de vertical de l’astre (arc de grand cercle) assimilée à sa tangente ; suivant cette tangente, on reporte l’intercept qui définit ainsi un point déterminatif à partir duquel on trace la droite de hauteur. Le procédé conduit à construire une droite dont la direction est légèrement erronée à partir d’un point qui n’est pas exactement sur la courbe de hauteur. Rappelons que les approximations faites sont largement admissibles tant que la hauteur reste inférieure à 80° et l’intercept inférieur à 30 milles. Émile Guyou montre que son procédé de calcul, associé à l’usage des Nouvelles Tables, conduit au tracé d’une droite de hauteur pour laquelle la courbure de l’arc de vertical est nulle au point de calcul situé à l’équateur ; on peut alors admettre que l’image du vertical se confond avec sa tangente au point de calcul sur une grande longueur. La construction est toujours basée sur le principe découvert par Marcq de Saint-Hilaire mais les effets de l’application d’une méthode approchée sont réduits, ce qui autorise Guyou à écrire dans les instructions d’emploi des Nouvelles Tables :

> « *… la droite de hauteur donnée par la nouvelle méthode présente tous les avantages de la droite Marcq de Saint-Hilaire et est affranchie des imperfections dont celle-ci reste en général affectée*. »

Pour conclure sur ce point, citons le commentaire qu’écrit F. Marguet dans son cours de navigation de l’École navale :

> « *Le tracé de la droite se fait exactement comme dans la droite Marcq. Seulement ici la droite tracée est inclinée sur la droite vraie d’un angle qui est du second ordre de petitesse par rapport à [l’intercept]. Cette propriété ne constitue cependant pas un avantage considérable à la droite du commandant Guyou, parce que la correction azimutale de la droite Marcq est le plus souvent inutile. L’avantage réel du procédé du commandant Guyou résulte de la simplicité et de la symétrie des formules fondamentales qui permettent le calcul des éléments de la droite par de simples lectures faites dans des tables spéciales. Il ne comporte la recherche d’aucun logarithme*. »

ANNEXE 4-1

TABLES de DELAFON

FORMULATION et EXEMPLE DE CALCUL

Le triangle de position de l'astre ayant été décomposé selon la hauteur issue du zénith, les symboles utilisés sont ceux définis en annexe 1-1.

Formulation utilisée :

Triangle PZL, table F :

$$\sin \varphi_a = \cos b \,.\, \cos \beta \quad , \quad \tan P_a = \frac{\tan b}{\sin \beta} \quad , \quad \tan A_{z1} = \frac{\tan \beta}{\sin b}$$

Triangle AZL, table F :

$$\sin H_a = \cos b \,.\, \cos(\delta - \beta) \quad , \quad \tan A = \frac{\tan b}{\sin(\delta - \beta)} \quad , \quad \tan A_{z2} = \frac{\tan(\delta - \beta)}{\sin b}$$

Triangle PZL, table G :

$$\sin b = \sin P_e \,.\, \cos \varphi_e$$

Exemple et présentation des tables F et G :

Les données de calcul sont les suivantes :

Estime		Coordonnées horaires		Observation	
φ_e	37° 10,0' S	AHvp	234° 34,0'	H_v	25° 00,0'
G_e	75° 39,0' E	D	8° 25,0' N	Soleil	
$AHvg_e$ = 310° 13,0' ; P_e = 49° 47,0' E = 3h 19m 08s					

Table G, recherche de b :

Une double page de la table G couvre un intervalle d'angle au pôle de 1 h (soit 15°) ; cet angle est argumenté toutes les 4 minutes ; sur cette double page, la latitude est argumentée tous les degrés de 0° à 68° ; en bas de la page de gauche figurent deux tableaux pour effectuer les éventuelles interpolations pour les minutes de latitudes et les minutes et secondes d'angle au pôle (ces tableaux n'ont pas été représentés). Dans la table G, l'arc b est exprimé en dixième de degré.

L'extrait de table utile pour le traitement de l'exemple est le suivant :

φ_e	P_e ou $(12\text{ h} - P_e)$					
	3 h					
	0 m	…	16 m	20 m	…	60 m
… 37° 38° …	… 344 339 …	…	… 371 365 …	… 377 371 …	…	… 438 430 …

Les interpolations linéaires (double) donnent 374,7, soit, arrondi au degré entier le plus voisin : b = 37°.

Table F, 1re entrée, recherche de β et des éléments du point auxiliaire :

L'extrait de table F correspondant à b = 37° est reproduit ci-après.

b = 37°				
β	φ_a	W pour 10'	P_a, 12h - P_a	A_{z1}
$(\delta - \beta)$	H_a			A_{z2}
… 39° 40° 41° … 57° 58° 59° …	… 38° 22' 37° 43' 37° 04' … 25° 47' 25° 02' 24° 17' …	… 6,5' 6,5' 6,6' … 7,5' 7,5' 7,5' …	… 3h 20m 32s 3h 18m 09s 3h 15m 50s … 2h 47m 46s 2h 46m 30s 2h 45m 17s ...	... 53,4° 54,3° 55,3° ... 68,6° 69,4° 70,1° ...

La colonne indexée « W pour 10' » donne le taux de variation de la hauteur lorsque l'argument $(\delta - \beta)$ varie de 10'.

Le couple (φ_a, P_a) approchant au mieux le couple (φ_e, P_e) est φ_a = 37° 43', P_a = 3h 18m 09s qui correspondent à β = 40°. On lit également A_{z1} = 54,3°.

Le point auxiliaire a pour latitude φ_a = 37° 43' S (33' dans le S du point estimé) et sa longitude, déduite de l'angle au pôle auxiliaire, est G_a = 75° 53,8' E (14,8' de longitude dans l'E du point estimé).

Table F, 2e entrée, recherche des éléments de la droite de hauteur :

On calcule δ = 90° - D = 98° 25,0' (D est de nom contraire à φ) et on forme $(\delta - \beta)$ = 58° 25,0'. La lecture de table pour $\delta - \beta$ = 58° donne une hauteur H = 25° 02' et W = 7,5' pour une variation de l'argument d'entrée de 10'. On a donc H_a = 25° 02' – 7,5.2,5 = 24° 43,3'. En interpolant à vue, on relève également A_{z2} = 69,7° (valeur positive).

En définitive, on a : $H_v - H_a$ = + 16,7' et $A_z = A_{z1} + A_{z2}$ = S124°E = 056°.

Un calcul effectué par rapport au point estimé donne un intercept de +7,8' et un azimut au 056,4°.

Nota 1 : on remarque que le point auxiliaire est relativement éloigné du point estimé : ils sont distants d'environ 35 milles. On peut se demander si le choix de β = 40° est le plus intéressant et si un choix autre, comme β = 41° n'aurait pas conduit à un point auxiliaire plus proche. On trouve alors : φ_a = 37° 04' S (6' dans le N du point estimé) et P_a = 3h 15m 50s, ce qui conduit à G_a = 76° 28,5' E (49,5' de longitude dans l'E du point estimé) ; ce point auxiliaire est, en définitive, situé à 40 milles environ du point estimé. Avec ce point, on trouve un intercept de -28,3' et un azimut sensiblement identique. Le premier point auxiliaire choisi est donc un peu plus proche du point estimé tout en conduisant à un intercept plus faible. On aurait également pu conduire un même raisonnement

concernant la valeur choisie pour b et s'interroger sur ce qu'aurait donné b = 38°. Le calcul montre que l'intercept aurait été d'une quarantaine de milles.

Nota 2 : en seconde entrée en table F, avec (δ – β), la colonne « P_a » donne la valeur de l'angle à l'astre A. Dans le cas de cet exemple, on obtient, pour (δ – β) = 58°, A = 2h 46m 30s = 41,6°. Comme il a été vu en annexe 1-1, cet angle peut servir à corriger la hauteur pour l'écart en déclinaison, donc en distance polaire δ. L'écart étant ici de 25' entre la distance polaire réelle (98° 25') et la distance polaire de calcul (98°), on a :

$$\Delta H = -25.\cos A = -18{,}7'$$

d'où une hauteur de 25° 02' – 18,7' = 24° 43,3', ce qui confirme la valeur trouvée.

La construction de la droite de hauteur est représentée sur la figure A4-1 ci-après sur laquelle on a porté les différents points de calcul, estimé et auxiliaires.

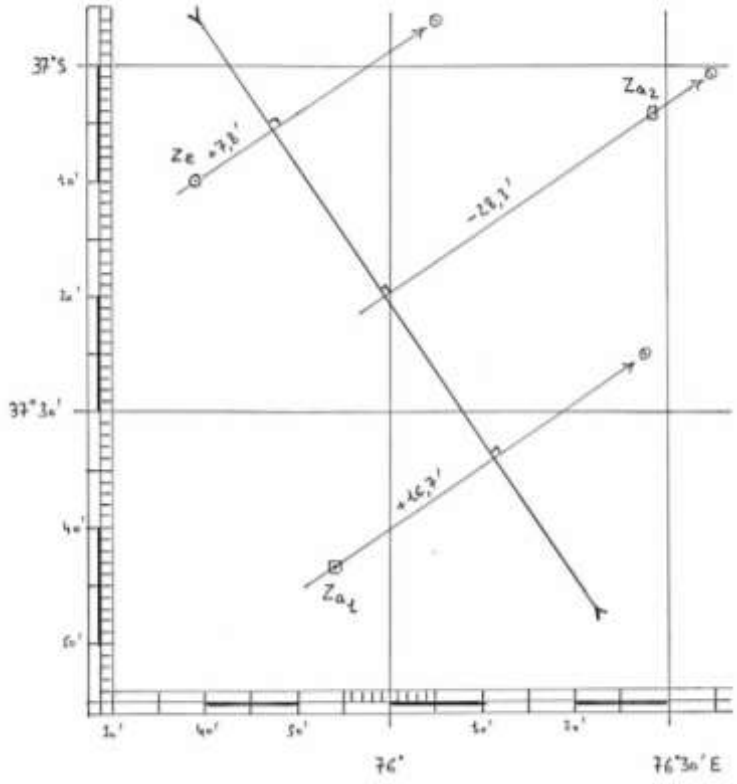


Fig : A4-1

Distance maximale entre points estimé et auxiliaire :

On vérifie que, du fait d'intervalles d'argumentation de 1°, la distance maximale entre points estimé et auxiliaire a pour expression :

$$m_{max} = 30\sqrt{1 + (\cos b)^2}$$

Cette distance ne peut excéder 42,4 milles.

ANNEXE 4-2

TABLES de RADLER de AQUINO

La rédaction et les calculs de la présente annexe s'appuient essentiellement sur la 3e édition de 1924 (Brazilian Centenary Edition) des « Newest Navigation and Aviation Altitude and Azimuth Tables, the Simplest and Readiest in Solution » de F. Radler de Aquino. En conséquence, on utilisera exclusivement la décomposition du triangle de position selon la hauteur issue de l'astre.

Formulation utilisée :

Le triangle de position PZA, construit à partir du pôle élevé, et sa hauteur sphérique AK sont représentés sur la sphère terrestre, en figure A4-2 ci-dessous.

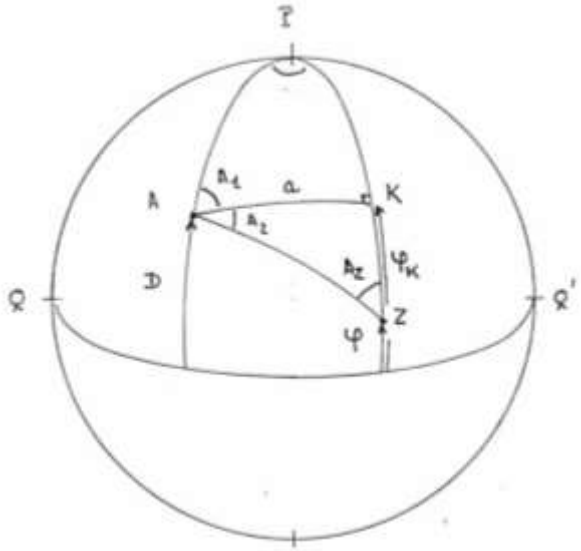


Fig : A4-2

On note a l'arc AK, φ_K la latitude du point K et B le complément de l'arc KZ, soit B = 90° - KZ. La formulation utilisée par Radler de Aquino s'obtient en utilisant les formules des triangles rectangles déduites des règles du pentagone de Neper appliquées successivement aux triangles PKA et ZKA :

$\sin a = \cos D \,.\, \sin P$ $\cot \varphi_K = \cot D \,.\, \cos P$	$\sin D = \cos a \,.\, \sin \varphi_K$ $\cot P = \cot a \,.\, \cos \varphi_K$
$\sin a = \cos H \,.\, \sin A_z$ $\cot B = \cot H \,.\, \cos A_z$	$\sin H = \cos a \,.\, \sin B$ $\cot A_z = \cot a \,.\, \cos B$
$\cot A_1 = \sin a \,.\, \tan \varphi_K = \sin D \,.\, \tan P$	$\cot A_2 = \sin a \,.\, \tan B = \sin H \,.\, \tan A_z$

Les formules, identiques deux à deux, figurant sur les deux premières lignes du tableau ci-dessus, servent à calculer en trois étapes successives les éléments de construction de la droite de hauteur à partir d'un point auxiliaire ; la table donne directement les résultats de calculs.

Les formules indiquées en 3e ligne servent au calcul de l'angle à l'astre.

On a représenté sur la figure A4-3 ci-après les différentes configurations des triangles suivant les positions relatives de l'astre et de l'observateur ainsi que de la valeur de l'angle au pôle.

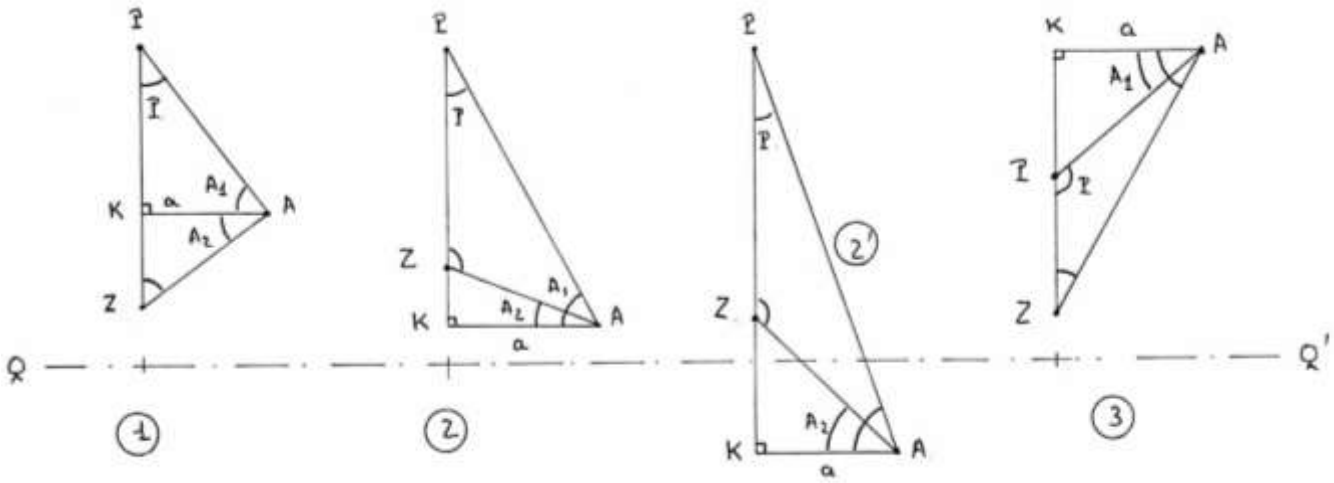


Fig : A4-3

Les déterminations correspondantes sont indiquées dans le tableau ci-dessous :

Cas n°	φ et D	P	φ_K	KZ = 90° - B = C	A_z	A
1	même nom	< 90°	> φ	φ_K - φ	< 90°	$A_1 + A_2$
2	même nom	< 90°	< φ	φ – φ_K	> 90°	$A_1 – A_2$
2'	noms contraires	< 90°	< 0	φ + φ_K	> 90°	$A_1 – A_2$
3	même nom	> 90°	-	180° - (φ + φ_K)	< 90°	$A_2 – A_1$

Configuration de la table :

φ_K, B	a = 8°				a = 8° 30'				C	A_1 A_2
	H, D	60'/Δ	A_z, P	Δ/60'	H, D	60'/Δ	A_z, P	Δ/60'		
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
49°	48° 22'	1,03	12° 06'	0,23	48° 17'	1,03	12° 50'	0,25	41°	80,9°
50°	49° 20'	1,02	12° 20'	0,25	49° 15'	1,02	13° 05'	0,28	40°	80,6°
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
P	a	60'/Δ	φ_K	Δ/60'	a	60'/Δ	φ_K	Δ/60'		A_1
	D = 8°				D = 8° 30'					

La table donne directement les résultats de calcul, a et φ_K en fonction des entrées D et P, puis D et P en fonction des entrées a et φ_K et enfin H et A_z en fonction de a et B ou C. Les colonnes 60'/Δ et Δ/60' donnent les éléments nécessaires aux interpolations. Enfin, la dernière colonne donne A_1 ou A_2 en fonction des arguments d'entrée, ce qui donnera ensuite accès à l'angle à l'astre.

Le mode d'utilisation de la table est développé dans l'exemple ci-après.

Exemple :

Les données de calcul sont les suivantes :

Estime		Coordonnées horaires		Observation	
φ_e	37° 10,0' S	AHvp	234° 34,0'	H_v	25° 00,0'
G_e	75° 39,0' E	D	8° 25,0' N	Soleil	
$AHvg_e$ = 310° 13,0' ; P_e = 49° 47,0' E = 3h 19m 08s					

1re étape, détermination des valeurs utiles de a et de φ_K :

On entre dans la table (extrait en page précédente) avec la déclinaison D = 8° 25', arrondie à 8° 30', en bas, et avec l'angle au pôle P_e = 49° 47', arrondi à 50°.

On lit a = 49° 15' et φ_K = 13° 05'. La valeur de P étant inférieure à 50°, on prendra 49° pour valeur arrondie de a et on choisira la valeur approchée arrondie φ_K = 13°.

2e étape, calcul de φ_K et de l'angle au pôle auxiliaire :

On ouvre maintenant la table à la page correspondant à a = 49° et on recherche, dans cette colonne, les lignes encadrant la valeur de D, à partir de la valeur de φ_K approchée trouvée ci-dessus. L'extrait de table figure ci-dessous.

φ_K, B	a = 49°				a = 49° 30'				C	A_1 A_2
	H, D	60'/Δ	A_z, P	Δ/60'	H, D	60'/Δ	A_z, P	Δ/60'		
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
12°	7° 50'	1,54	49° 38'	0,10	7° 46'	1,58	50° 07'	0,12	78°	80,8°
13°	8° 29'	1,54	49° 44'	0,12	8° 24'	1,58	50° 14'	0,12	77°	80,0°
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
39°	24° 23'	1,76	53° 57'	0,38	24° 07'	1,82	56° 25'	0,38	51°	58,2°
40°	24° 57'	1,82	56° 20'	0,40	24° 40'	1,82	56° 48'	0,40	50°	57,3°
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
P	a	60'/Δ	φ_K	Δ/60'	a	60'/Δ	φ_K	Δ/60'		A_1
	D = 49°				D = 49° 30'					

On entre donc dans la colonne correspondant à a = 49°. La déclinaison considérée du Soleil D = 8° 25' est bien comprise entre les valeurs de déclinaison tabulées pour φ_K = 12° et φ_K = 13°. On interpole pour évaluer tout d'abord la valeur correspondante de φ_K puis en déduire la valeur de l'angle au pôle auxiliaire. On utilise les colonnes 60'/Δ et Δ/60'. Δ représente les différences tabulaires de D ou de P entre deux lignes successives, soit pour une variation de l'argument de 1° ou de 60'.

Lorsque φ_K varie de 12 à 13°, D augmente de 7° 50' à 8° 29', soit de 39'. La quantité de 60'/Δ est donc bien de 1,54. Dans notre cas de figure D = 8° 25' est inférieure de 4' à la déclinaison tabulée la plus proche. Nous avons donc : φ_K = 13° - 4.(60'/Δ) = 13° - 6,2' = 12° 53,8'.

Le principe est identique pour le calcul de P_a, en utilisant la variation Δ/60' correspondante et en travaillant toujours avec les valeurs tabulées les plus proches des valeurs considérées, soit : P_a = 49° 44' – 6,2.(Δ/60') = 49° 44' – 6,2.0,12 = 49° 43,3'.

3e étape, calcul des éléments de la droite de hauteur :

On évalue ensuite 90° - B = C = $\varphi_a + \varphi_K$ (latitude et déclinaison sont de noms contraires), la latitude auxiliaire φ_a étant aussi proche que possible de la latitude estimée (elles ne doivent pas différer de plus de 30') et B étant un nombre entier.

φ_e étant de 37° 10' S, nous avons : $\varphi_e + \varphi_K$ = 37° 10' + 12° 53,8 = 50° 03,8'. L'arrondi au degré le plus proche est C = 50° (ou B = 40°). La latitude du point auxiliaire est donc φ_a = 37° 06,2' S.

Toujours pour la même valeur de a = 49°, on rentre à nouveau dans la table, à la même page, sur la ligne B = 40° ou C = 50°.

On lit immédiatement la hauteur et l'azimut auxiliaires :

$$H_a = 24° 57', Z_a = 056°,3$$

L'intercept est donc de : $H_v - H_a$ = 25° 00,0' – 24° 57' = +3'.

Les coordonnées du point auxiliaire à partir duquel on construira la droite sont :

- longitude : $G_a = AHvp - AHvg_a = AHvp - (360° - P_a)$ = 234° 34,0' – 310° 16,7' = 075° 42,7' E ;
- latitude : φ_a = 37° 06,2' S.

Simplification du calcul en utilisant la correction de hauteur à l'aide de l'angle à l'astre :

La première étape de calcul est inchangée : il a été obtenu a = 49° et φ_K = 13°. Ces deux valeurs fixent ensuite la déclinaison de calcul (ou auxiliaire) D'$_a$ = 8° 29' S et l'angle au pôle auxiliaire P'$_a$ = 49° 44', qui conduit à la longitude d'un nouveau point auxiliaire G'$_a$ = 75° 42' E. Simultanément, on lit, dans la dernière colonne de la table la valeur de A_1 = 80,0°.

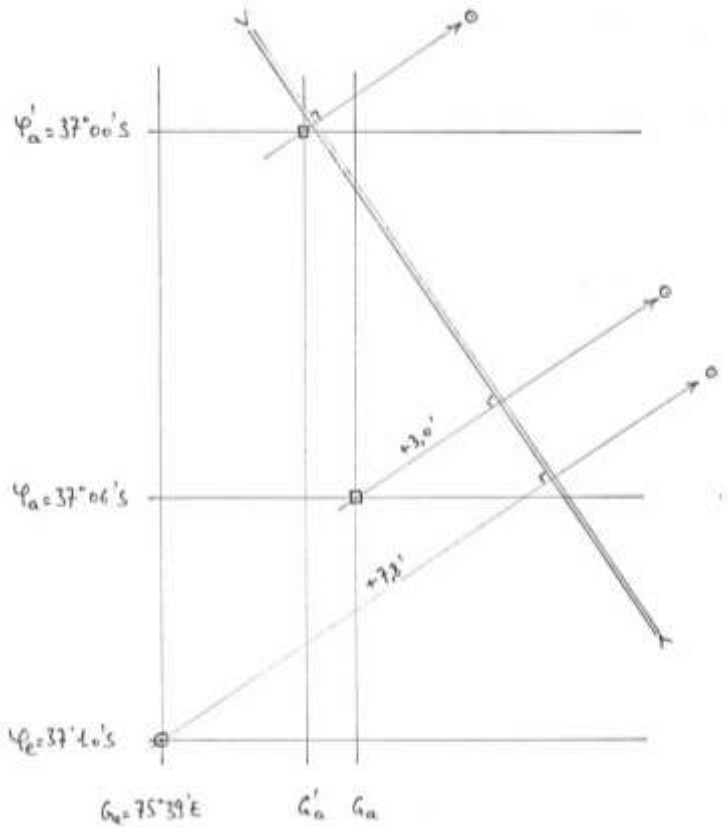


Fig : A4-4

φ_K étant ici un nombre entier, on choisit une nouvelle latitude auxiliaire φ'_a, nombre entier de degré le plus proche de la latitude estimée φ_e, soit $\varphi'_a = 37°$ S ; on obtient ensuite 90° - B = C = $\varphi'_a + \varphi_K = 50°$. On lit alors directement la hauteur et l'azimut ainsi que l'angle A_2 : $H_a = 24° 57'$, $Z_a = 056{,}3°$, $A_2 = 57{,}3°$.

Il convient ensuite de corriger la hauteur trouvée de l'écart en déclinaison $D - D'_a = + 4'$ (la déclinaison est de nom contraire à la latitude, donc négative). L'angle à l'astre est $A = 180° - (A_1 + A_2) = 42{,}7°$ (voir nota ci-dessous) ; on utilise la formule donnant la variation de hauteur consécutive à une variation de déclinaison (voir annexe 1-1) : $\Delta H = (D - D_a).\cos A$ qui donne $\Delta H = + 3'$. La hauteur auxiliaire corrigée est donc $H'_a = 24° 57' + 3{,}0' = 25° 00'$. En définitive, l'intercept à considérer est nul, à partir du point auxiliaire de coordonnées $\varphi'a = 37° 00'$ S, $G'a = 75° 42'$ E.

Les différents résultats sont regroupés sur le graphique représenté en figure A4-4 ci-dessus.

Nota : dans le cas où latitude et déclinaison sont de noms contraires (figure A4-5), la latitude du point K, φ_K, est négative et le côté PK du triangle rectangle PAK est supérieur à 90° ; son angle en A est donc, lui aussi, supérieur à 90°. L'argumentation de la table étant limitée à l'intervalle [0°, 90°] en donne le supplément et il conviendra donc de déterminer l'angle à l'astre en écrivant : $A = (180° - A_1) - A_2 = 180° - (A_1 + A_2)$.

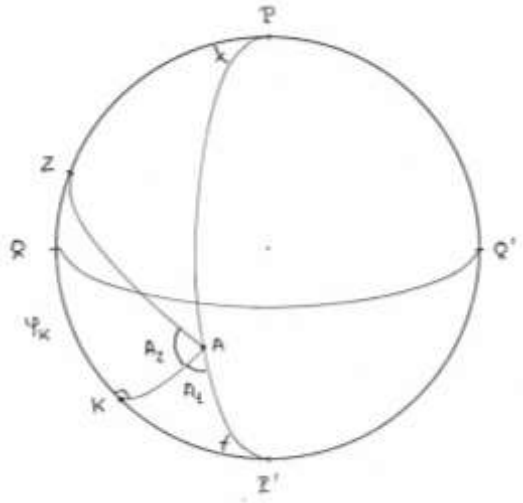


Fig : A4-5

Distance entre points estimé et auxiliaire :

Si on appelle $\Delta\varphi$ la différence entre les latitudes des points estimé et auxiliaire, φ_m la latitude moyenne entre ces points et ΔG leur différence de longitude, l'expression de la distance m, en milles marins, entre ces points est de la forme :

$$m = \sqrt{\Delta\varphi^2 + (\Delta G \cos \varphi_m)^2}$$

La détermination de la valeur maximale de la différence en latitude est simple car la latitude du point auxiliaire est telle que, d'une part, elle soit aussi proche que possible que la latitude estimée et que, d'autre part, l'arc C soit un nombre entier de degré ; $\Delta\varphi$ est donc, au plus, égal à 30'.

L'évaluation d'une valeur maximale de la différence de longitude ΔG est plus délicate. Remarquons tout d'abord que ΔG est égal à la valeur absolue de la différence entre les angles au pôle estimé P_e et auxiliaire P_a :

$$G_a - G_e = AHag_e - AHag_a = P_e - P_a \text{ (si astre à l'W)} = P_a - P_e \text{ (si astre à l'E)}$$

Si on note ΔP la différence d'angles au pôle, on a bien, en valeur absolue, $\Delta G = \Delta P$ et, Δa étant l'écart maximal entre les valeurs tabulée et exacte de l'arc a, on établit que :

$$\Delta P = \Delta a. \sqrt{\frac{1}{(\cos D)^2} + (\tan D. \tan P)^2}$$

Le tableau ci-dessous donne les valeurs calculées de ΔP pour quelques valeurs significatives de P et de D et pour Δa = 15', soit le demi-intervalle d'argumentation de a :

	P = 0°	P = 15°	P = 30°	P = 45°	P = 60°	P = 75°	P = 85°
D = 0°	15,0'	15,0'	15,0'	15,0'	15,0'	15,0'	15,0'
D = 10°	15,2'	15,2'	15,3'	15,5'	15,9'	18,2'	33,9'
D = 20°	16,0'	16,0'	16,3'	16,9'	18,6'	25,9'	64,4'
D = 30°	17,3'	17,5'	18,0'	19,4'	22,9'	36,7'	100'
D = 45°	21,2'	21,6'	22,9'	26,0'	33,5'	59,9'	173'
D = 60°	30,0'	30,8'	33,5'	39,7'	54,1'	101'	298'
D = 75°	58,0'	59,9'	66,4'	80,6'	113'	217'	642'

On constate donc que la distance entre points estimé et auxiliaire risque, si la déclinaison est importante et l'angle au pôle voisin de 90°, d'atteindre des valeurs inacceptables. D'autre part, on peut constater, à la simple lecture des tables que l'interpolation linéaire est imprécise, voire impossible, lorsque l'angle au pôle est compris entre 88° et 92°.

Autre exemple :

Les données de calcul sont les suivantes :

Estime		Coordonnées horaires		Observation	
φ_e	30° 18,0' S	AHap	91° 29,0'	H_v	39° 50,0'
G_e	30° 32,0' W	D	63° 10,0' S	Acrux	
$AHag_e$ = 60° 57,0' = P_e					

1re étape, détermination des valeurs utiles de a et de φ_K :

φ_K, B	a = 63°				a = 63° 30'				C	A_1 A_2
	H, D	60'/Δ	A_z, P	Δ/60'	H, D	60'/Δ	A_z, P	Δ/60'		
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
60°	23° 09'	4,00	75° 42'	0,42	22° 44'	4,29	76° 00'	0,42	30°	32,8°
61°	23° 24'	4,29	76° 07'	0,43	22° 58'	4,29	76° 25'	0,42	29°	31,8°
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
P	a	60'/Δ	φ_K	Δ/60'	a	60'/Δ	φ_K	Δ/60'		A_1
	D = 63°				D = 63° 30'					

Pour les valeurs considérées de déclinaison et d'angle au pôle, on sélectionne à l'aide d'une interpolation à vue, a = 23° et φ_K = 76°.

2e étape, calcul de φ_K et de l'angle au pôle auxiliaire :

On ouvre maintenant la table à la page correspondant à a = 23° et on recherche, dans cette colonne, les lignes encadrant la valeur de D, à partir de la valeur de φ_K approchée trouvée ci-dessus. L'extrait de table figure ci-dessous.

φ_K, B	a = 23°				a = 23° 30'				C	A_1 A_2
	H, D	60'/Δ	A_z, P	Δ/60'	H, D	60'/Δ	A_z, P	Δ/60'		
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
44°	39° 45'	1,15	30° 33'	0,43	39° 34'	1,15	31° 09'	0,43	46°	69,3°
45°	40° 37'	1,18	30° 59'	0,45	40° 26'	1,18	31° 35'	0,47	45°	68,7°
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
75°	62° 46'	2,00	58° 38'	1,68	62° 21'	2,00	59° 14'	1,68	15°	34,4°
76°	63° 16'	2,07	60° 19'	1,77	62° 51'	2,14	60° 55'	1,73	14°	32,5°
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
P	a	60'/Δ	φ_K	Δ/60'	a	60'/Δ	φ_K	Δ/60'		A_1
	D = 23°				D = 23° 30'					

On entre donc dans la colonne correspondant à a = 23°. La déclinaison considérée D = 63° 10' donne, par interpolation, φ_K = 75° 48' et P_a = 59° 58', donc une longitude du point auxiliaire G_a = 91° 29' – 59° 58' = 31° 31' W.

3e étape, calcul des éléments de la droite de hauteur :

On évalue ensuite C = φ_K – φ_a, la latitude auxiliaire φ_a étant aussi proche que possible de la latitude estimée et C étant un nombre entier. La latitude estimée étant de 30° 18' S, nous avons : φ_K – φ_e = 75° 48' - 30° 18 = 45° 30'. L'arrondi au degré le plus proche est C = 45°, ou C = 46° ; suivant le choix, la latitude du point auxiliaire est donc φ_a = 30° 48' S ou 29° 48' S (la longitude auxiliaire restant la même).

Toujours pour la même valeur de a = 23°, on rentre à nouveau dans la table, à la même page, sur la ligne C = 45° et C = 46° et on remarque ici que c'est avec cette dernière valeur que l'on obtiendra le plus petit intercept : on lit la hauteur et l'azimut auxiliaires : H_a = 39° 45', Z_a = S30,6°W = 210,6° ; l'intercept est donc de : H_v – H_a = 39° 50' – 39° 45' = + 5', à partir du point que l'on note Aux1 (figure A4-6). Si on choisit C = 45°, la latitude du point auxiliaire est alors de 29° 48' S et la hauteur auxiliaire est de 40° 37', ce qui conduit à un intercept de -47', avec un azimut au S31°W, soit 211°, à partir du point que l'on note Aux2 (figure A4-6).

Pour terminer, on effectue le calcul en utilisant la correction de déclinaison à l'aide de l'angle à l'astre. On utilise alors directement les données de la ligne φ_K = 76°, ce qui donne D_a = 63° 16' et P_a = 60° 19', d'où une longitude du point auxiliaire de 31° 10' W ; on relève aussi l'angle A_1 = 32,5° (colonne de droite). On utilise ensuite la ligne correspondant à C = 46° ce qui conduit à une latitude du point auxiliaire de 30° S. Outre la hauteur et l'azimut déjà relevés, on note A_2 = 69,3° et un angle à l'astre A = A_1 + A_2 = 101,8°. La variation de déclinaison étant D – Da = - 6', on obtient une correction de hauteur est de + 1', soit une hauteur auxiliaire de 39° 46' et un intercept de + 4' à partir du point que l'on note Aux3 (figure A4-6).

L'ensemble des résultats est reporté dans le tableau ci-dessous et la droite de hauteur est construite, à partir des différents point de calcul, en figure A4-6 ci-après.

	Point estimé	Aux1	Aux2	Aux3
φ G	30° 18’ S 30° 32’ W	29° 48’ S 31° 31’ W	30° 48’ S 31° 31’ W	30° 00’ S 31° 10’ W
Intercept Azimut	+ 5’ 210,9°	+ 5’ 210,6°	- 47’ 211°	+ 4’ 210,6°
Δφ ΔG m	- - -	30’ 59’ 59’	30’ 59’ 59’	18’ 38’ 38’

La seconde colonne du tableau donne le résultat du calcul des éléments de la droite de hauteur par rapport au point estimé ; la distance calculée en dernière ligne est celle séparant les différents points auxiliaires du point estimé :

$$m = \sqrt{\Delta\varphi^2 + (\Delta G \cos \varphi_m)^2}$$

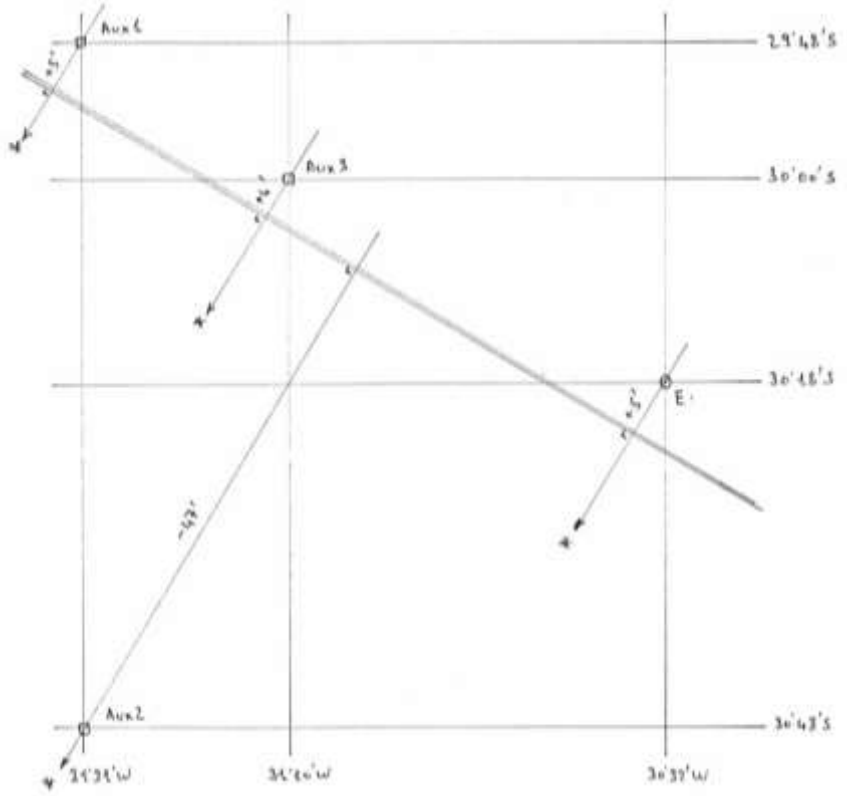


Fig : A4-6

ANNEXE 4-3

TABLE ZONIQUE

PRÉSENTATION, FORMULATION et EXEMPLE DE CALCUL

Dans la présente annexe, la décomposition du triangle de position adoptée est celle relative à la hauteur issue de l'astre. On a repris, partiellement, la symbolisation utilisée dans la table originale (2e édition de 1926) en essayant, autant que possible, de se rapprocher de celle, générale, adoptée dans l'étude.

Présentation et formulation :

La figure A4-7 représente les trois configurations possibles relatives à l'observation d'un astre au-dessus de l'horizon ; les sphères 1 et 2 sont relatives à une latitude et une déclinaison de même nom, l'angle au pôle étant respectivement inférieur puis supérieur à 90°. La 3e sphère est relative à une latitude et une déclinaison de noms

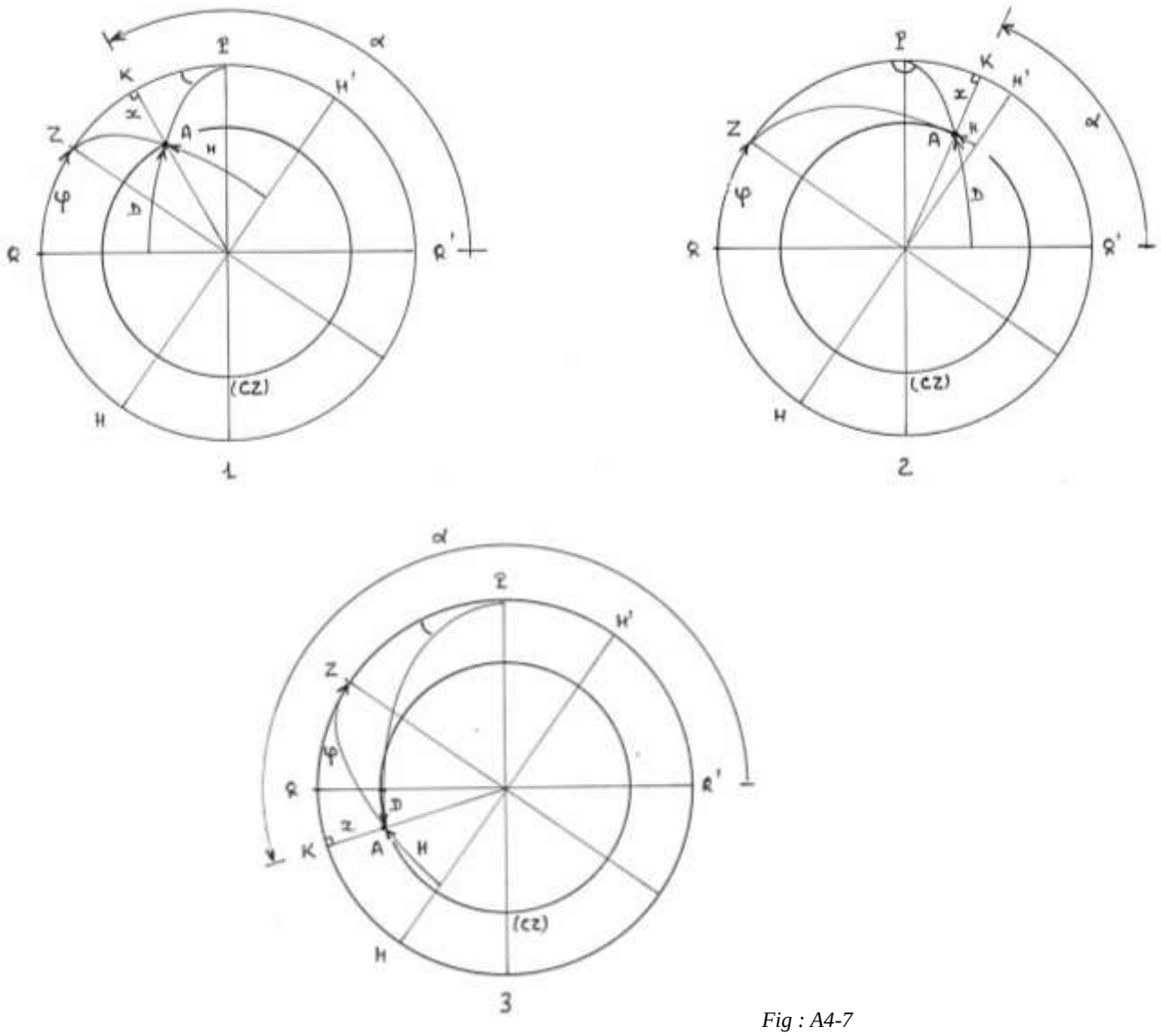


Fig : A4-7

contraires. Le plan de figure est celui du méridien du lieu. La hauteur sphérique, arc AK, est notée x (au lieu de a dans les études précédentes) et on a repéré (CZ) le petit cercle de la sphère situé dans un plan parallèle à celui du méridien et pour lequel tout point A vérifie AK = x ; ce petit cercle a été désigné comme étant le « cercle zonique » par les frères de Catalano. On définit ensuite l'arc α, toujours positif, mesuré à partir de l'équateur, dans le sens direct, sur le méridien, jusqu'au point K puis l'arc $\beta = \alpha + \varphi$. Les angles en A des triangles PKA et ZKA sont notés respectivement A_1 et A_2.

Le tableau ci-dessous résume les différents cas de figure ainsi que les déterminations des différents arcs et angles utilisés :

α	φ et D	P	PK	KZ	A_z	A	β
$0° < \alpha < 90°$	même nom	> 90°	90° - α	180° - β	< 90°	$A_1 + A_2$	$0° < \beta < 180°$
$90° < \alpha < 180° - \varphi$	même nom	< 90°	α – 90°	180° - β	< 90°		$90° < \beta < 270° - \varphi$
$180° - \varphi < \alpha < 180°$	même nom	< 90°	α – 90°	180° - β	> 90°		$180° - \varphi < \beta < 270°$
$180° < \alpha < 270°$	noms contraires	< 90°	α – 90°	β – 180°	> 90°		$180° < \beta < 360°$

La table donne les valeurs algébriques de A_1 et A_2 ; l'angle à l'astre est ainsi toujours la somme algébrique des deux valeurs trouvées.

La table zonique comporte 90 tableaux, chaque tableau correspondant à une valeur entière de x, hauteur de zone. Chacun de ces tableaux figure sur une double page avec, sur la page de gauche, les valeurs relatives à un angle au pôle inférieur à 6 heures et, sur celle de droite, les valeurs relatives à un angle au pôle supérieur à 6 heures.

Le tableau ci-dessous est représentatif d'une page de gauche (P < 6 h). Les formules de calcul des éléments figurant dans les trois colonnes centrales sont indiquées directement dans le tableau. Elles doivent être complétées par celles donnant A_1 et A_2 qui sont :

$$\tan A_1 = \frac{-1}{\tan \alpha \,.\, \sin x} \quad \text{et} \quad \tan A_2 = \frac{-\tan \beta}{\sin x}$$

Ainsi que par la formule d'accès à la bonne page donnant x : $\sin x = \sin P \,.\, \cos D$.

Noms contraires			**x**			**Même nom**		
β °	A_1, A_2 °	α °	angle au pôle h m s	azimut °	déclin. hauteur ° ′	α °	A_1, A_2 °	β °
0	- 0,0	270	6.00.00	90,0	90° - x	90	+ 0,0	180
0<β<90	$A_{1,2}$<0	270>α>180	tanP = - tanx/cosα	tanZ = - tanx/sinβ	sinD = sinα.cosx sinH = - cosβ.cosx	90<α<180	$A_{1,2}$>0	180<β<90
90	- 90,0	180	x	x	0.00	180	+ 90,0	90
			c	b	a			
Répertoire **90 - x ou 90 + x**								

La page de droite se présente de façon identique, les formules étant les mêmes :

Noms contraires			x			Même nom		
β °	A_1, A_2 °	α °	angle au pôle h m s	azimut °	déclin. hauteur ° ′	α °	A_1, A_2 °	β °
360	0,0	270	6.00.00	90,0	90° - x	90	- 0,0	180
360>β>270	$A_{1,2}$>0	270<α<360	tanP = - tanx/cosα	tanZ = - tanx/sinβ	sinD = sinα.cosx sinH = - cosβ.cosx	90>α>0	$A_{1,2}$<0	180<β<270
270	90,0	360	12h - x	180 - x	0.00	0	- 90,0	270
			c	b	a			
Répertoire **90 - x ou 90 + x**								

Principe du calcul des éléments d'une droite de hauteur et exemple :

À partir des éléments d'observation et des coordonnées du point estimé, la procédure opératoire se décline comme suit :

1) Détermination de x, hauteur de zone, donc de la page de travail ;
2) 1re entrée dans la table, à la page correspondant à la valeur de x, pour déterminer le couple angle au pôle-déclinaison (P_a-D_a) le plus voisin du couple angle au pôle estimé-déclinaison réelle (P_e-D) ; détermination de la longitude du point auxiliaire ; lecture de l'arc α et de l'angle A_1 ;
3) Calcul de β et détermination de la latitude du point auxiliaire φ_a (nombre entier le plus proche de φ_e) ;
4) 2e entrée dans la table, à la même page, en fonction de β ; lecture de la hauteur H, de l'azimut A_z et de l'angle A_2 ;
5) Il y a ensuite deux possibilités pour construire la droite : corriger la hauteur en fonction de l'écart en déclinaison et de l'angle à l'astre puis calculer l'intercept et construire la droite à partir du point auxiliaire, ou effectuer graphiquement cette correction.

Les données de calcul de cet exemple sont les suivantes :

Estime		Coordonnées horaires		Observation	
φ_e	30° 18,0' S	AHap	91° 29,0'	H_v	39° 50,0'
G_e	30° 32,0' W	D	63° 10,0' S	Acrux	
$AHag_e$ = 60° 57,0' = 4h 03m 48s = P_e					

Evaluation de x :

Il s'agit de résoudre l'équation $\sin x = \sin P \,.\, \cos D$ équivalente, dans sa forme, à $\sin H = \sin(90° - x) \,.\, \cos \beta$ réalisée dans la colonne centrale de droite ; on entre dans la table avec le « repertoire », indiqué en bas de page, qui est le complément de l'argument porté en haut de page (répertoire = 90° - x). On donne à ce répertoire la valeur arrondie de l'angle au pôle estimé, soit 61° dans le cas de cet exemple. On considère ensuite, sur la page de gauche la colonne « β » auquel on attribue la valeur de la déclinaison arrondie, soit 63°. On trouve la valeur de x dans la colonne centrale de droite soit 23° 23,5 (le point situé à droite du nombre de minutes indique la demi-minute) que l'on arrondira à 23°. Cette première opération est illustrée sur l'extrait de table ci-après.

Noms contraires			29°			Même nom		
β °	A_1, A_2 °	α °	angle au pôle h m s	azimut °	déclin. hauteur ° ′	α °	A_1, A_2 °	β °
…	…	…	…	…	…	…	…	…
63	- 76,1	207	2.07.33	31,9	23.23.	153	+76,1	117
…	…	…	…	…	…	…	…	…
			c	b	a			
Répertoire 4 **h 04 m 7 h 56 m 61° 119°**								

On ouvre ensuite la table aux pages correspondant à x = 23° et on recherche la ligne sur laquelle figure le couple angle au pôle-déclinaison le plus proche de P_e = 4h 03m 48s et D = 63° 10'. L'extrait de table ci-dessous indique les valeurs retenues et on note les valeurs correspondantes de α et A_1 dans la partie « même nom », soit α = 104° et A_1 = + 32,5°.

L'angle au pôle auxiliaire est P_a = 4h 01m 17s = 60° 19', ce qui conduit à une longitude du point auxiliaire G_a = 31° 10' W.

Noms contraires			23°			Même nom		
β °	A_1, A_2 °	α °	angle au pôle h m s	azimut °	déclin. hauteur ° ′	α °	A_1, A_2 °	β °
…	…	…	…	…	…	…	…	…
13	- 30,6	257	4.08.19	62,1	63.45.	103	+ 30,6	167
14	- 32,5	256	4.01.17	60,3	63.16.	104	+ 32,5	166
15	- 34,4	255	3.54.31	58,6	62.46	105	+ 34,4	165
…	…	…	…	…	…	…	…	…
46	- 69,3	224	2.02.11	30,5	39.45	136	+ 69,3	134
…	…	…	…	…	…	…	…	…
			c	b	a			
Répertoire 4 **h 28 m 7 h 32 m 67° 113°**								

On calcule ensuite β = φ_a + α ; on prend comme latitude du point auxiliaire φ_a = 30° S, soit β = 134°. Pour cette valeur de β, on lit directement, aux mêmes pages A_z = S30,5°W, H_a = 39° 45', A_2 = + 69,3°.

L'ensemble des résultats est résumé sur le type de calcul ci-dessous, tel que présenté par les frères de Catalano.

(1)		(6)		(11)		(16)		(21)	
(2)		(7) φ_a	30°	(12)		(17)		(22)	
(3) P_e	4h 03m 48s	(8) α	104°	(13) H_v	39° 50'	(18) A_1	+ 32,5°	(23) D	63° 10,0'
(4) P_a	4h 01m 17s	(9) φ_a + α	134°	(14) H_a	39° 45'	(19) A_2	+ 69,3°	(24) D_a	63° 16,5'
(5)P_e–P_a	0h 02m 31s	(10) A_z	S30,5°W	(15)H_v-H_a	+ 5'	(20) A	+ 101,8°	(25) D-D_a	- 6,5'

Il reste à corriger la hauteur de l'écart en déclinaison (D – D_a) = - 6,5'. La première solution consiste à calculer la correction de hauteur de la forme $\Delta H = (D - D_a).\cos A$, A étant l'angle à l'astre égal à 101,8° dans cet exemple. On obtient + 1,3', soit une hauteur de calcul de 39° 46,3' et un intercept de + 3,7' que l'on arrondira à + 4'.

Les frères de Catalano préconisent un report graphique de la correction (figure A4-8). On porte donc l'intercept calculé H_v – H_a = + 5' dans la direction de l'azimut (point X de la figure) ; de ce point, on porte, à partir de la direction opposée à l'astre, l'angle A, vers le pôle élevé si celui-ci est positif (pôle Sud dans le cas de cet exemple). On reporte ensuite l'écart en déclinaison, dans la direction de A si cet écart est positif, dans l'autre sens sinon. On

fixe ainsi un point noté X’ sur la figure A4-8. De ce point, on mène la perpendiculaire à la direction de l’astre qui est la droite de hauteur cherchée.

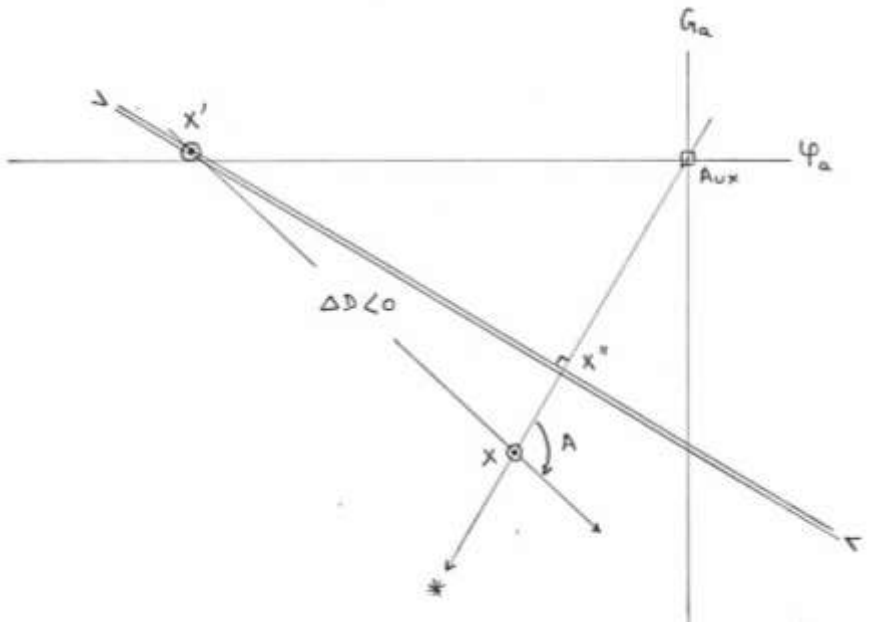


Fig : A4-8

Distance entre points estimé et auxiliaire :

Les valeurs que peut atteindre cette distance sont du même ordre de grandeur qu’avec les tables de Radler de Aquino. On établit également que la valeur maximale de l’écart en déclinaison peut atteindre 42’ au maximum.

ANNEXE 5-1

LA MÉTHODE BERTIN, CAS GÉNÉRAL

Principe de la Méthode Bertin :

Soit un triangle sphérique ABC quelconque, d'angles A, B, C, de côtés α, β, γ ; les compléments de ces éléments sont notés : A_ω, B_ω , C_ω , α_ω , β_ω , γ_ω .

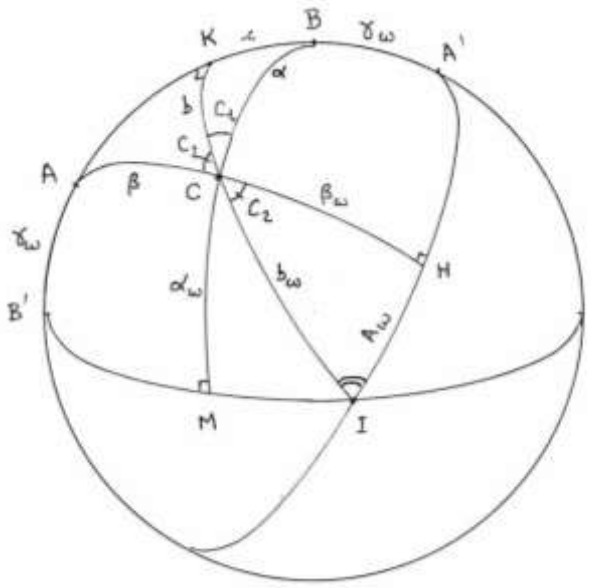


Fig : A5-1

Dans le triangle ABC, on suppose connus un angle, B, et deux côtés BC = α et AB = γ ou leurs compléments, α_ω et γ_ω. Sur la sphère représentée en figure A5-1, on mène les grands cercles de pôles A et B. Une de leur intersection, I, est un pôle du grand cercle passant par A et B ; les valeurs α_ω, β_ω et γ_ω sont représentées respectivement par les arcs MC, HC et B'A = A'B. Joignons I au sommet C, et prolongeons jusqu'en K ; l'angle en K du triangle BKC est droit, puisque I est un pôle de AB.

La résolution du triangle ABC peut s'obtenir au moyen de deux résolutions successives des triangles rectangles BKC et IHC se substituant à AKC, en remarquant bien que le premier triangle, BKC, est constitué d'une hauteur sphérique et d'un côté du triangle à résoudre ABC, que le second triangle, IHC, est opposé par le sommet à AKC et que ses éléments, autre que l'angle au sommet commun, sont les compléments d'éléments du triangle AKC.

<u>Résolution de BKC</u> :

- éléments connus : cohypoténuse α_ω, angle B,
- éléments à calculer : côtés c, b et angle C_1.

<u>Résolution de IHC</u> :

- éléments connus : cohypoténuse b, angle I = c + γ_ω (dans ce cas de figure)
- éléments à calculer : A_ω, β_ω, C_2.

On obtient ensuite les éléments cherchés, dans ce cas de figure : A = 90° - A_ω, β = 90° - β_ω et C = C_1 + C_2.

<u>Formulation</u> :

Triangle BKC	Triangle IHC
$\sin b = \cos \alpha_\omega . \sin B$ $\tan c = \cos B . \cot \alpha_\omega$ $\cot C_1 = \sin \alpha_\omega . \tan B$	$\sin \beta_\omega = \cos b . \sin I$ $\tan A_\omega = \cos I . \cot b$ $\cot C_2 = \sin b . \tan I$

Différents cas de figure :

Huit cas de figure, correspondant aux huit secteurs représentés sur la figure A5-2, sont à considérer suivant la position du point K par rapport aux points A et B. Dans le traitement pratique des problèmes de navigation astronomique, le côté correspondant à AB restera toujours inférieur à 90° et, seuls seront à considérer les cas 1, 2, 3 et 8 dont on donne les détermination des angles et côtés dans le tableau ci-après.

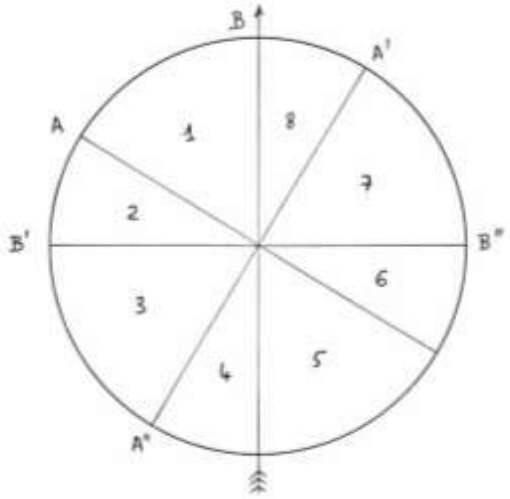


Fig : A5-2

	A	α	b	B	C	I
1	< 90°	< 90°	< 90°	< 90°	$C_1 + C_2$	< 90° $\gamma_\omega + c$
2	> 90°	< 90°	< 90°	< 90°	< 90° $C_1 - C_2$	> 90° $\gamma_\omega + c$
3	> 90°	> 90°	< 90°	< 90°	< 90° $C_1 - C_2$	> 90° $\gamma_\omega + c$
8	< 90°	< 90°	< 90°	> 90°	< 90° $C_2 - C_1$	< 90° $\gamma_\omega - c$

Dans la pratique, Charles Bertin donnera, pour chacun des cas de figure, des règles de détermination basées sur le nom, Nord ou Sud, des différents éléments considérés.

ANNEXE 5-2

LES PROCÉDÉS SOUILLAGOUËT ET LEBLANC

LE CARTON D'INTERPOLATION

Dans cette annexe, la hauteur de l'astre est exceptionnellement représentée par h ; les exemples sont traités avec les notations de la Tablette de Point Sphérique de 1919.

Droite de hauteur par le procédé « Souillagouët » :

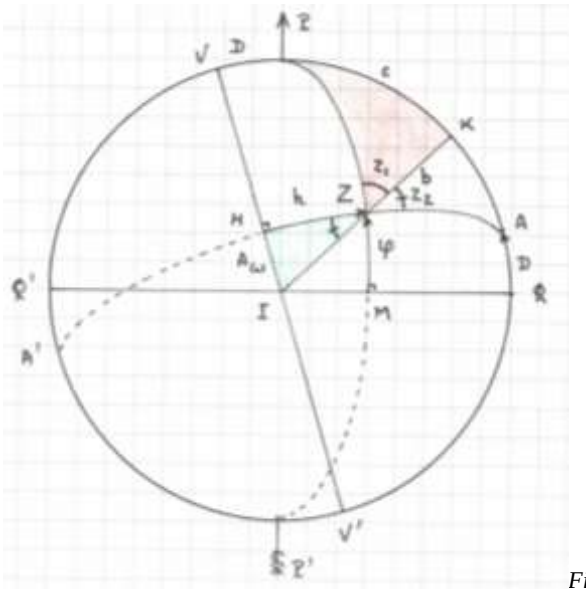


Fig : A5-3

Le triangle de position de l'astre PZA est décomposé en deux triangles rectangles selon la hauteur sphérique issue de Z, PKZ et ZKA (figure A5-3). En suivant la Méthode Bertin, on vérifie que les deux triangles rectangles à résoudre sont PKZ et ZHI. Le premier triangle PKZ se résout au moyen de la cohypoténuse MZ, donc de la latitude φ, qui est l'argument vertical de la table, et de l'angle en P, l'angle au pôle, argument horizontal de la table.

Ces deux données sont exprimées au tiers de degré entier (20') le plus proche des éléments estimés, ce qui définit les coordonnées du point auxiliaire.

Dans ces conditions, la tablette donne, sans interpolation, les éléments :

NS : c = PK EW : b = KZ ZA : Z_1 = angle PZK

c et Z_1 portent le nom du pôle élevé lorsque l'angle au pôle est aigu, celui du pôle abaissé dans le cas contraire. On forme ensuite la somme algébrique (c + D), qui conserve toujours le nom du pôle élevé. Cette somme donne l'angle en I, argument horizontal de la seconde résolution, celle du triangle ZHI dont la cohypoténuse ZK se trouve être l'élément EW de la première résolution : b.

On entre donc à nouveau dans la table à la ligne la plus voisine, par défaut ou par excès, de cet élément b, et à la colonne la plus voisine, par défaut ou par excès, de l'angle (c + D).

On lit :

NS : A_ω = HI EW : h = HZ ZA : Z_2 = angle HZI

Comme précédemment, A_ω et Z_2 portent le nom du pôle élevé lorsque l'angle (c + D) est aigu, celui du pôle abaissé dans le cas contraire. L'angle à l'astre est le complément de A_ω. On a A = 90° - A_ω si (c + D) est aigu et A = 90° + A_ω si (c + D) est obtus.

L'azimut est toujours la somme algébrique $Z = Z_1 + Z_2$, toujours compté du pôle élevé.

La hauteur, élément EW de la seconde résolution, est à interpoler pour les résidus d'angle (c + D) et de cohypoténuse b que l'on notera respectivement ΔX et Δb. La formule d'interpolation, que l'on obtient par différentiation puis transformation de celle donnant la hauteur en fonction de l'angle en I et du côté b, est de la forme :

$$\Delta h = \sin A_\omega . \Delta X - \cos Z_2 . \Delta b$$

Le calcul des deux termes constituant Δh s'effectue à l'aide d'une table d'interpolation imprimée sur un carton mobile. La hauteur auxiliaire h_a est égale à h corrigée de Δh.

On terminera le calcul par celui de l'intercept $h_v - h_a$ que l'on reportera sur la carte, ou le graphique, dans la direction de l'azimut (ou son opposé), à partir du point auxiliaire.

Exemple :

Suite à l'observation du Soleil, les calculs préliminaires ont donnés :

- latitude auxiliaire φ_a = 40° 40' N, angle au pôle auxiliaire P_a = 36° 00' W,
- déclinaison D = 7° 15,2' N,
- hauteur vraie : h_v = 43° 48,2'.

Première ouverture de table pour P = 36° et φ_a = 40° 40' N dont on a reproduit ci-dessous un extrait :

c + D, AH →	**324° 20' 35° 40'**			**324° 00' 36° 00'**		
b, ϕ ↓	NS c, A_ω	EW b, h	ZA Z_1, Z_2	NS c, A_ω	EW b, h	ZA Z_1, Z_2
30°	**54**360**30**197**70**3			**54**292**30**360**70**0		
-	-			-		
40° 40'	**43**240**26**149**64**9			**43**168**26**286**64**7		
-	-			-		
45°	**39**055**24**209**63**1			**38**584**24**335**62**8		
b, ϕ ↑	NS c, A_ω	EW b, h	ZA Z_1, Z_2	NS c, A_ω	EW b, h	ZA Z_1, Z_2
c + D, AH →	**215° 40' 144° 20'**			**216° 00' 144° 00'**		

on lit le groupe **43**168**26**286**64**7, ce qui correspond à : c = 43° 16,8' N, b = 26° 28,6' W, Z_1 = 64,7° N.

La seconde entrée dans la table va se faire pour la valeur arrondie au tiers de degré entier le plus proche de (c + D) = 50° 32', soit 50° 40' et pour la valeur arrondie dans les mêmes conditions de b = 26° 28,6' soit 26° 20'.

L'extrait de table est le suivant :

c + D, AH →	**309° 20’ 50° 40’**			**309° 00’ 51° 00’**		
b, ϕ ↓	NS c, A_ω	EW b, h	ZA Z_1, Z_2	NS c, A_ω	EW b, h	ZA Z_1, Z_2
15°	**67**050**48**205**72**5			**66**562**48**389**72**3		
-	-			-		
26° 20’	**52**009**43**531**61**6			**51**489**44**088**61**3		
-	-			-		
30°	**47**402**42**033**58**6			**47**280**42**181**58**3		
b, ϕ ↑	NS c, A_ω	EW b, h	ZA Z_1, Z_2	NS c, A_ω	EW b, h	ZA Z_1, Z_2
c + D, AH →	**230° 40’ 129° 20’**			**231° 00’ 129° 00’**		

On lit le groupe **52**009**43**531**61**6, ce qui correspond à A_ω = 52 00,9’ soit 52,0° N, h = 43° 53,1’, Z_2 = 61,6° N.

Il reste à effectuer l’interpolation double correspondant aux résidus de (c + D) et de b. Le carton d’interpolation est conçu de telle sorte qu’il suffise d’entrer avec le nombre de minutes et dixièmes de l’argument considéré (c + D ou b) et l’angle correspondant (A_ω ou Z_2) pour obtenir la quantité corrective avec son signe. On a :

- pour b : 28,6’ et Z_2 = 61,6°, la correction est de -4,1’ (correction négative car on entre par le haut : cohyp b -);
- pour c + D : 32’ et A_ω = 52°, la correction est de -6,3’ (correction négative car on entre par le bas et c + D aigu).

On donne ci-dessous un extrait de l’une des faces du carton d’interpolation :

	Angle (c+D) aigu + obtus -							**PP en 1/10 de minute**								**Cohyp b -**		
NS ↓	**05,2 25,2 45,2**								**08,2 28,2 48,2**	**08,5 28,5 48,5**	**08,8 28,8 48,8**						**10,0 30,0 50,0**	**ZA ↑**
1	0,1								0,1	↓	↓						0,2	**89**
										↓	↓							
28									3,9	4,0	4,1	←	←	←	←	←	←	**62**
29									4,0	4,1	4,3	←	←	←	←	←	←	**61**
52	→	→	→	→	→	→	→	6,2	6,5	6,7								**38**
								↑	↑									
90	5,2							↑	↑	8,5							10,0	**0**
↓ NS	**14,8 34,8 54,8**							**12,1 32,1 52,1**	**11,8 31,8 51,8**	**11,5 31,5 51,5**							**10,0 30,0 50,0**	**↑ ZA**
	Angle (c+D) aigu – obtus +							**PP en 1/10 de minute**								**Cohyp b +**		

Principe de la construction de la table d’interpolation.

Prenons par exemple l’interpolation selon (c + D) égale à $\sin A_\omega . \Delta X$, dans laquelle ΔX est le résidu de (c + D). Le nombre (c + D) s’écrit sous la forme DD MM,m (nombre de degrés suivi du nombre de minutes et de dixièmes). Posons, pour simplifier l’écriture, que MM,m = a ; ce nombre est compris entre 0’ et 60’ ; selon la proximité de a de 0’, 20’, 40’ ou 60’ le résidu ΔX se calcule conformément aux indications de la 2e colonne du tableau ci-dessous et le terme correctif s’évalue ensuite en effectuant le produit $\sin A_\omega . \Delta X$; le signe du terme correctif se détermine ensuite simplement comme indiqué ci-dessous.

a	ΔX	ΔX affecté du signe	Signe de Δh	
			Si A_ω aigu	Si A_ω obtus
0’ < a < 10’	a	+	+	-
10’< a < 20’	20’ – a	-	-	+
20’ < a < 30’	a – 20’	+	+	-
30’ < a < 40’	40’ – a	-	-	+
40’ < a < 50’	a – 40’	+	+	-
50’ < a < 60’	60’ – a	-	-	+

Pour un même ΔX, nous avons 6 valeurs de a possibles. On met le terme correctif en table en regroupant ces 6 valeurs de a en entrée d’une même colonne (3 en haut donnant accès à une correction positive (par exemple), et 3 en bas donnant accès à une correction négative) et en croisant avec des lignes graduées en valeur angulaire (A_ω) ; il n’est donc pas nécessaire d’évaluer le résidu : on entre dans le carton d’interpolation directement avec le nombre de minutes et de dixièmes de (c + D).

Le procédé de calcul du terme correctif résultant du résidu de b est rigoureusement identique.

Le carton d’interpolation comporte deux faces (l’extrait ci-dessus correspond à une face), l’intervalle d’argumentation de a étant de 0,3’.

On remarquera cependant que l’utilisation du carton requiert une certaine habitude.

Les différents éléments de calcul sont regroupés dans la grille ci-après :

NS		EW		ZA	
c =	43° 16,8’N	b =	26° 28,6’W	Z_1 =	64,7° N
D =	7° 15,2’N				
c + D =	50° 32,0’N	h =	43° 53,1’	Z_2 =	61,6° N
A_ω =	52,0°		-6,3’		126,3° N
			-4,1’		
		h_a =	43° 42,7’	Z =	N126,3°W
				=	233,7°

L’intercept est donc $h_v – h_a$ = 43° 48,2’ – 43° 42,7’ = +5,5’ au 233,7°.

Droite de hauteur par le procédé « Leblanc » :

Le triangle de position de l’astre PZA est décomposé en deux triangles rectangles selon la hauteur sphérique issue de A, PKA et ZKA (figure A5-4). En suivant la Méthode Bertin, on vérifie que les deux triangles rectangles à résoudre sont PKA et AHE. Le premier triangle PKA se résout au moyen de la cohypoténuse QA, donc de la déclinaison D, qui est l’argument vertical de la table, et de l’angle en P, l’angle au pôle, argument horizontal de la table.

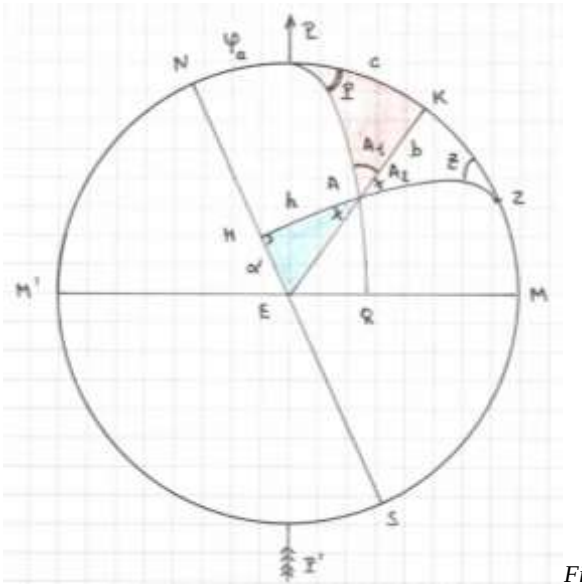


Fig : A5-4

Ces deux données sont exprimées au tiers de degré entier (20') le plus proche de la déclinaison considérée et de l'angle au pôle estimé.

Dans ces conditions, la tablette donne, sans interpolation, les éléments :

NS : c = PK EW : b = AK ZA : A_1 = angle PAK

c et A_1 portent le nom du pôle élevé lorsque l'angle au pôle est aigu, celui du pôle abaissé dans le cas contraire. On forme ensuite la somme algébrique $(c + \varphi_a)$, qui conserve toujours le nom du pôle élevé. Cette somme fournit l'angle en E, HEK, argument horizontal de la seconde résolution, celle du triangle HEK dont la cohypoténuse EA se trouve être l'élément EW de la première résolution : b. La latitude φ_a est la latitude du point auxiliaire choisi, aussi proche que possible de la latitude estimée, et telle que la somme $(c + \varphi_a)$ soit un argument d'entrée dans la table.

On entre donc à nouveau dans la table à la ligne la plus voisine, par défaut ou par excès, de l'élément b, et à la colonne de l'angle $(c + \varphi_a)$.

On lit :

NS : A_ω = HE EW : h = HA ZA : A_2 = angle HAE

Comme précédemment, A_ω et A_2 portent le nom du pôle élevé lorsque l'angle $(c + \varphi_a)$ est aigu, celui du pôle abaissé dans le cas contraire. L'azimut est le complément de A_ω. On a $A = 90° - A_\omega$ si $(c + \varphi_a)$ est aigu et $A = 90° + A_\omega$ si $(c + \varphi_a)$ est obtus.

L'angle à l'astre est toujours la somme algébrique $A = A_1 + A_2$, toujours compté du pôle élevé.

Pour obtenir h_a, la hauteur h reste à corriger :

- du résidu de b, comme dans le procédé Souillagouët, de la forme $-\Delta b.\cos A_2$,
- du résidu sur la déclinaison puisque l'on a utilisé dans le calcul D_a au lieu de D ; on a vu lors de l'étude des tables de Radler de Aquino et de de Catalano que la correction est de la forme $(D - D_a).\cos A$.

Les termes correctifs seront obtenus à l'aide du carton d'interpolation.

Exemple :

Les données de calculs sont réunies dans le tableau ci-dessous :

Estime		Coordonnées horaires		Observation	
φ_e	42° 43’ S	AHap	68° 50,9’	H_v	34° 52,8’
G_e	120° 56’ W	D	10° 44,9’ S		
Angle au pôle P_e = 52° 05,1’ E					

La première entrée se fait avec P_a = 52° 00’ E et D_a = 10° 40’ S ; la longitude auxiliaire est alors G_a = 120° 50,9’ W. On obtient le groupe numérique : **72**594**50**450**76**7.

Pour arrondir (c + φ_e), on adoptera comme latitude auxiliaire φ_a = 42° 40,6’ S ; la seconde entrée dans la table, avec 115° 40’ (en bas) et 50° 40’ (b arrondi, à gauche) donne le groupe numérique : **19**325**34**504**31**9. La grille de calcul est alors :

NS		EW		ZA	
c =	72° 59,4’S	b =	50° 45,0’E	A_1 =	76,7° S
φ_a =	42° 40,6’S				
c + φ_a =	115° 40,0’S	h =	34° 50,4’	A_2 =	31,9° N
α =	NE 19,5°		+3,5’	A =	44,8° S
			-4,2’		
		h_a =	34° 49,7’	Z =	070,5°

Le premier terme correctif de h correspond à $\Delta D.\cos A = 4{,}9.\cos 44{,}8 = 3{,}5'$. Le second terme correspond au résidu sur b. Ces deux termes se déterminent avec le carton d’interpolation.

L’intercept est donc $h_v - h_a$ = +3,1’.

On donne ci-dessous les extraits de table nécessaires :

c + D, AH →	**308° 00’**		**52° 00’**
b, ϕ ↓	NS c, A_ω	EW b, h	ZA Z_1, Z_2
00°	**90**000**52**000**90**0		
-	-		
10° 40’	**72**594**50**450**76**7		
-	-		
15°	**66**288**49**340**71**7		
b, ϕ ↑	NS c, A_ω	EW b, h	ZA Z_1, Z_2
c + D, AH →	**232° 00’**		**128° 00’**

c + D, AH →	**295° 40’**		**64° 20’**
b, ϕ ↓	NS c, A_ω	EW b, h	ZA Z_1, Z_2
45°	**23**251**39**356**34**2		
	-		
50° 40’	**19**325**34**504**31**9		
	-		
60°	**14**024**26**472**29**0		
b, ϕ ↑	NS c, A_ω	EW b, h	ZA Z_1, Z_2
c + D, AH →	**244° 20’**		**115° 40’**

ANNEXE 5-3

TABLETTE BERTIN 1939

RÉSOLUTION MULTIPLE DE TRIANGLES SPHÉRIQUES RECTANGLES

Dans la Tablette Bertin de 1939, les deux arguments d'entrée sont exprimés de 20' en 20', de 0° à 90° pour la cohypoténuse a_ω et de 0° à 90° ainsi que de 270° à 360° pour l'angle B (en échelle supérieure) et de 90° à 180° puis de 180° à 270° pour B' (en échelle inférieure).

Les éléments tabulés, notés avec les symboles c, b et C résultent des formules :

$\tan c = \cot a_\omega . \cos B$	$\sin b = \cos a_\omega . \sin B$	$\cot C = \sin a_\omega . \tan B$

Ces éléments sont exprimés au dixième de minute près, et écrits sous la forme d'un groupe numérique typographié selon la convention devenue usuelle dans les ouvrages de Bertin. On aura par exemple : **47**116**30**071**65**044 exprimant c = 47° 11,6', b = 30° 07,1', C = 65° 04,4'.

À ce stade, et par rapport à la Tablette 1929, le seul changement porte sur C exprimé avec une précision égale à celle des deux autres éléments. Ce niveau de précision équivalent des trois éléments a amené l'auteur à abandonner la notation NS-EW. Charles Bertin a ensuite doublé les échelles existantes par des échelles de valeur complémentaire, dites échelles secondaires, qui vont permettre de résoudre un triangle sphérique rectangle de dix façons différentes.

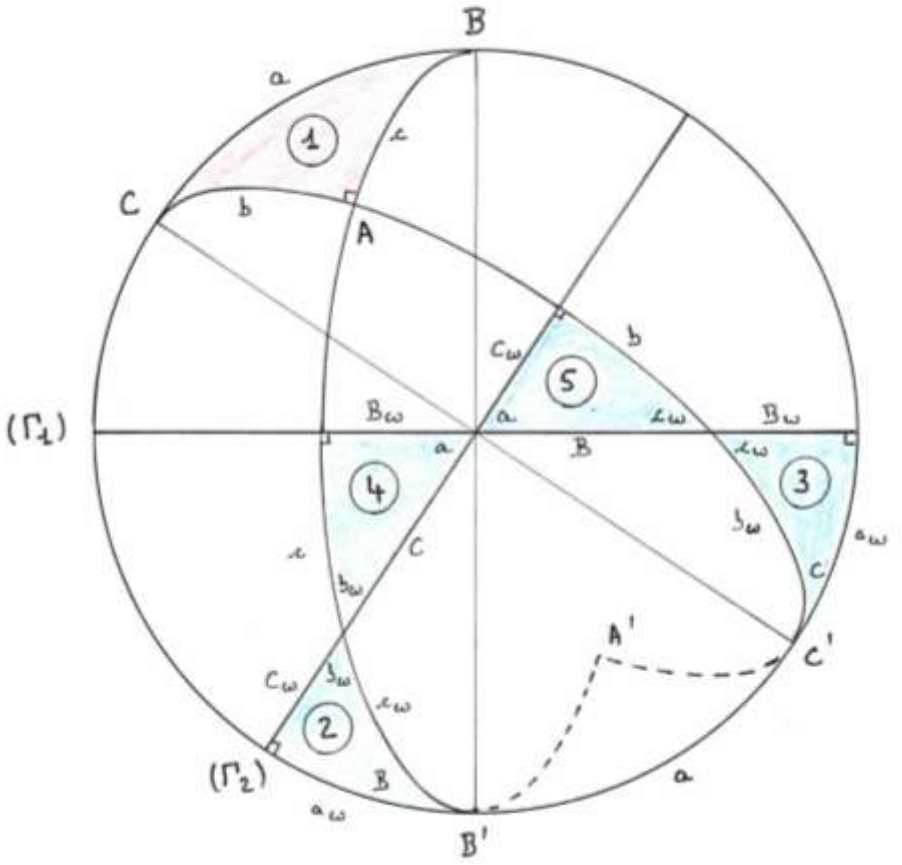


Fig : A5-5

Considérons, sur la sphère de la figure A5-5, le triangle sphérique ABC, rectangle en A, d'angles non droits B et C et de côté a (hypoténuse), b et c. Les compléments de ces éléments sont désignés, comme à l'habitude, par l'indice ω. On trace complètement les demi-grands cercles supports des côtés CA (CAC') et BA (BAB') ainsi que les demi-grands cercles (Γ_1) de pôles B et B' et (Γ_2) de pôles C et C'. Sur la figure, ces deux demi-grands cercles, situés dans des plans perpendiculaires au plan de figure, sont représentés chacun par un segment.

Sur l'hémisphère situé sur l'avant du plan de figure, ces quatre demi-grands cercles et le grand cercle BCB'C' forment quatre triangles rectangles notés 2, 3, 4 et 5 auxquels s'ajoute le triangle origine ABC noté 1. L'étude géométrique de la figure permet d'indiquer les valeurs angulaires des éléments de tous les triangles. On note que ces éléments ont des mesures égales ou complémentaires à celles des éléments du triangle 1. On a reporté le point A' (sur l'autre hémisphère de la sphère), symétrique de A par rapport au centre ; le triangle A'B'C' a mêmes éléments que ABC.

Partant du principe que la table est construite sur la base de la connaissance de la cohypoténuse et d'un angle du triangle, on peut établir dans chaque triangle deux formules permettant d'évaluer les inconnues :

Triangle 1	en fonction de a_ω et B	→	c, b, C	(1)
	en fonction de a_ω et C	→	b, c, B	(1')
Triangle 2	en fonction de c et b_ω	→	C_ω, a_ω, B	(2)
	en fonction de c et B	→	a_ω, C_ω, b_ω	(2')
Triangle 3	en fonction de b et C	→	a_ω, B_ω, c_ω	(3)
	en fonction de b et c_ω	→	B_ω, a_ω, C	(3')
Triangle 4	en fonction de C_ω et a	→	B_ω, c, b_ω	(4)
	en fonction de C_ω et b_ω	→	c, B_ω, a	(4')
Triangle 5	en fonction de B_ω et c_ω	→	b, C_ω, a	(5)
	en fonction de B_ω et a	→	C_ω, b, c_ω	(5')

Un même triangle rectangle peut donc être résolu de 10 façons différentes suivant les éléments connus au départ, et ceci, avec la même table. Les doubles échelles, initiale et secondaire, permettent les entrées directes.

Les combinaisons symétriques sont celles qui utilisent les mêmes arguments d'entrée (ou leur complément) pris dans un ordre inverse. Ces combinaisons sont les suivantes :

1 et 5' (a et B), 2 et 3' (c et b), 3 et 4' (b et C), 4 et 1' (C et a) et 5 et 2' (B et c).

On note que, pour les combinaisons symétriques :

- l'élément central est le même,
- les éléments extrêmes sont intervertis et complémentaires.

Cette dernière propriété sera notamment utilisée pour interpoler.

Charles Bertin donne l'exemple que nous reproduisons ci-dessous en le complétant avec l'indication des numéros de triangle tel que définis ci-dessus. Bertin note :

> « *Il est donné un exemple exceptionnel ; remarquons toutefois que les deux premières lignes et les deux dernières colonnes correspondent à des arguments égaux à des demi-degrés* (il a donc fallu interpoler, NdA) *; alors que les trois dernières lignes et les trois premières colonnes correspondent à d'exacts tiers de degré d'arguments et s'emploient conséquemment à simple lecture dans l'ouvrage*. »

La ligne supérieure du tableau et la colonne de gauche correspondent aux échelles secondaires (compléments) de la Tablette.

		B_ω = **61**000	c = **51**400	a_ω = **34**400	b = **23**300	C_ω = **17**300
		B = **29**000	c_ω = **38**200	a = **55**200	b_ω = **66**300	C = **72**300
C = **72**300	C_ω = **17**300	…	…	**61**000**51**400**66**300 (4)	**51**400**61**000**55**200 (4')	…
b_ω = **66**300	b = **23**300	…	**61**000**34**400**72**300 (3')	…	…	**34**400**61**000**38**200 (3)
a = **55**200	a_ω = **34**400	**51**400**23**300**72**300 (1)	…	…	…	**23**300**51**400**29**000 (1')
c_ω= **38**200	c = **51**400	**34**400**17**300**66**300 (2')	…	…	**17**300**34**400**29**000 (2)	…
B = **29**000	B_ω = **61**000	…	**23**300**17**300**55**200 (5)	**17**300**23**300**38**200 (5')	…	…

On constatera la cohérence de l'ensemble en identifiant, dans chaque case du tableau ci-dessus, les inconnues en fonction des données. De même, il vérifiera aisément les combinaisons symétriques.

ANNEXE 5-4

INTERCALAIRE D'INTERPOLATION, EXEMPLES DE CALCULS

Les interpolations peuvent naturellement se faire en utilisant la technique des « parties proportionnelles » ou, pour l'élément en colonne centrale (EW), un utilisant le carton d'interpolation annexé à la Tablette 1939. Cependant, Charles Bertin a imaginé une méthode d'interpolation graphique, basée sur ce qu'il a baptisé l'« intercalaire », qui permet d'interpoler simultanément les deux premiers éléments et peut s'étendre au troisième élément.

Résidus d'arguments :

Le résidu d'argument est la différence de valeur, par excès ou par défaut, existant entre la donnée à utiliser et l'argument, à choisir le plus proche, par lequel on le remplace. Ces résidus s'évalueront en minutes et dixièmes et, dans le cas de la Tablette, seront essentiellement compris entre 0,1' et 10,0'.

On considèrera les résidus par rapport aux lignes (ou résidus ligne) que l'on notera Δa_ω et les résidus par rapport aux colonnes (ou résidus colonne) que l'on notera ΔB.

Plus précisément, le résidu de descente (resp montée) est le résidu ligne qui oblige à descendre (resp monter) dans l'entreligne de la table si on part de l'argument le plus proche vers la donnée qui en a imposé le choix.

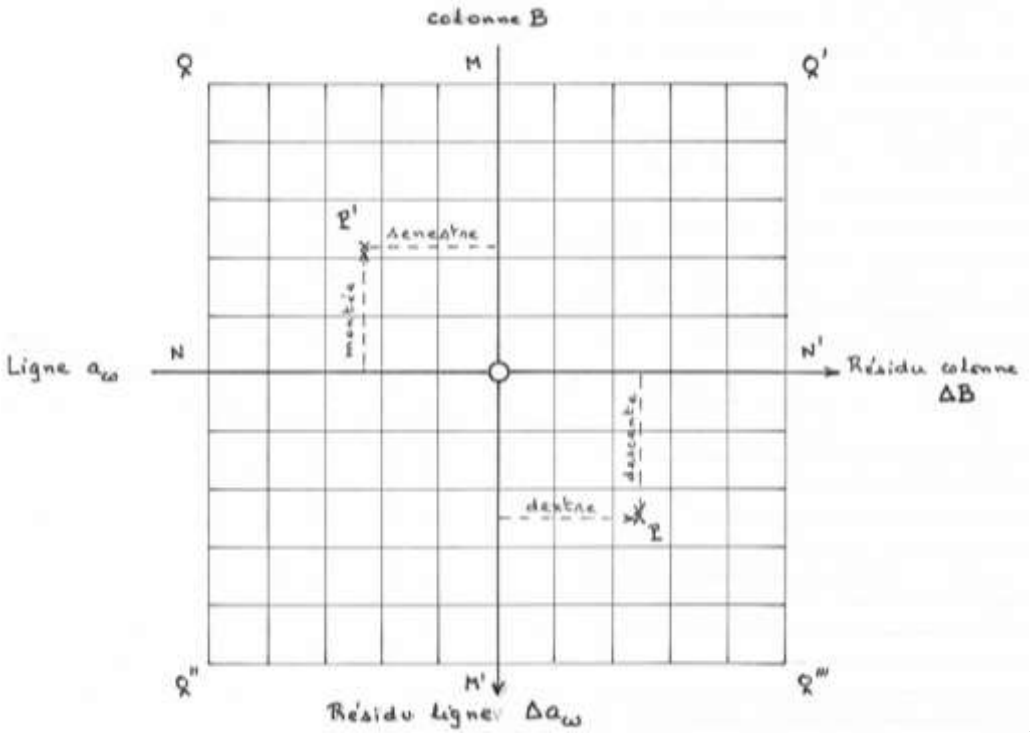


Fig : A5-6

De même, le résidu dextre (resp sénestre) est le résidu colonne qui oblige à se déplacer latéralement vers la droite (resp gauche) dans l'entrecolonne pour aller, à partir de l'argument le plus proche, vers la donnée qui en a imposé le choix.

Sur le graphique ci-dessus (figure A5-6), le point central correspond à l'intersection d'une ligne et d'une colonne de la Tablette (les valeurs de a_ω et de B correspondent à des arcs multiples exacts de tiers de degrés). A partir de

ce centre, on construit deux axes orthogonaux gradués de minutes en minutes (ou de 2 en 2 minutes). Les résidus définis permettent de placer les points représentatifs des données de calcul. Remarquer que les axes sont orientés dans le sens croissant des arguments principaux, soit vers la droite, pour B et ΔB, et vers le bas pour a_ω et Δa_ω.

Dans les deux cas de figure indiqués :

P est fixé par un résidu de descente de 2,5' et un résidu dextre de 2,5' et P' est fixé par un résidu de montée de 2,2' et un résidu sénestre de 2,3'.

Les qualificatifs dextre et senestre ont été donnés par Charles Bertin ; il n'est pas attaché de signe aux résidus.

Variations des éléments calculés en fonction des résidus :

La différentiation des formules de calcul des éléments c, b et C permet d'établir les expressions des variations des éléments en fonction des petites variations des arguments a_ω et B et des valeurs des autres éléments au point considéré. Avec la symbolisation de la Tablette 1939, on obtient :

$$\Delta c = \sec b.(-\Delta B.\cos c.\sin b - \Delta a_\omega.\sin C)$$

$$\Delta b = \Delta B.\sin c - \Delta a_\omega.\cos C$$

$$\Delta C = \sec b.(-\Delta B.\cos c - \Delta a_\omega.\sin C.\sin b)$$

Dans ces expressions, les petites variations Δa_ω et ΔB sont les résidus des arguments. A ces résidus correspondent les variations cherchées sur les éléments calculés, Δc, Δb et ΔC.

Considérons pour le moment les deux premières expressions ; elles peuvent s'écrire :

$$\Delta a_\omega = \frac{-\sin b.\cos c}{\sin C}.\Delta B - \frac{\cos b}{\sin C}.\Delta c \text{ et } \Delta a_\omega = \frac{\sin c}{\cos C}.\Delta B - \frac{\Delta b}{\cos C}$$

Les coefficients qui affectent les variations ΔB, Δc et Δb sont des nombres réels fixés pour un point de calcul donné. Pour des valeurs de Δc et Δb variant de minute en minute (ou de 2' en 2'), ces équations sont donc celles de deux faisceaux de droites parallèles dans le repère orthogonal représenté en page précédente.

Pour illustrer ce raisonnement, prenons l'exemple de la construction d'un intercalaire d'interpolation autour des arguments a_ω = 49° et B = 53°, donc au groupe **27**370**31**359**44**574, ce qui donne :

c = 27° 37,0' b = 31° 35,9' C = 44° 57,4'

Pour ces valeurs, les équations des deux faisceaux de droites s'écrivent :

$$\Delta a_\omega = -0{,}6571.\Delta B - 1{,}2055.\Delta c \text{ et } \Delta a_\omega = 0{,}6551.\Delta B - 1{,}4131.\Delta b$$

Si on donne à Δc et à Δb les valeurs entières positives et négatives allant de 0 à quelques minutes, on peut construire, dans le même repère que celui des résidus d'arguments, le réseau de droites ci-après (figure A5-7).

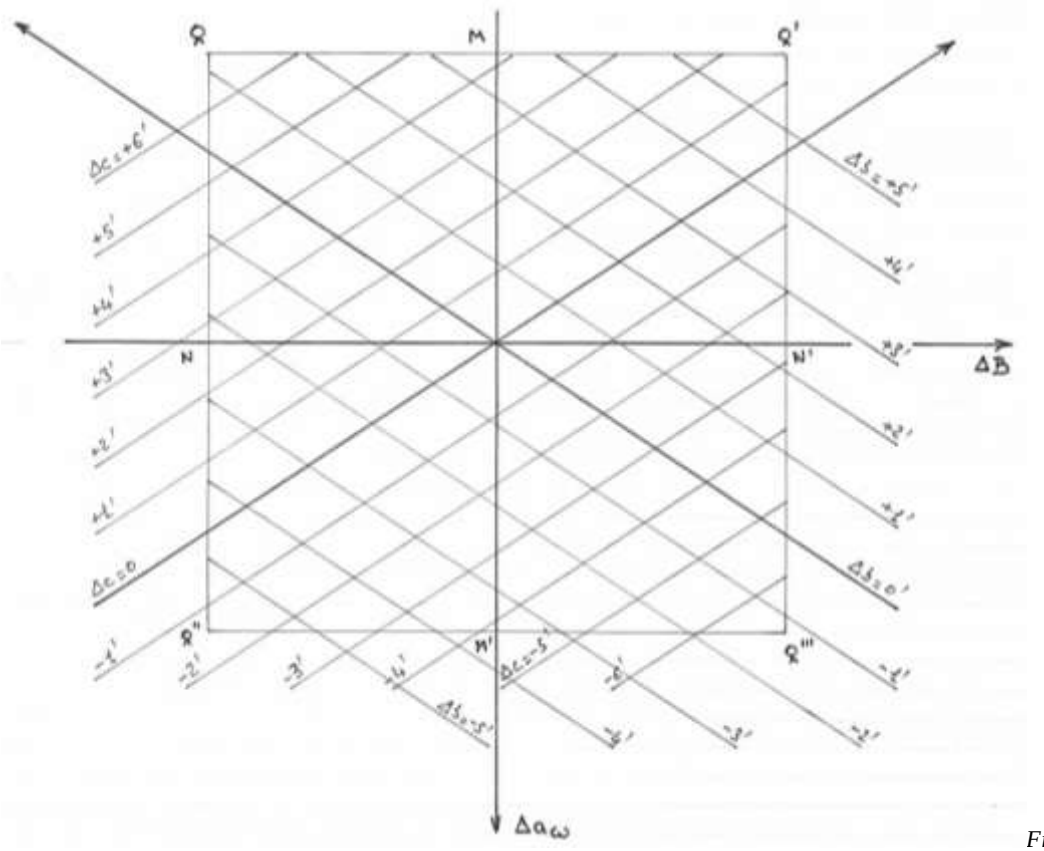


Fig : A5-7

Pour ces valeurs, l'intercalaire est obtenu en superposant ce réseau de droites avec le repère rectangulaire représenté en figure A5-6. On obtient le montage représenté en figure A5-8 :

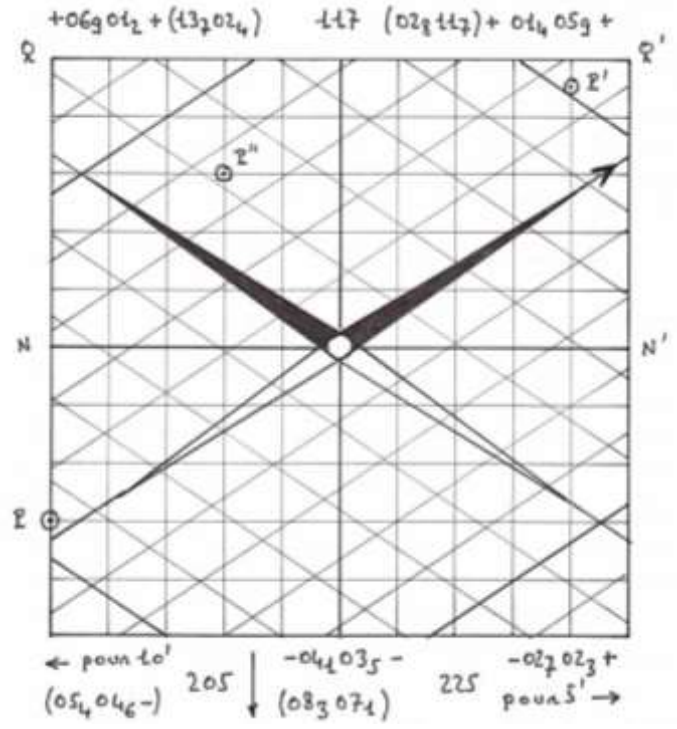


Fig : A5-8

Un intercalaire est attaché à un couple (a_ω, B). Il devrait en toute rigueur, y avoir autant d'intercalaires que de groupes de résolution dans la Tablette, ce qui est naturellement impossible. Charles Bertin a choisi de construire un intercalaire pour 36 triangles résolus, appartenant à 6 lignes et 6 colonnes voisines dans l'ouvrage, ce qui revient

à avoir 9 intercalaires par paire de pages (soit au total 2025 intercalaires … « *l'auteur qui les a dressé tous à lui tout seul, peut assurer que c'est là lourde besogne* »). Pour interpoler, on choisit l'intercalaire dont le centre est le plus voisin de la ligne utilisée. Le réseau de droites obliques de chaque intercalaire est muni d'un système de flèches indiquant les sens positifs des variations Δb (flèche principale noire) et Δc (autre flèche noire). Les échelles peuvent être utilisées en simple (0 à 5') ou en double (0 à 10').

Les intercalaires sont encadrés, en haut et en bas, par une série de chiffres (figure A5-8).

En haut. Au centre, le nombre 117 correspond à 100.secb, b étant l'élément central du groupe numérique. On a ensuite, aux extrémités : +**06**$_9$**01**$_2$+ (à gauche) et +**01**$_4$**05**$_9$+ (à droite) ; ces groupes numériques correspondent aux variations Δc et Δb aux points Q et Q' du graphique, pour des résidus de 5'. En d'autres termes, pour un couple de résidus de 5' senestre et de 5' montée, Δc = +6,9' et Δb = +1,2' ; de même, pour un couple de résidus de 5' dextre et 5' montée, les valeurs respectives sont de 1,4' et 5,9'. Toujours sur la ligne du haut, les valeurs entre parenthèses correspondent à des couples de résidus de 10'.

En bas. Le groupe numérique central -**04**$_1$**03**$_5$- donne les variations Δc = -4,1' et Δb = -3,5' pour le couple de résidu 5' descente et 0 ; on trouve, au-dessous en entre parenthèses les variations pour un résidu doublé ; le groupe de gauche **05**$_4$**04**$_6$- donne le couple de variation Δc et Δb correspondant au résidu 0 en ligne et 10' senestre, celui de droite donne ce couple correspondant au résidu 0 en ligne et 5' dextre. Les nombres 205 et 225 sont des renvois vers les pages permettant l'interpolation du 3e élément (voir paragraphe suivant).

L'intercalaire va donc être utilisé :

- en premier lieu pour interpoler les deux premiers éléments, c et b, d'un groupe en fonction des résidus d'entrée Δa_ω et ΔB,
- en second lieu pour interpoler, le cas échéant, le troisième élément C en utilisant un artifice permettant l'usage d'un intercalaire.

Principe de l'interpolation du troisième élément :

Charles Bertin propose deux méthodes qu'il admet être équivalentes : « *L'un des procédés n'est pas plus à recommander que l'autre, chacun possède sa vérification utile : …* ».

1re méthode : Elle consiste à utiliser la résolution symétrique. Dans de nombreux cas, on utilise la résolution (1) dans laquelle les données sont a_ω et B, les éléments fournis par la Tablette étant, dans l'ordre, c, b, C. Si on utilise la résolution (5'), symétrique de (1), nous auront, en fonction de B_ω et de a, C_ω, b, c_ω en éléments fournis, avec notamment, C_ω en premier élément que l'on pourra facilement interpoler avec l'intercalaire correspondant. On en déduira C. L'un des renvois correspond à la page où se trouve l'intercalaire à utiliser.

2e méthode : Elle consiste à utiliser la résolution (1') qui, par rapport à la résolution (1), permute les angles B et C ainsi que les deux côtés b et c. On a donc, dans cette résolution a_ω et C en données d'entrée et en éléments fournis b, c, B, pris dans cet ordre.

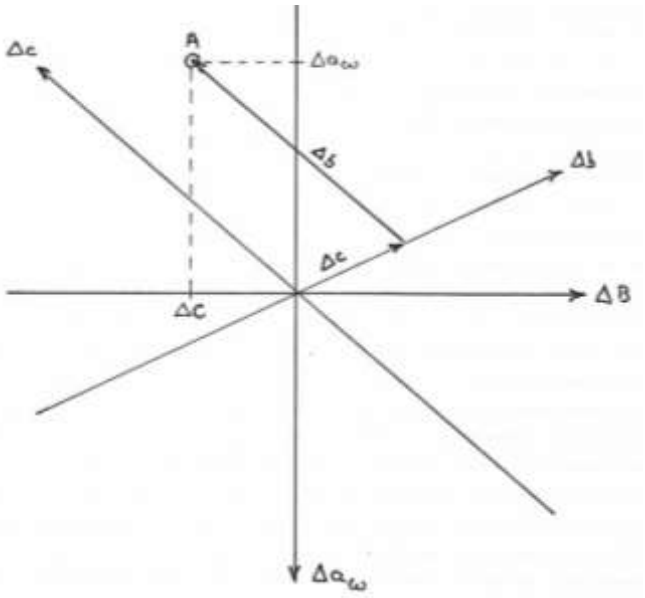


Fig : A5-9

On utilise l'intercalaire correspondant à la paire (a_ω, C) et indiquée par le second renvoi situé sous l'intercalaire d'origine. Cette dernière intercalaire est schématisée sur la figure A5-9. Rappelons que, dans une première opération, on a déterminé les interpolations sur c et b (Δc et Δb) et qu'il s'agit maintenant de calculer ***la variation correspondante de C***, ΔC. Etant donné que le changement de résolution a interverti les côtés b et c, nous allons appliquer, sur l'axe des Δb, la variation Δc et parallèlement à l'axe des Δc, la variation Δb (avec leurs signes respectifs). On obtient le point représentatif A dont on peut lire les coordonnées ΔC cherchée et Δa_ω qui doit être identique au résidu initial dans le calcul (élément de vérification).

Exemples de calcul :

Nous allons expliciter cette pratique sur trois exemples construits à partir de couple a_ω = 49° et B = 53°, donc sur le groupe d'éléments fournis par la Tablette **27**370**31**359**44**574, soit :

c = 27° 37,0' b = 31° 35,9' C = 44° 57,4'

L'intercalaire d'interpolation correspondant est celui que nous avons calculé et représenté en figure 5-8.

Exemple 1 : calcul des valeurs de c, b et C pour a_ω = 49° 03', B = 52° 55'.

On débute les opérations par c et b. Dans la Tablette, partant de la ligne 49°, il faudrait descendre dans la table pour atteindre une ligne 49° 03' ; on a donc un premier résidu de 3' « descente ». Puis, partant de la colonne 53°, il faudrait aller vers la gauche pour rejoindre une colonne 52° 55' ; on a donc un second résidu de 5' « senestre ». On peut donc placer, sur l'intercalaire, un point représentatif P dont on lit les valeurs d'interpolation : Δc = +0,2' et Δb = -4,5'. On a en définitive :

c = 27° 37,0' + 0,2' = 27° 37,2' ; b = 31° 35,9' – 4,5' = 31° 31,4'.

Pour l'interpolation sur C, on utilise la méthode relative à la résolution symétrique. Les données d'entrée sont B_ω = 90° - B = 37° 05' et a = 90° - a_ω = 40° 57' ; les valeurs d'entrée dans la Tablette sont donc 37° (en ligne) et 41° (en colonne). Le groupe correspondant figure en effet à la page 205 et est de la forme **45**026**31**359**62**230, soit C_ω= 45° 02,6', b = 31° 35,9' et c_ω= 62° 23,0' (on remarquera que l'on retrouve tous les éléments du triangle).

Pour aller du point « Tablette » au point considéré, nous avons les résidus 5' « descente » (de 37° à 37° 05') et 3' « senestre » (de 41° à 40° 57'). L'intercalaire correspondant (page 205, non représentée ici) donne ΔC_ω = -3,9'. On a donc C_ω = 45° 02,6' – 3,9' = 44° 58,7'.

D'où, enfin, C = 90° - C_ω = 45° 01,3'.

Exemple 2 : calcul des valeurs de c, b et C pour a_ω = 48° 51', B = 53° 08'.

On débute de même les opérations par c et b. Dans la Tablette, partant de la ligne 49°, il faudrait monter dans la table pour atteindre une ligne 48° 51' ; on a donc un premier résidu de 9' « montée ». Puis, partant de la colonne 53°, il faudrait aller vers la droite pour rejoindre une colonne 53° 08' ; on a donc un second résidu de 8' « dextre ». On peut donc placer, sur l'intercalaire, un point représentatif P' dont on lit les valeurs d'interpolation : Δc = +3,1' et Δb = +10,0' (il faut ici doubler l'échelle). On a en définitive :

c = 27° 37,0' + 3,1' = 27° 40,1' ; b = 31° 35,9' + 10,0' = 31° 45,9'.

Pour l'interpolation sur C, on utilise de même la méthode relative à la résolution symétrique. Les données d'entrée sont B_ω = 90° - B = 36° 52' et a = 90° - a_ω = 41° 09' ; les valeurs d'entrée dans la Tablette sont de même 37° (en ligne) et 41° (en colonne). Le groupe correspondant est évidemment identique à celui de l'exemple précédent.

Pour aller du point « Tablette » au point considéré, nous avons les résidus 8' « montée » (de 37° à 36° 52') et 9' « dextre » (de 41° à 41° 09'). L'intercalaire correspondant (page 205, non représentée ici) donne ΔC_ω = +4,4'. On a donc C_ω = 45° 02,6' + 4,4' = 45° 07,0'.

D'où, enfin, C = 90° - C_ω = 44° 53,0'.

Exemple 3 : calcul des valeurs de c, b et C pour a_ω = 48° 57', B = 52° 58'.

Selon le même processus que ci-dessus, le calcul de c et de b ne pose pas de difficultés ; le point représentatif est P'' et on trouve Δc = +3,6' et Δb = +1,2', ce qui donne c = 27° 40,6' et b = 31° 37,1'.

Pour l'interpolation sur C, utilisant toujours la même méthode, nous obtenons, à partir du même groupe d'éléments, des résidus de 2' descente et 3' dextre, ce qui conduit à ΔC_ω = -3,3' puis à C = 45° 00,7'.

A titre documentaire (et comparatif), il est intéressant de faire le calcul d'interpolation de C par les « parties proportionnelles ». On prend ici les valeurs numériques de l'exemple 2. Les données numériques et résultats peuvent se résumer sur le tableau ci-dessous :

a_ω	B =53° 00'	B = 53° 08'	B = 53° 20'
48° 40'	**C = 45° 06,1'**		**C = 44° 45,3'**
48° 51'	45° 01,3'	**C = 44° 53,0'**	44° 40,5'
49° 00'	**C = 44° 57,4'**		**C = 44° 36,5'**

Mode opératoire :

La diminution de C, pour a_ω augmentant de 20' est de 8,7' (colonne 53°) et 8,8' (colonne 53° 20'). Pour une augmentation de a_ω de 11' (de 48° 40' à 48° 51'), C diminue de $8{,}7.11/20 \approx 8{,}8.11/20 \approx 4{,}8'$ dans les deux colonnes. On a donc, pour a_ω = 48° 51' des valeurs de B égales à 45° 01,3' à gauche et 44° 40,5' à droite.

On interpole ensuite en ligne, entre 53° et 53° 20' pour la valeur 53° 08'. La diminution totale de C est de 20,8', pour B augmentant de 20' ; lorsque B augmente de 8', nous avons une diminution proportionnelle de C de $20{,}8.8/20 = 8{,}3'$.

On obtient en définitive C = 45° 01,3' – 8,3' = 44° 53,0'.

Dans ce cas, nous avons d'abord effectué deux interpolations en colonnes suivies d'une interpolation en ligne. On peut évidemment procéder d'abord en ligne puis en colonne ; le résultat est identique. Ce type d'interpolation double est communément appelé « interpolation en croix ».

Calcul des éléments d'une droite de hauteur selon le procédé Leblanc :

Les données de calculs sont réunies dans le tableau ci-dessous ; les extraits utiles de la Tablette figurent en fin de paragraphe.

Estime		Coordonnées horaires		Observation	
φ_e	42° 43' S	AHap	245° 04,9'	H_v	20° 30,7'
G_e	120° 56' W	D	57° 38,4' S		
Angle au pôle P_e = 124° 08,9' W					

On recherche les éléments de la droite de hauteur par rapport au point estimé. La première entrée se fait avec un angle au pôle de 124° 00' et une déclinaison de 57° 40' ; on obtient alors le groupe numérique : **19**295**26**193**38**360 qu'il convient d'interpoler pour se ramener aux éléments de calcul, P_e et D. Dans le cas de figure, en se référant à la page concernée Tablette, il faut « aller sur la gauche » de 8,9' pour passer de 124° à 124° 08,9' et « monter » de 1,6' pour passer de 57° 40' à 57° 38,4'. On reporte le point représentatif sur l'intercalaire correspondante, située face à la ligne consultée dans la Tablette, et on lit, sur le réseau oblique : Δc = + 5,2' et Δb = - 1,7' (figure A5-10).

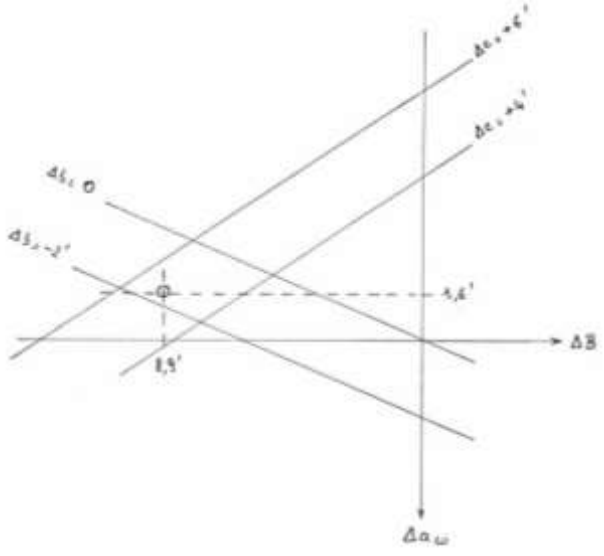


Fig : A5-10

On corrige les éléments c et b relevés dans le groupe numérique des quantités Δc et Δb. Il est inutile d'interpoler le dernier élément qui ne sera pas utilisé. On obtient finalement : c = 19° 34,7' N et b = 26° 17,6'.

On calcule ensuite c + φ_e = 23° 08,3' S et on effectue une nouvelle entrée dans la Tablette avec 23° en angle et 26° 20' en cohypoténuse, éléments les plus voisins des valeurs c + φ_e et b considérées. On obtient le groupe numérique **61**440**20**299**79**202 ; on interpolera uniquement l'élément central, la hauteur, le premier donnant l'amplitude pouvant rester en l'état (précision du demi-degré suffisante) et le dernier étant inutilisé. En suivant le même raisonnement que ci-dessus, on relève qu'il faut « aller sur la droite » de 8,3' et « monter » de 2,4' pour passer des valeurs argumentées aux valeurs considérées. On reporte le point représentatif sur l'intercalaire correspondante, située face à la ligne consultée dans la Tablette, et on lit, sur le réseau oblique : Δb = + 7,8' (figure A5-11).

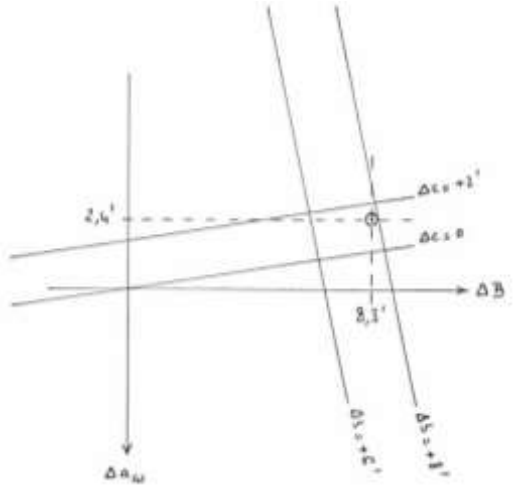


Fig : A5-11

La hauteur estimée est donc de : 20° 29,9’ + 7,8’ = 20° 37,7’.

Le calcul est résumé dans le tableau ci-dessous :

c =	19° 29,5’ N	b =	26° 19,3’
Δc =	5,2’ N	Δb =	- 1,7’
c =	19° 34,7’ N	b =	26° 17,6’
+ φ_e =	42° 43,0’ S		
c + φ_e =	23° 08,3’ S	H =	20° 29,9’
		Δb =	+ 7,8’
α =	W61,7°S	H_e =	20° 37,7’

L’intercept est donc $H_v - H_a$ = - 7,0’, l’azimut étant au S28,3°W, soit 208,3°.

On résume, dans le tableau ci-dessous, le calcul selon le procédé Leblanc à partir d’un point auxiliaire de coordonnées φ_{aL} = 42° 49,5’ S et G_{aL} = 121° 04,9’ W ; les interpolations sont faites à l’aide du tableau.

c =	19° 29,5’N	b =	26° 19,3’W	A_1 =	38,6°N
φ_{aL} =	42° 49,5’S				
c + φ_{aL} =	23° 20,0’S	H =	20° 47,5’	A_2 =	79,2°S
α =	W 61,7°S		-1,2’	A =	40,6°S
			+0,1’		
		H_a =	20° 46,4’	Z =	208,3°

L’intercept est de - 15,7’.

On peut également conduire le calcul selon le procédé Souillagouët ; le point auxiliaire a alors pour coordonnées φ_{aS} = 42° 40’ S et $G_{aS} = G_{aL}$; le calcul est résumé dans le tableau ci-après :

c =	31° 14,7'N	b =	37° 33,6'W	Z_1 =	44,9° N
D_a =	57° 34,7'S				
c + D_a =	26° 20,0'S	h =	20° 33,4'	Z_2 =	73,2° S
A_ω =	49,3°S		+2,8'		28,3° S
A =	40,7°		+1,8'		
		h_a =	20° 38,0'	Z =	S28,3° W
				=	208,3°

L'intercept est de – 7,3'. Le graphique de la figure A5-12 illustre les différents résultats.

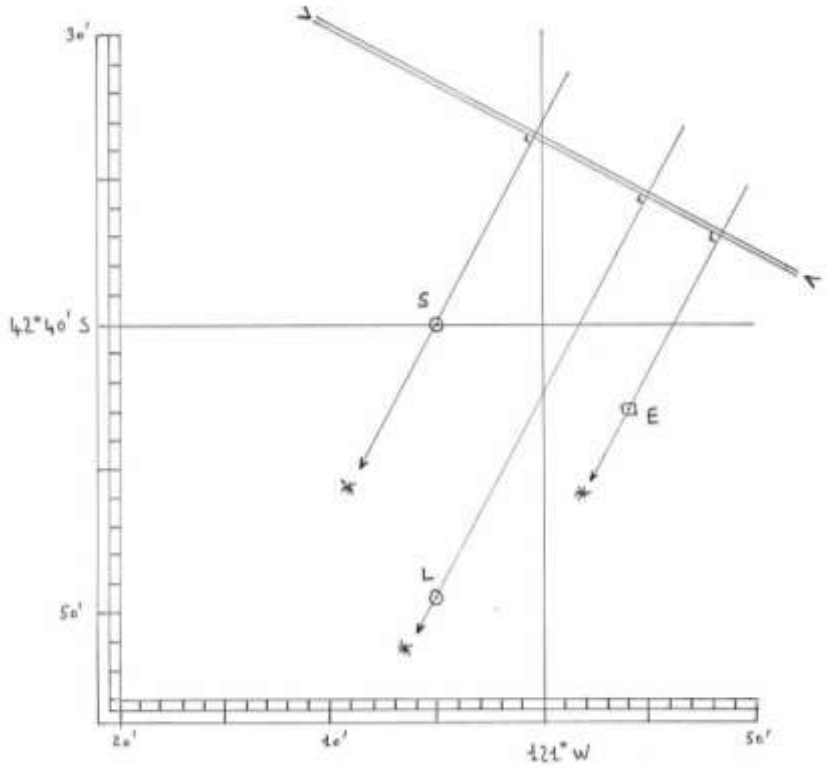


Fig : A5-12

Extraits de la Tablette Bertin 1939 :

↓a_ω B→	**337**00 ou **23**00	**336**40 ou **23**20		**333**40 ou **26**20		**304**00 ou **56**00
…	…	…		…		…
2600	**62**050**20**336**79**275	**62**014**20**513**79**175		**61**267**23**298**77**455		**48**543**48**102**56**588
2620	**61**440**20**299**79**202	**61**404**20**475**79**101		**61**054**23**255**77**370		**48**292**47**593**56**401
…	…	…		…		…
3740	**50**010**18**010**75**275	**49**567**18**163**75**140		**49**156**20**334**73**103		**35**551**41**009**47**495
…	…	…		…		…
4240	**44**578**16**418**73**570	**44**535**16**559**73**422		**44**118**19**022**71**274		**31**147**37**336**44**518
…	…	…		…		…
5720	**30**329**12**105**70**202	**30**292**12**207**70**026		**29**530**13**512**67**228		**19**435**26**349**38**422
5740	**30**137**12**038**70**161	**30**100**12**138**69**585		**29**340**13**435**67**183		**19**295**26**193**38**360
…	…	…		…		…
↑a_ω B'→	**203**00 ou **157**00	**203**20 ou **156**40		**206**20 ou **153**40		**236**00 ou **124**00

Pour plus de clarté, les échelles d'argumentation secondaires n'ont pas été reportées.

ANNEXE 6-1

TABLE 902

Table 902, première partie :

La table principale donne les azimuts d'un astre en fonction de son angle horaire local, de sa déclinaison et de la latitude du lieu :

- l'entrée page est la latitude ; chaque page correspond à un nombre de degrés entier de latitude compris entre 0° et 70° ;
- pour une latitude donnée, une double page correspond aux déclinaisons de même nom que la latitude, la double page suivante aux déclinaisons de noms contraires ;
- l'entrée colonne est la déclinaison, exprimée en nombre de degrés entier de 0° à 30° ;
- l'entrée ligne est l'angle horaire local, repéré Est (16 h à 24 h) à gauche et Ouest (0 h à 8 h) à droite ; l'intervalle d'argumentation est de 10 minutes (2,5°) ;
- l'azimut est donné à l'intersection des lignes et colonnes ; il est exprimé au dixième de degré et compté à partir du pôle élevé ;
- en bas de page figure un petit tableau donnant les azimuts et angles horaires de l'astre dont la déclinaison figure en tête (ou en pied) de colonne à son lever et à son coucher vrais.

Exemple :

Le navire a pour latitude estimée φ_e = 34° 15' S ; on désire calculer l'azimut d'un astre ayant pour angle horaire local AHag = 63° 30' = 4 h 14 m et pour déclinaison D = 22° 51' S.

On donne ci-dessous les extraits de tableaux correspondant aux latitudes 34° et 35°.

LATITUDE : 34°

Déclinaisons de même nom que la latitude					
AHag EST	…	22°	23°	…	AHag OUEST
…	…	…	…	…	…
19 h 50	…	85,1	84,0	…	4 h 10 m
19 h 40	…	83,8	82,7	…	4 h 20 m
…	…	…	…	…	…

LATITUDE : 35°

Déclinaisons de même nom que la latitude					
AHag EST	…	22°	23°	…	AHag OUEST
…	…	…	…	…	…
19 h 50	…	85,7	84,7	…	4 h 10 m
19 h 40	…	84,4	83,4	…	4 h 20 m
…	…	…	…	…	…

On remarque ici que l'azimut :

- diminue de 1,3° lorsque AHag varie de 4 h 10 m à 4 h 20 m,
- augmente de 0,6° à 0,7° lorsque φ augmente de 1°,
- augmente de 1° à 1,1° lorsque D diminue de 1°.

En partant de D = 23°, φ = 34° et AHag = 4 h 10 m, il vient :

Z = 84,0° - 0,52° + 0,17° + 0,15° = S83,8°W = 263,8°.

Le premier terme correctif correspond à 1,3°.4/10 (angle horaire), le second à 0,7°.1,5/6 (latitude) et le dernier, qui aurait pu être négligé, à 1°.0,9/6 (déclinaison).

Table 902, deuxième partie :

Les coordonnées équatoriales des étoiles étant faiblement variables, leur déclinaison peut être considérée comme constante sur une durée assez longue eut égard au faible niveau de précision requis dans un calcul d'azimut. L'argument déclinaison peut ainsi être remplacé par le nom de l'étoile dont il relève.

Cette deuxième partie permet de déterminer les azimuts de 44 étoiles de déclinaison supérieure à 30° Nord et Sud, à raison de 5 tableaux par étoile, un tableau étant relatif à 14 valeurs entières successives de la latitude et ce tableau occupant une page entière.

Les tableaux sont disposés de la façon suivante :

- entrée page (ou tableau) : la dénomination de l'étoile ;
- entrée colonne : la latitude, exprimée en degré entier de 0° à 70° N ou S ;
- entrée ligne : l'angle horaire local de l'étoile, exprimé en heures et minutes avec un intervalle d'argumentation de 20 minutes (5°), dans la colonne de droite si latitude et déclinaison sont de même nom, dans la colonne de gauche dans le cas contraire.
- l'azimut cherché, compté à partir du pôle élevé de l'observateur, est donné à l'intersection de la ligne et de la colonne concernées ; il est exprimé au dixième de degré près.

En bas de chaque page figure un petit tableau donnant, en fonction de la latitude, les azimuts et les angles horaires locaux de l'étoile considérée au moment de ses lever et coucher vrais.

L'examen des tableaux montre que, dans le cas où l'étoile considérée a un lever et un coucher dans un lieu de latitude φ (soit pour $|D| < 90° - \varphi$), la partie supérieure du tableau principal est relative aux latitudes de même nom que la déclinaison et la partie inférieure aux latitudes de nom contraire à la déclinaison. Dans un même tableau, la séparation entre les deux configurations est marquée d'un trait horizontal qui correspond à l'angle horaire et à l'azimut au lever ou au coucher.

En effet, considérons un lieu de latitude φ et une étoile A_1 dont la déclinaison est de même nom que la latitude et telle que D < 90° - φ. Sur la projection de la sphère locale dans le plan du méridien représentée en figure A6-1, P est le pôle élevé, P' le pôle abaissé, Z et Z' le zénith du lieu et son nadir, HH' l'horizon et QQ' l'équateur ; le parallèle diurne de l'étoile A_1 est noté S-I'S'-I ; il coupe l'horizon en L-C. On peut examiner le mouvement de A_1 à partir du lieu dont le zénith est Z :

- passage au méridien supérieur en S-I', coucher en L-C où A_1 devient invisible,
- passage au méridien inférieur en S'-I, lever en L-C où A_1 redevient visible puis à nouveau passage au méridien supérieur.

Si maintenant on examine le mouvement de A_1 à partir du lieu dont le zénith est Z', lieu antipode, dont le méridien supérieur est P'Z'P, on remarque que le lever de l'astre se produit alors qu'il se couche dans le lieu de zénith Z et

que son coucher se produit alors qu'il se lève dans ce lieu de zénith Z. On relève d'autre part que, les méridiens supérieurs respectifs étant opposés, les angles horaires locaux et les azimuts comptés à partir des directions des pôles élevés considérés sont, à tout instant, supplémentaires.

Cette alternance entre lieux antipodes permet d'utiliser un tableau unique pour exprimer les azimuts dans les deux configurations de noms respectifs de la latitude et de la déclinaison.

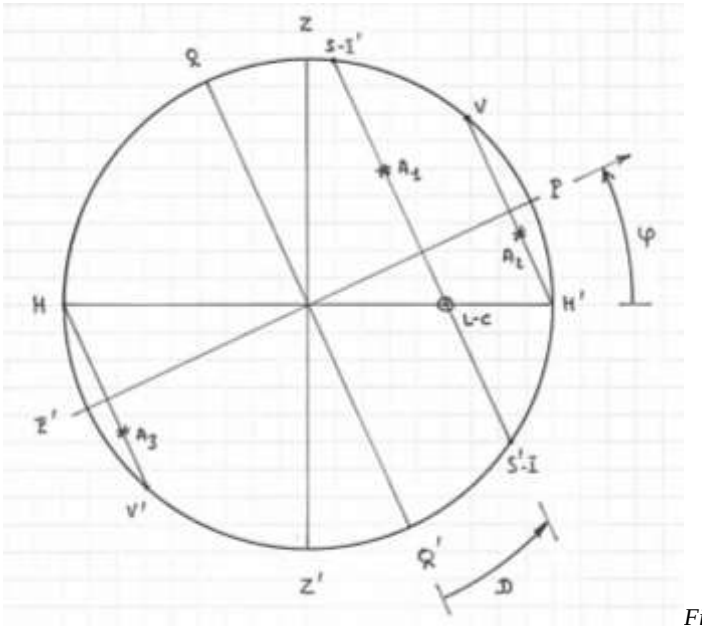


Fig : A6-1

Dans le cas où φ et D sont de même nom et où D > 90° - φ, l'étoile est circumpolaire visible au lieu de zénith Z ; elle est naturellement invisible au lieu antipode (cas limite étoile A_2 de parallèle diurne VH'). Si φ et D sont de noms contraires avec $|D| > 90° - \varphi$, l'étoile est alors circumpolaire invisible au lieu de zénith Z et circumpolaire visible au lieu de zénith Z' (cas limite étoile A_3 de parallèle diurne V'H). Dans ces deux cas, le tableau principal n'est évidemment pas fractionné et n'est accessible que depuis les angles horaires figurant dans la colonne de droite correspondant à φ et D de même nom. Le petit tableau des lever et coucher est bien entendu supprimé.

Les azimuts fournis par la table ont été calculés à partir des valeurs moyennes pour 1955 des coordonnées équatoriales des étoiles. On sait que ces coordonnées varient essentiellement à cause du phénomène de précession des équinoxes qui provoque une rétrogradation du point vernal d'environ 50,3'' par an. Dans ces conditions, les variations moyennes annuelles de la déclinaison et de l'ascension verse ont pour expression :

$$\Delta D = 20''.\cos ARa \quad ; \quad \Delta AVa = -46'' - 20''.\tan D\,.\sin ARa$$

D et Ara étant les valeurs initiales de la déclinaison et de l'ascension droite de l'étoile considérée. Si l'on choisit de calculer l'angle horaire local avec la valeur d'ascension verse indiquée dans la table 902, les deux arguments d'entrée seront entachés d'approximations dont les valeurs seront d'autant plus grandes que l'intervalle de temps à considérer depuis 1955 sera important. La notice d'emploi de la 2e partie de la table 902 indique simplement que l'erreur maximale résultante n'excèderait pas 0,3° au bout de 10 ans (soit en 1965). Si l'angle horaire local de l'étoile est évalué avec la valeur actualisée de l'ascension verse extraite des Éphémérides Nautiques de l'année, seules les conséquences de la variation de déclinaison sont à envisager ; ces conséquences sont relativement faibles, la déclinaison d'une étoile n'ayant varié en 60 ans que d'approximativement 20' au maximum. Si on recherche l'azimut d'une étoile de faible hauteur H, la table 902 donnera, encore aujourd'hui, un résultat tout à fait satisfaisant, l'incertitude sur l'azimut étant inférieure à $1/3.\cos H$ (en degré), soit 0,35° pour une hauteur de 20°.

Pour terminer, mentionnons que les interpolations sont ici à considérer essentiellement pour l'angle horaire (intervalle d'argumentation de 20 minutes ou 5°) et accessoirement pour la latitude. La procédure à suivre est identique à celle vue pour le premier volume de la table 902.

Exemple :

Le navire a pour latitude estimée $\varphi_e = 14° 30'$ N ; on désire calculer l'azimut de La Chèvre sachant que son angle horaire local estimé est $AHag_e = 33° 45'$.

Converti en heure, cet angle horaire est égal à : 2 h 15 m. On donne ci-dessous l'extrait utile de la table :

D = 45° 57' N		α COCHER (La Chèvre)				AVa = 281° 39'	
φ SUD		LATITUDE				**φ NORD**	
AHag		14°	15°	…	27°	AHag	
W	E					W	E
h m	h m	°	°		°	h m	h m
		0,0	0,0		0,0	0 00	24 00
		6,5	6,7		10,5	0 20	23 40
		…	…		…	…	…
		32,2	32,8	…	43,5	2 00	22 00
		35,5	36,1		46,3	2 20	21 40
		38,2	38,8		48,3	2 40	21 20
…	…	…	…		…	…	…
0 20	23 40	176,0	176,1		176,4	11 40	12 20
0 00	24 00	180,0	180,0		180,0	12 00	12 00

Le tableau ci-dessous présente une disposition commode des données pour effectuer les interpolations :

φ = 14°	φ = 14° 30'	φ = 15°	AHag
32,2°	32,5°	32,8°	2 h 00
	35,0°		2 h 15
35,5°	35,8°	36,1°	2 h 20

On interpole d'abord en latitude, pour les deux valeurs de l'angle horaire encadrant 2 h 15. On interpole ensuite pour cette valeur.

L'azimut est compté du pôle élevé (N), vers l'W (AHag < 180°) : Z = N 35 W = 325°.

ANNEXE 6-2

TABLES ABC, TABLES de PERRIN, TABLES de BATAILLE

Tables ABC, tables de Perrin :

La formule des quatre éléments consécutifs permettant le calcul de l'azimut par l'heure s'écrit :

$$\cot A_z = \frac{\tan D \,.\, \cos \varphi - \cos P \,.\, \sin \varphi}{\sin P}$$

Dans cette expression, A_z est l'angle au zénith, P, l'angle au pôle, φ, la latitude et D, la déclinaison de l'astre ; on divise les deux membres par $\cos \varphi$:

$$\frac{\cot A_z}{\cos \varphi} = \frac{\tan D}{\sin P} - \cot P . \tan \varphi$$

On pose ensuite :

$$A = \cot P \,.\, \tan \varphi \quad ; \quad B = -\frac{\tan D}{\sin P} \quad ; \quad C = -\frac{\cot A_z}{\cos \varphi}$$

La relation s'écrit donc : C = A + B ; dans les tables ABC, la table A donne le nombre du même nom en fonction de l'angle au pôle P et de la latitude φ ; la table B donne de même le nombre B en fonction de l'angle au pôle P et de la déclinaison D. Connaissant C obtenu par la somme algébrique A + B, la table C permet de déterminer l'angle au zénith A_z en fonction du nombre C et de la latitude φ. Ces formules sont évidemment identiques à celles obtenues par un autre raisonnement à l'annexe 2-3, relative aux travaux de Mazure-Duhamel et Heath.

L'amiral Perrin pose :

$$p' = \frac{\tan D}{\sin P} \quad ; \quad p'' = -\frac{\tan \varphi}{\tan P} \quad ; \quad p = \frac{\cot A_z}{\cos \varphi}$$

La relation s'écrit donc : p = p' + p''.

La table I donne la quantité p' en fonction de l'angle horaire local AHag et de la déclinaison D ; la table II donne de même la quantité p'' en fonction de l'angle horaire local AHag et de la latitude φ. Connaissant p obtenu par la somme algébrique p' + p'', la table III permet de déterminer l'angle au zénith A_z en fonction du nombre p et de la latitude φ.

Dans les tables I et II, Perrin utilise l'angle horaire local AHag comme argument à la place de l'angle au pôle. Les colonnes sont donc argumentées par les deux valeurs d'angle horaire correspondant à une valeur de l'angle au pôle : AHag = P et AHag = 360° - P. On remarque la similitude de la formulation et de la tabulation des tables de Perrin avec les tables ABC : la table I correspond à la table B, la table II à la table A et la table III à la table C ; on explicitera donc ci-après l'usage des seules tables de Perrin.

Pour l'exploitation de ses tables E. Perrin fixe des règles de signe simples : les latitudes et déclinaisons N sont positives, les latitudes et déclinaisons S sont négatives ; la quantité p résulte de la somme algébrique de p' et de p'' selon les conventions suivantes :

- p' est du signe de la déclinaison D,
- p'' est du signe de la latitude φ si 6 h < AHag < 18 h,
- p'' est du signe de –φ si 0 h < AHag < 6 h ou 18 h < AHag < 24 h.

Dans la table III, l'angle au zénith est donné de 0° à 90°, par quadrant. La détermination E ou W est fixée par la valeur de l'angle horaire local ; la détermination N ou S est fixée par la règle suivante :

- si p > 0, l'azimut est compté du N,
- si p < 0, l'azimut est compté du S.

Dans les tables I et II, l'angle horaire local, exprimé en heures et minutes, se lit en tête des colonnes (de 0 à 6 h et 18 h à 24 h) ou en bas de colonnes (de 6 h à 12 h et 12 h à 18 h) ; l'intervalle d'argumentation est de 4 minutes (1°) lorsque l'angle horaire local correspond à un angle au pôle inférieur à 2 h 40 m ou compris entre 9 h 20 m et 12 h ; cet intervalle augmente (8 m, 16 m et 20 m) lorsque l'angle au pôle correspondant se rapproche de 6 h. Les arguments d'entrée en ligne (déclinaison en table I et latitude en table II) sont exprimés de degré en degré entiers de 0° à 70° ; les nombres p' et p'' sont exprimés avec deux décimales. En table III, le nombre p constitue l'entrée en ligne ; l'intervalle d'argumentation est de 0,02 jusqu'à p = 1,60 ; cet intervalle croit ensuite régulièrement au fur et à mesure que p augmente. La latitude est l'entrée en colonne ; l'intervalle d'argumentation est de 5° jusqu'à une latitude de 20° puis diminue au fur et à mesure de l'augmentation en latitude. L'azimut, exprimé en degré et dixième, figure en intersection des lignes et colonnes.

Exemple :

Données : la latitude de l'observateur est φ = 18° 12' N, l'angle horaire local de l'astre est AHag = 326° 00' = 21 h 44 m ; la déclinaison de l'astre est D = 11° 48' N. On demande l'azimut de l'astre.

Les éléments donnés par les tables I et II sont les suivants :

Déclinaison	**ANGLE HORAIRE**				
	... **...** **...**	**2 h 12 m** **21 h 48 m** **33°**	**2 h 16 m** **21 h 44 m** **34°**	**2 h 20 m** **21 h 40 m** **35°**	**...** **...** **...**
... **11°** **12°** **...**	... ...	... 0,36 0,39 ...	... 0,35 0,38 ...	... 0,34 0,37 ...	... ...
Déclinaison	**...** **...** **...**	**147°** **9 h 48 m** **14 h 12 m**	**146°** **9 h 44 m** **14 h 16 m**	**145°** **9 h 40 m** **14 h 20 m**	**...** **...** **...**
	ANGLE HORAIRE				

Latitude	**ANGLE HORAIRE**				
	... **...** **...**	**2 h 12 m** **21 h 48 m** **33°**	**2 h 16 m** **21 h 44 m** **34°**	**2 h 20 m** **21 h 40 m** **35°**	**...** **...** **...**
... **18°** **19°** **...**	... ...	... 0,50 0,53 ...	... 0,48 0,51 ...	... 0,46 0,49 ...	... ...
Latitude	**...** **...** **...**	**147°** **9 h 48 m** **14 h 12 m**	**146°** **9 h 44 m** **14 h 16 m**	**145°** **9 h 40 m** **14 h 20 m**	**...** **...** **...**
	ANGLE HORAIRE				

Compte tenu des conventions de signe et après interpolation à vue, on a : p' = + 0,37 (D est N) et p'' = - 0,49 (φ est N et AHag compris entre 18 et 24 h). On a donc p = p' + p'' = - 0,12.

La table III donne :

Nombre p	LATITUDE DU NAVIRE				
	...	**15°**	**20°**	**24°**	**...**
...	...	...	...	...	...
0,10	...	84,5	84,6	84,8	...
0,12	...	83,4	83,6	83,7	...
0,14	...	82,3	82,5	82,7	...
...	...	...	...	...	...
Nombre p	**...**	**75°**	**70°**	**66°**	**...**
	Angle auxiliaire				

L'interpolation à vue donne $A_z = 83{,}5°$ à partir du S car $p < 0$ et vers l'E car AHag > 12 h. On a donc :

$$Z = S83{,}5°E = 096{,}5°.$$

Tables de Bataille :

La formule des quatre éléments consécutifs peut s'écrire :

$$\cot A_z . \sin P = -\cos P . \sin \varphi + \tan D . \cos \varphi$$

On pose :

$$m = -\cos P . \sin \varphi \quad \text{et} \quad n = \tan D . \cos \varphi$$

On a ainsi :

$$\cot A_z . \sin P = m + n$$

La table I de Bataille donne la quantité m en fonction de l'angle au pôle P et de la latitude φ ; la table II donne la quantité n en fonction de la déclinaison D et de la latitude φ. De plus, on remarque que :

$$\cot A_z . \sin P = \tan(90° - A_z) . \cos(90° - P)$$

La table II peut donc également servir au calcul de $\cot A_z . \sin P = m + n$ en utilisant pour A_z et P des échelles complémentaires à celles, respectivement, de D et φ.

Dans le calcul final de l'azimut, on entrera dans la table II avec les éléments connus qui sont l'angle au pôle P et le nombre m + n.

Le recueil de tables de L. Bataille est donc simplement constitué de deux tables à deux entrées et leurs compléments.

L. Bataille fixe les conventions suivantes :

- $m < 0$ si $P < 6$ h ou 90°, $m > 0$ si $P > 6$ h ou 90°,
- $n > 0$ si φ et D sont de même nom, $n < 0$ si φ et D sont de noms contraires.

Dans la table II, l'angle A_z est donné de 0° à 90° (azimut par quadrant). La détermination E ou W est fixée par la valeur de l'angle horaire local. La détermination N ou S est fixée comme suit : A_z se compte à partir du pôle élevé si $m + n > 0$, du pôle abaissé si $m + n < 0$.

Dans la table I , l'angle au pôle, exprimé en heures et minutes et en degrés, se lit en tête des colonnes (de 0 à 6 h) ou en bas de colonnes (de 6 h à 12 h) ; l'intervalle d'argumentation est de 4 minutes (1°) pour un angle au pôle

compris entre 3 h (9 h) et 5 h 48 (6 h 12) ; il augmente au fur et à mesure que P se rapproche de 0 h (12 h) et diminue lorsque P tend vers 6 h. La latitude est l'argument d'entrée en ligne ; elle est exprimée en degrés entiers de 0° à 89° ; l'intervalle d'argumentation est de 1° jusqu'à 45° et s'élargit ensuite ; le nombre m est exprimé avec deux décimales.

En table II, les arguments d'entrée en colonne sont la déclinaison (en tête de colonne) et l'angle au zénith A_z (en bas de colonne). Ces deux angles sont exprimés de degré en degré entiers sur des échelles complémentaires (D est croissante de gauche à droite et A_z de droite à gauche). De même, les arguments d'entrée en ligne sont la latitude (entrée gauche) et l'angle au pôle (entrée droite) ; ces arguments sont portés sur des échelles complémentaires ; la latitude est exprimée de 0° à 89°, l'angle au pôle de 0 h 04 m à 6 h et de 6 h à 11 h 56 m grâce à une double échelle. L'intervalle d'argumentation est de 5°, 2° ou 1°. Le nombre n (ou m + n) est exprimé avec deux décimales.

Les deux tables indiquent en marge la fonction trigonométrique appliquée à l'argument (sinus ou cosinus, tangente ou cotangente).

Exemple :

Les données sont celles de l'exemple précédent ; on a donc P = 2 h 16 m (E).

TABLE I *Cosinus*

	LATITUDE	**ANGLE AU POLE**				
		... **...**	**2 h 08 m** **32°**	**2 h 16 m** **34°**	**2 h 24 m** **36°**	**...** **...**	
Sinus	**...** **18°** **19°** **...**	... ...	... 0,26 0,28 ...	... 0,26 0,27 ...	... 0,25 0,26 ...	... ...	**...** **72°** **71°** **...** ***Cosinus***
	LATITUDE	**...** **...**	**148°** **9 h 52 m**	**146°** **9 h 44 m**	**144°** **9 h 36 m**	**...** **...**	
		ANGLE AU POLE					

Cosinus

TABLE II *Tangente*

	LATITUDE	**DÉCLINAISON**				***Angle au pôle***	
		...	**10°**	**11°**	**12°**	**...**		
Cosinus	**...** **18°** **20°** **...**	... ...	... 0,17 0,17 ...	... 0,18 0,18 ...	... 0,20 0,20 ...	... ...	**...** **4.48** **4.40** **...**	**...** **7.12** **7.20** **...** ***Sinus***
	LATITUDE	**...**	**80°**	**79°**	**78°**		***Angle au pôle***	
		AZIMUT						

Cotangente

Compte tenu des conventions de signe et après interpolation à vue, on a : m = - 0,26 (P < 6 h) et n = + 0,20 (φ et D sont de même nom). On a donc m + n = - 0,06.

La seconde entrée dans la table II, en fonction de P et de m + n donne : $A_z = 84°$ à partir du S car (m + n) < 0 et vers l'E, soit Z = S84°E = 096°.

TABLE II ***Tangente***

	LATITUDE	DÉCLINAISON					*Angle au pôle*		
		...	5°	6°	7°	...			
Cosinus	...	...	...	...	...	...	...	...	*Sinus*
	55°	...	0,05	0,06	0,07	...	2.20	9.40	
	56°	...	0,05	0,06	0,07	...	2.16	9.44	
	...	...	...	...	...	...	...	...	
	LATITUDE	...	85°	84°	83°		*Angle au pôle*		
		AZIMUT							

Cotangente

Questions de précision :

Les tables étudiées donnent les valeurs de produits de fonctions trigonométriques naturelles ; ces produits sont exprimés en général avec deux décimales ; on se propose d'évaluer l'incertitude qui résulte de cet arrondi à la deuxième décimale sur l'azimut calculé de l'astre.

Tables ABC et de Perrin :

La formulation utilisée dans les deux tables est identique ; on utilise dans ce qui suit les symboles figurant dans les tables de Perrin. On sait que la quantité p résulte de la somme algébrique de deux termes p' et p'' lus dans les tables I et II et exprimés avec deux décimales. Les incertitudes $\Delta p'$ et $\Delta p''$ valent donc chacune 0,005 et l'incertitude résultante sur p est $\Delta p = 0{,}01$. On a d'autre part $\cot A_z = p.\cos\varphi$ et, en différentiant :

$$\frac{-\Delta Z}{(\sin A_z)^2} = \Delta p.\cos\varphi$$

Soit, en valeur absolue et en radians :

$$|\Delta Z| = \Delta p.\cos\varphi\,.\,(\sin A_z)^2$$

D'où, en degrés :

$$|\Delta Z| = \frac{0{,}01.180}{\pi}.\cos\varphi\,.\,(\sin A_z)^2 = 0{,}573.\cos\varphi\,.\,(\sin A_z)^2$$

On a donc toujours $|\Delta Z| < 0{,}6°$ avec des quantités p' et p'' extraites des tables avec deux décimales.

Dans le cas du calcul de l'azimut, la précision est suffisante en pratique, quel que soit le cas de figure, selon la formulation de Perrin (ou ABC) avec des valeurs numériques arrondies à deux décimales.

Tables de Bataille :

On a, dans ce cas $\cot A_z . \sin P = m + n$, et, en différentiant :

$$\frac{-\sin P}{(\sin A_z)^2} . \Delta Z = \Delta(m + n) = \Delta m + \Delta n = 0{,}01$$

On a donc, en degrés :

$$|\Delta Z| = \frac{1{,}8}{\pi} . \frac{(\sin A_z)^2}{\sin P}$$

On a d'autre part :

$$\sin P = (m + n) . \tan A_z$$

Soit,

$$|\Delta Z| = \frac{1{,}8}{\pi} . \frac{\sin A_z . \cos A_z}{m + n} = 0{,}573 . \frac{\sin 2A_z}{2 . (m + n)}$$

A partir de cette relation, on peut calculer les valeurs de (m + n) correspondant aux différentes valeurs de l'azimut Z pour des valeurs de ΔZ préalablement fixées (0,5°, 1° et 2°) ; pour chaque couple de valeurs de Z et de (m + n), on peut aussi calculer la valeur de l'angle au pôle correspondant.

On obtient le tableau des valeurs suivantes :

Z	ΔZ = 2°		ΔZ = 1°		ΔZ = 0,5°	
	m + n	P	m + n	P	m + n	P
90°	0	-	0	-	-	-
80°	0,049	16,13°	0,098	33,76°	-	-
70°	0,092	14,64°	0,184	30,37°	-	-
69°	0,096	14,48°	0,192	30,01°	0,383	88,20°
60°	0,124	12,40°	0,248	25,44°	0,496	59,22°
50°	0,141	9,67°	0,282	19,64°	0,564	42,23°
40°	0,141	6,79°	0,282	13,69°	0,564	28,25°
30°	0,124	4,11°	0,248	8,23°	0,496	16,64°
20°	0,092	1,92°	0,184	3,84°	0,368	7,70°
10°	0,049	0,50°	0,098	0,99°	0,196	1,98°
0°	0	0°	0	0°	0	0°

A partir de ces valeurs, on peut construire le diagramme représenté en figure 6-2 dans lequel on a porté l'azimut Z compté par quadrant en abscisse et l'angle au pôle P en ordonnée. Les trois arcs de courbe tracés à ΔZ constant délimitent quatre zones dans lesquelles l'incertitude ΔZ sur l'azimut est respectivement inférieure à 0,5° (zone 1), comprise entre 0,5° et 1° (zone 2), comprise entre 1° et 2° (zone 3), supérieure à 2° (zone 4).

Les tables de Bataille donnent donc un résultat qui peut être moins précis que celui fourni par les tables de Perrin (ou ABC).

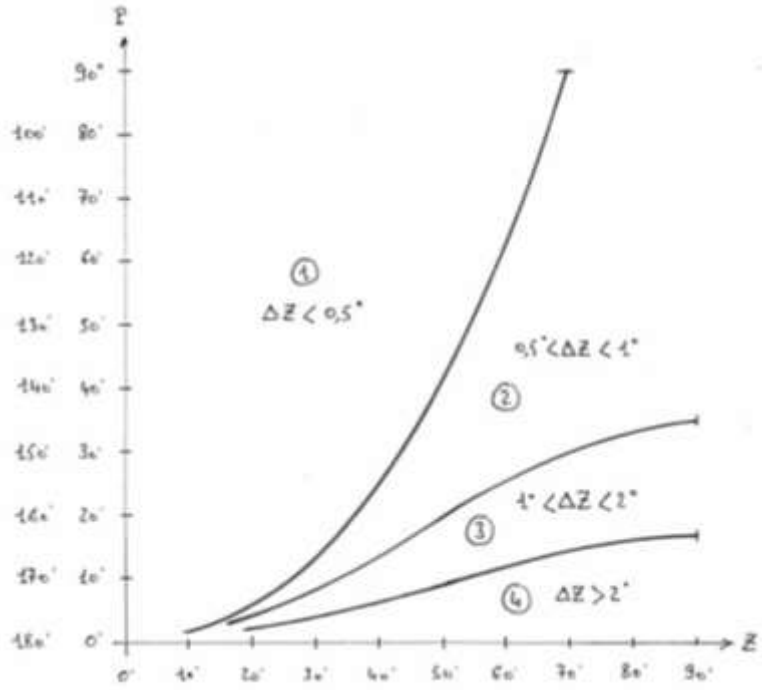


Fig : 6-2

Exemple :

En un lieu de latitude φ = 20° N, calculer l'azimut d'un astre dont l'angle au pôle est P = 20° E et la déclinaison est D = 15° N.

Perrin : les tables I et II donnent respectivement p' = 0,78 et p'' = -1,00, soit p = -0,22 ; la table III donne sans ambigüité Z = S78,3°E = 101,7°.

Bataille : les tables I et II donnent respectivement m = -0,32 et n = 0,25, soit m + n = -0,07 ; la seconde entrée en table II, en fonction de m + n et de P, donne S77,5°E < Z < S79,5°E sans qu'il ne soit possible de fixer une valeur particulière.

Le calcul effectué à la calculatrice donne Z = 101,5° ; la hauteur calculée de l'astre est H = 70° 18'.

Remarque 1 : pour les petites valeurs de l'angle au pôle, la simple lecture de la table II de Bataille renseigne sur l'imprécision de la détermination de l'azimut : la valeur de (m + n), exprimée avec deux décimales, n'évolue que lentement au passage d'une colonne à l'autre et, pour les grandes valeurs d'azimut, reste constante sur plusieurs colonnes adjacentes.

Remarque 2 : la condition d'imprécision « petit angle au pôle et grand azimut » est équivalente à « grande hauteur et faible déclinaison » ; en effet, l'analogie des sinus donne :

$$\frac{\sin A_z}{\sin P} = \frac{\cos D}{\cos H}$$

Ces conditions sont naturellement inverses des circonstances favorables au calcul de l'azimut par l'heure qui sont, rappelons-le, faible hauteur et grande déclinaison ; la faible hauteur est de plus une nécessité pour le calcul de la variation du compas où l'on doit s'attacher à relever un astre bas sur l'horizon pour effectuer une mesure précise de l'azimut compas.

ANNEXE 6-3

TABLES de PITAUD

Dans cette annexe, la symbolisation employée est celle utilisée par A. Pitaud dans ses tables ; celles-ci ne sont pas reproduites mais peuvent aisément se reconstituer en adoptant a = 1,7905 comme base des logarithmes utilisés.

Formulation :

P étant le pôle élevé et Z le zénith de l'observateur, on décompose le triangle de position PZA de l'astre A en deux triangles rectangles selon la hauteur sphérique issue de l'astre (figure A6-3). Les côtés du triangle ont leurs dénominations et mesures usuelles : PA est la distance polaire (90° - D), PZ, la colatitude (90° - φ) et ZA la distance zénithale (90° - H). C est le pied de la hauteur sphérique AC et on note α la mesure de l'arc PC ; α est une grandeur algébrique du nom de la déclinaison D si l'angle au pôle est inférieur à 90°, de nom contraire à D si celui-ci est supérieur à 90°. On pose β = φ + α algébriquement ; dans ces conditions, et suivant le cas de figure, on a ZC = 90° - β (si β < 90°) ou ZC = β – 90° (si β > 90°). On vérifie enfin que l'azimut calculé Z sera du nom de la déclinaison si β < 90°, du nom contraire si β > 90°.

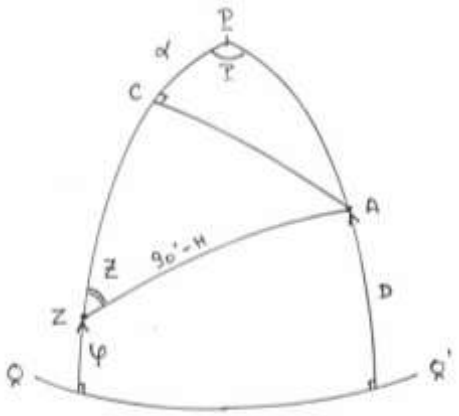


Fig : *A6-3*

Dans le triangle rectangle PAC, on peut écrire :

$$\cos P = \tan D \,.\, \tan \alpha \quad (1) \quad \text{et} \quad \sin \alpha = \cot P \,.\, \tan AC \quad (2)$$

Et, dans le triangle rectangle ZAC, on a :

$$\cos \beta = \cot Z \,.\, \tan AC \quad (3) \quad \text{et} \quad \cos Z = \tan H \,.\, \cot \beta \quad (4)$$

Les relations de calcul sont les suivantes :

- à partir de la formule (1) : $\tan(90° - \alpha) = \tan D \,.\, \sec P$ (1')
- à partir des formules (2) et (3) : $\tan Z = (\tan P \,.\, \sec \beta)/\sec(90° - \alpha)$ (2')
- à partir de la formule (4) : $\tan H = \tan \beta \,/\, \sec Z$ (4')

Ces formules n'utilisent que les fonctions sécante et tangente et la séquence de calcul est toujours :

1) calcul de α par la formule (1'),
2) calcul de β = φ + α algébriquement,
3) calcul de l'azimut Z par la formule (2') et détermination,
4) calcul de la hauteur H par la formule (4').

Base de logarithmes utilisée :

Dans les formules qui ont été établies, ainsi que dans la séquence de calcul indiquée ci-dessus, on remarque le rôle prépondérant de la fonction tangente à partir de laquelle seront extraits l'arc α, l'azimut et la hauteur ainsi que les sécantes de (90° - α) et de l'azimut. A. Pitaud a donc recherché une fonction $\log_a \tan x$ dont la variation minimale sur l'intervalle $[0°, 90°[$ soit de 1/1000 lorsque l'argument x varie de 1'. On vérifie ainsi que la base a des logarithmes cherchés est d'environ 1,79.

Exemples de calcul :

Les formules, constituées de produits et quotients de fonctions tangente et sécante, sont directement applicables au calcul logarithmique ; l'azimut Z est calculé en deux temps, conformément à la décomposition suivante :

$$(2') : \tan Z = \frac{\tan P \,.\, \sec \beta}{\sec(90° - \alpha)} = X.\sec \beta \quad \text{avec} \quad X = \frac{\tan P}{\sec(90° - \alpha)}$$

Dans les types de calcul reproduits ci-dessous, on note respectivement t et s les logarithmes tangente et sécante.

Exemple 1 :

Calcul de la hauteur et de l'azimut du Soleil en un lieu de latitude φ = 47° 10' N, l'angle au pôle et la déclinaison de l'astre étant : P = 1 h 39 m 52 s (E), D = 8° 38' S.

D =	8° 38' S	→ → → t =	$\bar{4},764$		
P =	1h 39m 52s	→ → + s =	0,168	→ → → → → t =	$\bar{2},688$
α =	80° 30' S	← ← ← t =	$\bar{4},932$	→ → → → - s =	0,024
φ =	47° 10' N			logX =	$\bar{2},664$
β =	33° 20' S	→ → → t =	$\bar{1},281$	→ → → → + s =	0,309
Z =	28,8° S	← ← ← - s =	0,227	← ← ← ← ← t =	$\bar{2},973$
		t =	$\bar{1},054$		
Z =	**S28,8°E**	**H =**	**29° 57'**		

Nota : la valeur de α est lue directement dans la table en utilisant une échelle des valeurs complémentaires notée ωα. Le calcul effectué à la calculette donne : H = 29° 57,1'.

Exemple 2 :

Calcul de l'azimut d'un astre d'angle au pôle P = 4 h 42 m (W) et de déclinaison D = 9° 38' N en un lieu de latitude φ = 41° 54' N ; on utilise ici la table à 2 décimales.

D =	9° 38' N	→ → → t =	$\bar{4},95$		
P =	4h 42m	→ → + s =	1,88	→ → → → → t =	1,78
α =	63° 10' N	← ← ← t =	$\bar{2},83$	→ → → → - s =	0,20
φ =	41° 54' N			logX =	1,58
β =	105° 04' N	→ → → t =		→ → → → + s =	2,31
Z =	84,1° S	← ← ← - s =		← ← ← ← ← t =	3,89
		t =			
Z =	**S84,1°W**	**H =**			

Le calcul effectué à la calculette donne : Z = S84,1°W.

ANNEXE 6-4

ANALOGIES de NEPER, TABLE XXXIX de FRIOCOURT, TABLES DE GOODWIN

Les analogies de Neper :

Les analogies de Neper permettent :

- connaissant deux côtés et l'angle compris, de calculer les deux autres angles,
- connaissant deux angles et le côté compris, de calculer les deux autres côtés.

ABC étant un triangle sphérique quelconque (figure A6-4), on suppose par exemple connus les côtés b et c et l'angle A :

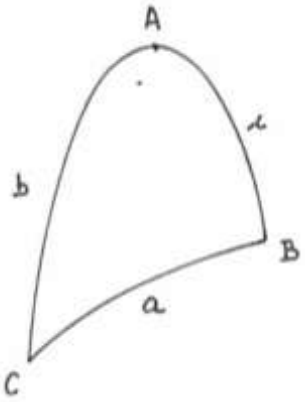


Fig : A6-4

On établit[74] alors :

$$\tan\frac{B+C}{2} = \cot\frac{A}{2}.\frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}} \quad (1) \text{ et } \quad \tan\frac{B-C}{2} = \cot\frac{A}{2}.\frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{b+c}{2}} \quad (2)$$

Si maintenant on suppose connus les angles B et C et le côté a, on obtient :

$$\tan\frac{b+c}{2} = \tan\frac{a}{2}.\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}} \quad (3) \text{ et } \quad \tan\frac{b-c}{2} = \tan\frac{a}{2}.\frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{B+C}{2}} \quad (4)$$

D'un cas comme d'un autre, il convient pour terminer d'effectuer la somme et la différence des arcs trouvés pour obtenir les deux angles ou les deux côtés cherchés.

Table XXXIX de Friocourt :

PXS étant le triangle de position de l'astre construit à partir du pôle élevé (figure A6-5), la table XXXIX de G. Friocourt permet le calcul de l'azimut par l'heure à l'aide des formules (1) et (2) ci-dessus, les éléments connus étant les côtés PX et PS du triangle et l'angle en P.

[74] La démonstration de ces formules figure notamment dans le traité d'astronomie générale d'André Danjon (voir bibliographie générale).

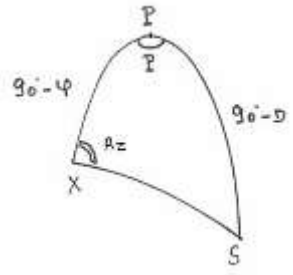


Fig : A6-5

Friocourt pose :

- M = φ – D, algébriquement (φ > 0, D >0 si D du nom de φ, D < 0 si de nom contraire à φ),
- N = φ + D, algébriquement.

Appliquant les formules (1) et (2), il écrit ensuite :

$$\tan A = \frac{\cos\frac{M}{2}}{\sin\frac{N}{2}}.\cot\frac{P}{2} \quad \text{et} \quad \tan B = \frac{\sin\frac{M}{2}}{\cos\frac{N}{2}}.\cot\frac{P}{2}$$

A et B représentent les valeurs absolues des demies somme et différence entre les angles en X et en S du triangle. Suite à l'examen des différents cas de figure, l'azimut (E ou W suivant la valeur de l'angle horaire local) sera déterminé conformément aux dispositions du tableau ci-dessous :

$\|D\| > \varphi$	φ et D de même nom	A_z = A – B, compté du pôle élevé
	φ et D de noms contraires	A_z = A – B, compté du pôle abaissé
$\|D\| = \varphi$	φ et D de même nom	A_z = A, compté du pôle élevé
	φ et D de noms contraires	A_z = 90° - B, compté du pôle abaissé
$\|D\| < \varphi$		A_z = A + B, compté du pôle élevé

Le calcul de l'azimut s'effectue à l'aide de 4 tableaux, répartis sur deux pages, donnant les logarithmes à deux décimales de :

- $\cot P/2$, P étant argumenté de 0 à 12 h avec un intervalle de 4 minutes (1°),
- $\sin M/2$ et $\cos M/2$, M étant argumenté de 0° à 90° avec un intervalle de 1°,
- $\cos N/2$ et $\sin N/2$ (cologarithmes), N étant argumenté de 0° à 180° avec un intervalle de 1°,
- $\tan A$ et $\tan B$, A et B étant argumentés de 0° à 90° avec un intervalle de 1°.

Le calcul s'effectue conformément au type développé avec l'exemple ci-après.

Exemple : calcul de l'azimut d'un astre sachant que la latitude estimée du navire est φ = 45° N, la déclinaison de l'astre est D = 10° N et son angle au pôle est P = 4 h 00 m W.

P =	4 h 00 m W	logcotP/2 =	0,24	logcotP/2 =	0,24
φ =	45° 00' N				
D =	10° 00' N				
M =	35° 00'	logcosM/2 =	9,98	logsinM/2 =	9,48
N =	55° 00'	cologsinN/2 =	0,34	cologcosN/2 =	0,05
		logtanA =	0,56	logtanB =	9,77
		A =	74,4°	B =	30,4°
		Z = A + B =	N104,8°W	= 255,2°	

Equatorial Azimuth Table de H. B. Goodwin :

Formulation utilisée :

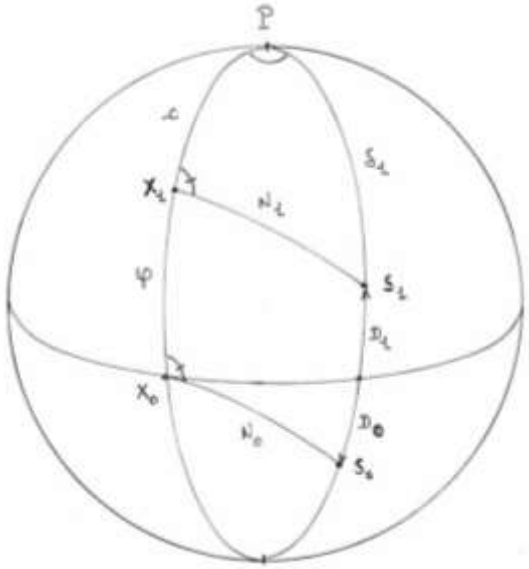


Fig : A6-6

En un lieu X_1 de latitude φ (colatitude c = 90° - φ), on considère un astre S_1 de déclinaison D_1 (distance polaire δ_1) et de hauteur H_1 (distance zénithale N_1). L'angle au pôle est P et l'angle au zénith cherché A_z. Comme il est usuel à l'époque, le triangle de position est construit à partir du pôle élevé (figure A6-6). Considérons maintenant le lieu X_0, situé à l'intersection du méridien de X_1 et de l'équateur. Il est toujours possible de définir un astre fictif S_0, situé sur le cercle horaire de S_1 et dont l'angle au zénith A_{z0} soit égal à A_z, l'angle cherché. S_0 et S_1 ont donc mêmes angles au zénith A_z et au pôle P. Si on connait la déclinaison réduite D_0 (ou la distance polaire δ_0) ainsi que sa hauteur réduite H_0 (ou la distance zénithale N_0) de l'astre X_0, il est possible de calculer l'azimut cherché par l'une des formules :

$$\cot A_z = \frac{\tan D_0}{\sin P} \quad , \quad \cos A_z = \frac{\sin D_0}{\cos H_0} \quad , \quad \sin A_z = \frac{\sin P \,.\, \cos D_0}{\cos H_0}$$

Ces formules ne peuvent être calculées que si on connait les éléments réduits D_0 et de H_0 ou leur complément δ_0 et N_0 ; ces arcs sont calculés dans les triangles de position PX_1S_1 et PX_0S_0 à l'aide des analogies de Neper.

On a, dans le triangle PX_1S_1 :

$$\tan\frac{\delta_1 + N_1}{2} = \tan\frac{c}{2}.\frac{\cos\frac{A_z - P}{2}}{\cos\frac{A_z + P}{2}} \quad (5) \text{ et } \quad \tan\frac{\delta_1 - N_1}{2} = \tan\frac{c}{2}.\frac{\sin\frac{A_z - P}{2}}{\sin\frac{A_z + P}{2}} \quad (6)$$

Et, dans le triangle PX_0S_0 :

$$\tan\frac{\delta_0+N_0}{2}=\tan 45°.\frac{\cos\frac{A_z-P}{2}}{\cos\frac{A_z+P}{2}}\quad(7)\ \text{et}\quad \tan\frac{\delta_0-N_0}{2}=\tan 45°.\frac{\sin\frac{A_z-P}{2}}{\sin\frac{A_z+P}{2}}\quad(8)$$

Sachant que $\tan 45° = 1$, la combinaison des équations (5) et (7) et des équations (6) et (8) donne :

$$\tan\frac{\delta_0+N_0}{2}=\tan\frac{\delta_1+N_1}{2}.\cot\frac{c}{2}\quad(9)\ \text{et}\quad \tan\frac{\delta_0-N_0}{2}=\tan\frac{\delta_1-N_1}{2}.\cot\frac{c}{2}\quad(10)$$

D'où les demi-somme et demi-différence des distances polaire et zénithale réduites.

Table I :

Les arguments d'entrée dans cette table sont la latitude φ et la somme $\delta_1 + N_1$ ou la différence $\delta_1 – N_1$; les formules (9) et (10) étant identiques, l'élément calculé est la demi-somme $(\delta_0 + N_0)/2$ ou la demi-différence $(\delta_0 – N_0)/2$. La latitude est argumentée de 1° à 89° avec un intervalle de 1° ; les sommes et différences sont argumentées de 1° à 240° avec un intervalle de 1° jusqu'à 60°, de 2° ensuite. L'élément calculé est exprimé au dixième de degré près.

Table II :

Les arguments d'entrée sont ici l'angle au pôle P, exprimé de 0 h 04 m à 5 h 56 m avec un intervalle de 4 m (1°) et la déclinaison réduite D_0 exprimée de 0° à 89° avec un intervalle de 1°. Pour chaque couple de ces valeurs, la table II donne la distance zénithale réduite N_0 au dixième de degré près et l'angle au zénith A_z cherché à la minute d'arc près ; utilisée dans ce sens, la table résout le calcul d'azimut par l'heure, la valeur lue de N_0 servant de vérification puisqu'elle doit être égale (ou peu différente) à celle trouvée avec la table I. En table I, N_0 est calculée avec la formule : $\cos N_0 = \cos D_0.\cos P$.

Si l'angle au pôle est supérieur à 6 h (90°), on entrera dans la table II avec son supplément 180° - P ; dans cette configuration, une étude de figure montre que la valeur de la distance zénithale lue en table II est égale à 180° - N_0. Enfin, l'azimut portera le nom du pôle élevé si latitude φ et déclinaison réduite D_0 sont de même nom, le nom du pôle abaissé dans le cas contraire.

Exemple :

Etant situé par φ = 41° N, une observation du Soleil donne H_1 = 24° 54' ; à cet instant, l'angle au pôle du Soleil est P = 4 h 08 m W et sa déclinaison est D_1 = 6° 00' N. Calculer son azimut.

Extrait de la table I :

Somme ou différence	LATITUDE				
	…	40°	41°	42°	…
…		…	…	…	
18°		18,8	19,2	19,6	
19°		19,8	20,2	20,6	
…	…	…	…	…	…
148°		82,4	82,6	82,7	
150°		82,9	83,0	83,2	
…		…	…	…	

Le calcul est alors le suivant :

$\delta_1 =$	84,0°				
$N_1 =$	65,1°				
$\delta_1 + N_1 =$	149,1°	→ Table I →	$(\delta_0 + N_0)/2 =$	82,8°	
$\delta_1 - N_1 =$	18,9°	→ Table I →	$(\delta_0 - N_0)/2 =$	20,1°	
			$\delta_0 =$	102,9°	**$D_0 = 12{,}9°$ S**
			$N_0 =$	62,7°	

Extrait de la table II :

D_0	HOUR ANGLE							
		4 h 04 m		4 h 08 m		4 h 12 m		
	…	N_0	Z	N_0	Z	N_0	Z	…
… 12° 13° …	…	… 61,7 61,8 …	… 76° 20’ 75° 13’ …	… 62,7 62,8 …	… 76° 28’ 75° 21’ …	… 63,6 63,8 …	… 76° 35’ 75° 28’ …	…

Pour les valeurs considérées d’angle au pôle et de déclinaison réduite, on trouve A_z = 75,5° et N_0 = 62,7°. Cette dernière valeur confirme la cohérence du calcul.

Latitude et déclinaison réduite étant de noms contraires, l’azimut est compté du pôle abaissé (pôle S), vers l’W, compte tenu de l’angle au pôle. On écrira donc : Z = S75,5°W = 255,5°.

Nota : on peut aussi rechercher l’angle au zénith dans la table II avec la déclinaison et la distance zénithale réduite, sans faire intervenir l’angle au pôle.

ANNEXE 7-1

MÉTHODES DIRECTES

ESSAI D'INVENTAIRE

Les symboles utilisés sont ceux définis en annexe 1-1. Les différentes formules employées sont toutes déduites de la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique relative à l'angle en P qui s'écrit :

$$\sin H = \sin\varphi \,.\, \sin D + \cos\varphi \,.\, \cos D \,.\, \cos P$$

On rappelle que $\mathrm{vers}(x) = 1 - \cos x$ et que $\mathrm{hav}(x) = \mathrm{vers}(x)/2 = (\sin(x/2))^2$

Dans le tableau ci-dessous, s représente la quantité $(\varphi + \delta + H)/2$ partout où il est employé.

Le tableau est renseigné essentiellement à partir d'éléments figurant dans le Bowditch 1977, pages 561 à 570 ; certains compléments sont extraits d'un article de Ch. H. Cotter paru dans le Journal of Navigation (RIN) de mai 1982 « Direct Methods of Sight Reduction : an Historical Review ».

Auteurs	Formulations et références	Dates
N. MASKELYNE	$2.\left(\sin\frac{P}{2}\right)^2 = [\cos(\varphi - D) - \sin H].\sec\varphi \,.\, \sec D$ Tables Requisite to be used with the Nautical Ephemeris for finding Latitude and Longitude at Sea. Une table donne le logarithme du membre de gauche (log rising) permettant d'extraire directement l'angle au pôle.	1767
J.-Ch. de BORDA	$\sin\frac{P}{2} = \sqrt{\frac{\cos s \,.\, \sin(s - H)}{\cos\varphi \,.\, \sin\delta}}$ Description et usage du cercle de réflexion avec différentes méthodes pour calculer les observations nautiques.Formule utilisée dans l'Epitome de J. W. Norie (1802), conjointement avec la formule de Maskelyne ci-dessus.	1787
A. MACKAY	$\cos P = \sin H \,.\, \sec\varphi \,.\, \sec D - \tan\varphi \,.\, \tan D$ The Theory and Practice of finding Longitude at Sea or Land.	1793
D. THOMSON	$\mathrm{hav}(P) = \sec\varphi \,.\, \csc\delta \,.\, \cos s \,.\, \sin(s - H)$ Lunar and Horary Tables.	1823
H. RAPER	Formule identique à celle de Thomson. The Practice of Navigation and Nautical Astronomy.	1840
J. INMAN	$\mathrm{hav}(P) = \sec\varphi \,.\, \sec D \,.\, \sqrt{\mathrm{hav}[\xi + (\varphi - D)]}.\sqrt{\mathrm{hav}[\xi - (\varphi - D)]}$ Nautical tables designed for the use of British seamen.	1849
G. F. MARTELLI	Tables construites à partir de la formule : $\frac{1}{\mathrm{vers}(P)} = \frac{\cos\varphi \,.\, \cos D}{\cos(\varphi - D) - \sin H}$ Formule modifiée par introduction de constantes. Martelli's Navigational Tables.	1873
A. C. JOHNSON	$\mathrm{hav}(P) = \frac{\sec\varphi \,.\, \sec D}{\sec s \,.\, \sec(90° + H - s)} = \frac{A}{B}$ On finding Latitude and Longitude by Cloudy Weather.	1875
G. POUVREAU	Formule identique à celle utilisée par G. F. Martelli.	1885
H. B. GOODWIN	$\mathrm{vers}(P) = [\mathrm{vers}(\xi) - \mathrm{vers}(\varphi - D)].\sec\varphi \,.\, \sec D, \mathrm{hav}(P)$ $= [\mathrm{hav}(\xi) - \mathrm{hav}(\varphi - D)].\sec\varphi \,.\, \sec D$ Nautical Magazine ; the simplification of formulae in nautical astronomy.	1899
W. H. BOLT	$\mathrm{vers}(\xi) = \mathrm{vers}(P).\cos\varphi \,.\, \cos D + \mathrm{vers}(\varphi - D)$ Formule proposée dans l'édition 1900 de l'Epitome de Norie.	1900
P. L. H. DAVIS	$\mathrm{hav}(\xi) = \mathrm{hav}(\varphi - D) + \mathrm{hav}(\theta)$ avec $\mathrm{hav}(\theta) = \mathrm{hav}(P).\cos\varphi \,.\, \mathrm{cos}D$ Requisite Tables; disposition des log hav et hav naturels côte à côte.	1905

J. N. de MATTA	$\sin H = \cos(\varphi - D) - \cos\varphi \,.\, \cos D \,.\, \mathrm{vers}(P)$ Formule de Douwes employée dans les « Taboa Polytelica » (Portugal).	1906
H. B. GOODWIN	$\mathrm{hav}(P) = \dfrac{\mathrm{hav}(\xi) - \mathrm{hav}(c - \delta)}{\mathrm{hav}(c + \delta) - \mathrm{hav}(c - \delta)}\ ;\ (c = 90° - \varphi)$ Nautical Magazine ; The Haversine in Nautical Astronomy.	1910
R. PEAUX	Formule de Douwes ci-dessus. Zeevaartkundige Tafelen.	1912
F. RADLER de AQUINO	$\mathrm{vers}\xi = \mathrm{vers}(\varphi - D) + \mathrm{vers}(\theta);\ \left(\csc\dfrac{\theta}{2}\right)^2 = \sec\varphi \,.\, \sec D.\left(\csc\dfrac{P}{2}\right)^2$ New Log and Versines Altitude Tables (in Newest Navigation Altitude and Azimuth Tables).	1912
A. RUST	$\mathrm{hav}(P) = \sec\varphi \,.\, \sec D \,.\, [\cos(\varphi - D) - \sin H]/2$ Practical Tables for Navigators and Aviators.	1918
S. YONEMURA	Formule de P. L. H. Davis (Requisite Tables, 1905). Tables for calculating Altitude and Azimuth of Celestial Bodies.	1920
H. B. GOODWIN	$\mathrm{vers}(P) = [\cos(\varphi - D) - \cos\xi].\sec\varphi \,.\, \sec D$ The α β γ Navigation Tables.	1921
C. CARIĆ	$\left(\sin\dfrac{\xi}{2}\right)^2 = \left(\sin\dfrac{P}{2}\right)^2 .\left(\cos\dfrac{\varphi + D}{2}\right)^2 + \left(\cos\dfrac{P}{2}\right)^2 .\left(\sin\dfrac{\varphi - D}{2}\right)^2$ Nautičke Table ; formule partiellement résolue avec des logarithmes d'addition et de soustraction.	1923
R. BRAGA	$A = \mathrm{hav}(P) - [\mathrm{hav}(\varphi + D).\mathrm{hav}(P)];\ B = \mathrm{hav}(\varphi - D) - [\mathrm{hav}(\varphi - D).\mathrm{hav}(P)];\ \mathrm{hav}(\xi) = A + B$ Taboas de Altura	1924
C. C. SOULE, J. Y. DREISONSTOK	$\dfrac{1}{\mathrm{hav}(P)} = \dfrac{\sec s \,.\, \csc(s - H)}{\sec\varphi \,.\, \csc\delta}$ Manuscript Tables for Altitude and Azimuth.	1932
J. B. DIEUMEGARD	$\mathrm{vers}(\xi) = \mathrm{vers}(\varphi - D) + \cos\varphi.\cos D \,.\, \mathrm{vers}(P)$ Petites Tables de Point Astronomique.	193?
P. V. H. WEEMS	$\left(\csc\dfrac{P}{2}\right)^2 = \dfrac{\sec s \,.\, \csc(s - H)}{\sec\varphi \,.\, \sec D}$ The Secant Time Sight.	1944
G. W. D. WALLER	$\csc H = \dfrac{\csc\varphi \,.\, \csc D}{1 + \dfrac{\csc\varphi \,.\, \csc D}{\sec\varphi \,.\, \sec D \,.\, \sec P}}$ Projet de table. Formule partiellement résolue avec des logarithmes d'addition et de soustraction.	1946
V. GEORGE et P. HUGON	$\mathrm{hav}(\xi) = X.y + Yx;\ X = \mathrm{hav}(180° - P);\ y = \mathrm{hav}(D - \varphi);\ Y = \mathrm{hav}(P);\ x = \mathrm{hav}[180° - (\varphi + D)]$ Table de Logarithmes et de Navigation (George & Hugon). Nouvelles Tables pour le Calcul de la Droite de Hauteur à partir du point estimé (Hugon).	1944 1947
S. CHIESA	Formule en cosinus-haversine. Tavole Nautiche e Tavole de semisenoversi.	1948
G. ROSE	Formule en cosinus-haversine. Nautische Tafeln.	1952
R. DONIOL	$\sin H = n - (n + m).a;\ n = \cos(\varphi - D);\ m = \cos(\varphi + D);\ a = \mathrm{hav}(P)$ Table de point miniature.	1955
Société DIGIPOCHE	Calcul manuel de la formule fondamentale ; table Digilog donnant les valeurs naturelles des sinus et cosinus avec quatre décimales.	1991 ?
R. DONIOL modifié	Formule dite « haversine-Doniol » mise au point par des intervenants du forum « Fer3 » à partir de la formule de Doniol : $\mathrm{hav}(\xi) = n + [1 - (n + m)].a\ ;\ n = \mathrm{hav}(\varphi - D), m = \mathrm{hav}(\varphi + D), a = \mathrm{hav}(P)$	2015

ANNEXE 7-2

TABLES de G. F. MARTELLI et de G. POUVREAU

Formulation employée :

On reprend ci-dessous la formulation indiquée par G. Pouvreau en explication de ses tables, analogue à celle de Martelli.

Partant de la formule établie en annexe 1-1 :

$$2.\left(\sin\frac{P}{2}\right)^2 = \frac{\cos(\varphi - D) - \sin H}{\cos\varphi\,.\cos D}$$

On inverse les deux membres, on les multiplie par 10 et on ajoute et retranche 1 au dénominateur du second membre et on obtient :

$$\frac{10}{2.\left(\sin\frac{P}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}.\cos\varphi\,.\sqrt{10}.\cos D}{\cos(\varphi - D) + (1 - \sin H) - 1}$$

On ajoute et retranche 0,2 au dénominateur du second membre et on multiplie les dénominateurs par 10^3 :

$$\frac{10}{2.10^3.\left(\sin\frac{P}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}.\cos\varphi\,.\sqrt{10}.\cos D}{10^3.[0{,}2 + \cos(\varphi - D)] + 10^3.(1 - \sin H) - 1200}$$

On pose $M = 10^3.[0{,}2 + \cos(\varphi - D)]$, $N = 10^3.(1 - \sin H)$ et $S = M + N$, on multiplie les deux membres par $10^7/4630$ et on obtient :

$$\frac{10^5}{9260.\left(\sin\frac{P}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}.\cos\varphi\,.\sqrt{10}.\cos D}{4630.10^{-7}.[M + N - 1200]}$$

La table 1 de Martelli (Log of Lat and Declination) donne la partie décimale (mantisse) des logarithmes de $\sqrt{10}.\cos\varphi$ et de $\sqrt{10}.\cos D$ avec 4 chiffres significatifs ; l'argument est exprimé de 0° à 71° 34' avec un intervalle de 1'. Les cosinus ont été multipliés par $\sqrt{10}$ pour éviter les logarithmes négatifs. En 1943, la table 1 a été prolongée jusqu'à 90° sans que la formule ne soit changée ; les logarithmes correspondant aux arguments supérieurs à 71° 34' sont donc négatifs.

La table 2 (Sum or Difference) donne M en fonction de la différence algébrique φ – D exprimée de 0° à 90° avec un intervalle de 1' et la table 3 (Angle of Altitude) donne N en fonction de la hauteur H selon une même argumentation. Le résultat brut du calcul de M et de N est supposé être exprimé en secondes de temps et est converti dans les tables 2 et 3 en minutes, secondes et dixièmes. Cet artifice, relativement courant semble-t-il à l'époque, aurait pour but de faciliter les opérations sur des grands nombres en les décomposant en deux blocs.

On forme la somme S = M + N, toujours exprimée en minutes, secondes et dixièmes. L'analyse montre que S est bornée par 20 m et 36 m 40 s. En effet, lorsque $\cos(\varphi - D) = \sin H$, c'est-à-dire au moment du passage au méridien, on a M + N = 1200 s = 20 m. Le maximum de la somme M + N est obtenu lorsque $\cos(\varphi - D) = 1$ et $\sin H = 0$ et donne M + N = 2200 s = 36 m 40 s.

La table 4 (Auxiliary Logarithm) donne, en fonction de S argumenté de 20 m 00,0 s à 36 m 40,0 s avec un intervalle de 0,1 s le cologarithme de $4630.10^{-7}.[M + N - 1200] = 0{,}4630.[\cos(\varphi - D) - \sin H]$. Ce nombre est exprimé avec 4 décimales avec, notamment, $\operatorname{colog} 0{,}4630 \approx 0{,}3344$.

Enfin, la table 5 (Hour Angle) donne :

$$\log \frac{10^5}{9260.\left(\sin {}^{P}/_{2}\right)^2} \approx 1{,}0334 - 2.\log \sin {}^{P}/_{2}$$

cette table est directement argumentée en angle horaire, de 0 h à 8 h et de 16 h à 24 h avec un intervalle de 5 s.

On détermine donc la somme S puis le cologarithme correspondant avec la table 4. On effectue ensuite la somme de ce cologarithme avec les deux logarithmes obtenus en table 1. Cette somme est entrée en table 5 dont on extrait l'angle horaire.

Observations relatives à la construction des tables :

Table 4 : on remarque que pour l'argument 20 m 00,0 s, le cologarithme n'est pas défini et tend vers l'infini : on aurait alors dû inscrire dans la table le symbole correspondant. Il n'en est rien et G. F. Martelli a porté la quantité 5,0000. De même, pour 20 m 00,1 s, il aurait dû être inscrit 4,3344 ; on trouve 4,3010. Les nombres figurant ensuite sont corrects. Martelli aurait-il cherché à désorienter ceux qui ont essayé de trouver la formulation qu'il a employée[75] ?

Il est hasardeux de donner d'autres éléments de justification relatifs aux constantes employées. On remarque cependant que le rapport $10^5/9260 = 10{,}799$ est peu différent de 10,800 ; on sait d'autre part que le nombre 10800 était fréquemment employé pour l'interpolation avec des logarithmes proportionnels dans les calculs de distances lunaires. Ce nombre aurait-il influencé Martelli ? Ch. H. Smiley, et quelques autres auteurs anglo-saxons, écrivent la formule utilisée par Martelli sous la forme globale, presque équivalente, puisque le rapport ci-dessus ne tombe pas exactement sur 10,8 :

$$\frac{10{,}8}{\mathrm{hav(P)}} = \frac{1{,}08.\sqrt{10}.\cos\varphi\,.\sqrt{10}.\cos \mathrm{D}}{\mathrm{hav}(90° - \mathrm{H}) - \mathrm{hav}(\varphi - \mathrm{D})}$$

Exemple :

Les données de calcul sont rassemblées dans le tableau ci-dessous.

Estime		Coordonnées horaires		Observation	
φ_e	24° 30' S	AHvp	170° 52,0'	H_v	41° 49'
G_e	169° 48' E	D	19° 44,0' N		Soleil
AHvg = 340° 40,0' ; P = 19° 20,0' E					

Extraits des tables de Martelli :

TABLE 1
LOG OF LATITUDE AND DECLINATION

	19°	**20°**	**21°**	**22°**	**23°**	**24°**	**25°**	**26°**	**27°**
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
30'	4743	4716	4687	4656	4624	4590	4555	4518	4479
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
44'	4737	4709	4680	4649	4616	4582	4546	4509	4470
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

[75] G. Pouvreau donne les bonnes valeurs dans ses tables, sauf pour 20 m où il indique 0,00000 au lieu du symbole de l'infini.

TABLE 2 SUM OR DIFFERENCE									
	40° m. s	**41°** m. s	**42°** m. s	**43°** m. s	**44°** m. s	**45°** m. s	**46°** m. s	**47°** m. s	**48°** m. s
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
14'	16 03.4	15 52.0	15 40.4	15 28.6	15 16.5	15 04.2	14 51.7	14 39.0	14 26.1
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

TABLE 3 ANGLE OF ALTITUDE									
	40° m. s	**41°** m. s	**42°** m. s	**43°** m. s	**44°** m. s	**45°** m. s	**46°** m. s	**47°** m. s	**48°** m. s
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
49'	5 46.4	5 33.3	5 20.4	5 07.6	4 55.2	4 42.9	4 30.8	4 19.0	4 07.4
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
56'	5 44.8	5 31.7	5 18.9	5 06.2	4 53.7	4 41.5	4 29.4	4 17.6	4 06.1
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

TABLE 4 AUXILIARY LOGARITHM										
20 minutes										
	.0s	**.1s**	**.2s**	**.3s**	**.4s**	**.5s**	**.6s**	**.7s**	**.8s**	**.9s**
00	5.0000	4.3010	4.0334	3.8573	3.7324	3.6355	3.5563	3.4893	3.4314	3.3802
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
48	1.6532	1.6523	1.6514	1.6505	1.6496	1.6487	1.6478	1.6469	1.6460	1.6451
49	1.6443	1.6434	1.6425	1.6416	1.6407	1.6398	1.6390	1.6381	1.6372	1.6364
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
36 minutes										
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
40	0.3344	0.3344	0.3343	0.3343	0.3342	0.3342	0.3341	0.3341	0.3340	0.3340
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

TABLE 5 Azimut E **Hour Angle West 22 hours**													
	00s	**05s**	**10s**	**15s**	**20s**	**25s**	**30s**	**35s**	**40s**	**45s**	**50s**	**55s**	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	**...**
41m	2.5649	658	667	676	685	694	703	713	722	731	740	749	**18m**
42m	2.5758	768	777	786	795	804	814	823	832	841	851	860	**17m**
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	**...**
	60s	**55s**	**50s**	**45s**	**40s**	**35s**	**30s**	**25s**	**20s**	**15s**	**10s**	**05s**	
Hour angle West 1 hour Azimut W													

1) Calcul de la longitude du point déterminatif Lalande :

Compte tenu des données d'estime, le Soleil est dans l'Est ; l'angle horaire local AHvg est compris entre 12 et 24h (ou entre 180° et 360°).

φ_e =	S 24° 30’	T1 =	0,4590				
D =	N 19° 44’	T1 =	0,4737				
φ_e - D =	44° 14’					T2 =	15m 16,5s
H_v =	41° 49’					T3 =	5m 33,3s
		T4 =	1,6372	←	← Somme =		20m 49,8s
		Somme =	2,5699	→	→ T5 =		22h 41m 28s
					AHvg =		**340° 22’**
					AHvp =		170° 52’
					G =		**E 169° 30’**

Le point déterminatif a donc pour coordonnées : φ_e = 24° 30’ S, G = 169° 30’ E.

2) Calcul de la hauteur estimée (méthode Marcq de Saint-Hilaire) :

L’angle horaire local estimé est : $AHvg_e = AHvp – G_e$ = 340° 40’ = 22h 42m 40s.

$AHvg_e$ =	22h 42m 40s					T5 =	2,5832
φ_e =	S 24° 30’					- T1 =	- 0,4590
D =	N 19° 44’					-T1 =	- 0,4737
		T4 =	20m 48,3s	←	Différence =		1,6505
φ_e - D =	44° 14’	- T2 =	- 15m 16,5s				
H_e =	**41° 56’**	T3 ← Différence =	5m 31,8s				

L’intercept a donc pour valeur : $H_v – H_e$ = 41° 49’ – 41° 56’ = - 7’.

3) Calcul de l’azimut :

On le calcule par l’heure et la hauteur (formule (3’) établie en annexe 1-1) à l’aide de la table 1 (dont tous les extraits nécessaires ne sont pas représentés) :

AHvg =	340° 22’	P =	E 19° 38’				
		90° - P =	70° 22’	T1 =	0,0263		
		D =	19° 44’	T1 =	0,4737		
		H =	41° 49’	- T1 =	- 0,3723		
				Somme =	0,1277	90° - A_z =	65°
						Z =	**N25°E**

Pour comparaison, un calcul précis donne :

- Angle horaire local calculé : AHvg = 22h 41m 30s = 340° 22,5’,
- Longitude du point déterminatif Lalande : G = 169° 30,5’ E,
- Hauteur estimée : H_e = 41° 55,7’,
- Azimut : Z = 024,8°.

ANNEXE 7-3

FORMULATION en COSINUS-VERSINES et HAVERSINES

TABLES de P. L. H. DAVIS, W. HALL et J. B. DIEUMEGARD

Formules employées :

Formule en cosinus-haversine :

$$\mathrm{hav}(\xi) = \mathrm{hav}(\varphi - \mathrm{D}) + \mathrm{hav}(\theta) \text{ avec } \mathrm{hav}(\theta) = \cos\varphi \,.\, \cos \mathrm{D} \,.\, \mathrm{hav}(\mathrm{P})$$

Formule en cosinus-versine :

$$\mathrm{vers}(\xi) = \mathrm{vers}(\varphi - \mathrm{D}) + \mathrm{vers}(\theta) \text{ avec } \mathrm{vers}(\theta) = \cos\varphi . \cos \mathrm{D} \,.\, \mathrm{vers}(\mathrm{P})$$

Requisite Tables de P. L. H. Davis :

L'usage des Requisite Tables n'appelle pas de remarque particulière, le calcul se déroule naturellement, comme dans l'exemple ci-dessous.

Les données sont les suivantes : AHag = P = 31° 23,7', φ= 45° 26,0' N, D = 17° 54,0' N.

				ligne n°
P =	31° 23,7'	loghavP =	8,86452	1
φ =	N 45° 26,0'	logcosφ =	9,84618	2
D =	N 17° 54,0'	logcosD =	9,97845	3
φ – D =	27° 32,0'	loghavθ =	8,68915	4
		havθ =	0,04888	5
		hav(φ – D) =	0,05663	6
		havξ =	0,10551	7
		ξ =	37° 54,6'	8
		H = 90° - ξ =	52° 05,4'	9

On donne ci-dessous quelques extraits nécessaires de la table des haversines et de leurs logarithmes :

	25° 30'			31° 15'			37° 45'	
	Log. Hav	Nat. Hav		Log. Hav	Nat. Hav		Log. Hav	Nat. Hav
2' 45''	8.68913	**0.04888**		8.86184	**0.07275**		9.02078	**0.10490**
3' 00''	8.68927	**0.04890**		8.86196	**0.07277**		9.02087	**0.10492**
…	…	**…**	…	…	**…**	…	…	**…**
8' 30''	8.69233	**0.04924**		8.86443	**0.07319**		9.02290	**0.10541**
8' 45''	8.69247	**0.04926**		8.86455	**0.07321**		9.02299	**0.10544**
…	…	**…**		…	**…**		…	**…**
9' 30''	8.69288	**0.04930**		8.86488	**0.07326**		9.02326	**0.10550**
9' 45''	8.69302	**0.04932**		8.86499	**0.07328**		9.02336	**0.10552**

Quelques commentaires et explications :

Ligne 1 : il faut interpoler à vue pour trouver le log hav(P) sachant que l'intervalle d'argumentation est ici de 15''.

Lignes 2 et 3 : sans observation (la table n'a pas été reproduite, les logarithmes se retrouvent facilement avec une calculatrice scientifique).

Ligne 4 : la ligne 4 est la somme des trois logarithmes ; il faut retrancher mentalement 10 aux caractéristiques toutes les fois que, dans l'addition, le total dépasse 10, pour que la somme garde une forme 10 + logx. Concernant la différence algébrique φ – D, on retiendra que si latitude et déclinaison sont de même nom, on prendra la valeur absolue de la différence ; dans le cas contraire, on fera la somme des deux arcs.

Ligne 5 : on détermine directement hav(θ) en fonction de son logarithme ; l'interpolation, inutile ici, peut constituer une réelle difficulté.

Ligne 6 : sans observation.

Ligne 7 et 8 : la ligne 7 est la somme des deux haversines naturelles ; la recherche de l'argument peut nécessiter une interpolation (ce qui n'est pas le cas ici).

Hall's Appendix to Raper :

Le déroulement du calcul est identique à celui concernant les Requisite Tables de Davis.

Les données de calcul sont identiques à celles de l'exemple précédent.

P =	31° 23,7'	logversP =	9,1657	
φ =	N 45° 26,0'	logcosφ =	9,8462	
D =	N 17° 54,0'	logcosD =	9,9785	
φ – D =	27° 32,0'	logversθ =	8,9904	
		versθ =	0,0978	
		vers(φ_e – D) =	0,1133	
		versξ =	0,2111	
		ξ =	37° 55'	→ H = 52° 05'

On donne ci-dessous l'extrait de la table des versines naturelles et leurs logarithmes :

	25°			31°			37°	
	Log. vers	Nat. vers		Log. vers	Nat. vers		Log. vers	Nat. vers
23' 24'	8.9847 8.9853	**0.0965** **0.0967**		9.1652 9.1657	**0.1463** **0.1464**		9.3126 9.3130	**0.2054** **0.2056**
…	…	**…**	…	…	**…**	…	…	**…**
33' 34'	8.9903 8.9909	**0.0978** **0.0979**		9.1697 9.1702	**0.1478** **0.1480**		9.3163 9.3167	**0.2072** **0.2074**
…	…	**…**		…	**…**		…	**…**
54' 55' 56'	9.0019 9.0025 9.0030	**0.1004** **0.1006** **0.1007**		9.1791 9.1795 9.1799	**0.1510** **0.1512** **0.1513**		9.3241 9.3245 9.3248	**0.2109** **0.2111** **0.2113**

Petites tables de Point Astronomique de J.-B. Dieumegard :

La formulation est identique à celle utilisée par W. Hall, en cosinus-versine, cependant Dieumegard inverse la formule donnant le versine de θ de façon à utiliser les cologarithmes des cosinus (ou logarithmes des sécantes) qui sont des nombres positifs :

$$\mathrm{vers}(\xi) = \mathrm{vers}(\varphi - \mathrm{D}) + \mathrm{vers}(\theta) \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\mathrm{vers}(\theta)} = \frac{1}{\cos\varphi \,.\, \cos \mathrm{D} \,.\, \mathrm{vers}(\mathrm{P})}$$

soit, sous forme logarithmique pour trouver le versine de θ :

$$\mathrm{colog\,vers}(\theta) = \mathrm{colog}\cos\varphi + \mathrm{colog}\cos \mathrm{D} + \mathrm{colog\,vers}(\mathrm{P})$$

Nota : on rappelle que colog(x) = - log(x) = log(1/x).

En reprenant les données de l'exemple précédent, on

				tables	ligne n°
P =	31° 23,7'	cologversP =	0,8344	1	1
φ =	N 45° 26,0'	cologcosφ =	0,1538	2	2
D =	N 17° 54,0'	cologcosD =	0,0215	2	3
φ – D =	27° 32,0'	cologversθ =	1,0097		4
		versθ =	0,0978	3	5
		vers(φ – D) =	0,1133	A	6
		versξ =	0,2111		7
		H =	52° 05'	A	8

Les opérations des lignes 1, 2, 3 et 4 n'appellent pas de commentaires, les tables 1, 2 et 3 étant à simple argument ; la lecture et le report sont directs, sans interpoler (ou, exceptionnellement, à vue).

Le passage de la ligne 4 à la ligne 5 se fait en table 3 « à l'envers » où l'on entre, à l'intérieur de la table, avec colog vers(θ) pour ressortir en vertical avec les « milles et centaines » et en horizontal avec les « dizaines et unités » ; l'interpolation, si nécessaire, se fait à vue. On donne ci-dessous l'extrait utile de la table :

	Milles et centaines					
		…	**08**	**09**	**10**	**…**
Dizaines et unités	**…** **78** **80** **…**	…	… 1.0565 1.0555 …	… 1.0097 1.0088 …	… 0.9674 0.9666 …	…

Ligne 5 : entrer dans la table A, dont l'extrait est donné ci-après, avec l'argumentation supérieure (degrés de φ – D) et gauche (minutes de φ – D) ; lecture directe de la fonction versine.

Ligne 8 : utiliser ici la table A « à l'envers », à partir de la valeur de la fonction versine ; ressortir selon l'argumentation complémentaire inférieure (degrés de H) et droite (minutes de H) ; ne pas chercher à interpoler.

↓ φ – D →	…	27°	…	37°	…	
… 31’ 32’ 33’ … 54’ 55’ 56’ …	…	… 0.1131 0.1133 0.1134 … 0.1162 0.1164 0.1165 …	…	… 0.2068 0.2070 0.2072 … 0.2109 0.2111 0.2113 …	…	… 29’ 28’ 27’ … 06’ 05’ 04’ …
	…	62°	…	52°	…	← H ↑

Précision des tables de Hall et Dieumegard (4 décimales) :

Une analyse mathématique du problème permet d’évaluer l’incertitude maximale ΔH sur la hauteur résultant de l’arrondi des éléments de calcul sur la quatrième décimale ; cette incertitude est fonction de la hauteur H et de la distance zénithale méridienne (φ – D). Ces valeurs sont rassemblées dans le tableau ci-dessous :

φ – D → H ↓	90°	80°	70°	60°	50°	40°	30°	20°	10°	0°
0°	0,84’	1,12’	1,39’	1,64’	1,86’	2,06’	2,21’	2,33’	2,40’	2,43’
10°	-	0,85’	1,12’	1,37’	1,60’	1,80’	1,96’	2,08’	2,15’	2,18’
20°	-	-	0,87’	1,13’	1,37’	1,58’	1,75’	1,87’	1,95’	1,97’
30°	-	-	-	0,90’	1,16’	1,38’	1,57’	1,70’	1,78’	1,81’
40°	-	-	-	-	0,95’	1,20’	1,41’	1,56’	1,66’	1,69’
50°	-	-	-	-	-	1,03’	1,28’	1,46’	1,57’	1,61’
60°	-	-	-	-	-	-	1,19’	1,42’	1,56’	1,61’
70°	-	-	-	-	-	-	-	1,51’	1,71’	1,78’
80°	-	-	-	-	-	-	-	-	2,48’	2,62’
85°	-	-	-	-	-	-	-	-	-	4,51’

Au vu de ces valeurs, on peut retenir que, si on limite la plage d’utilisation des tables de J.-B. Dieumegard au traitement de hauteurs comprises entre 10° et 80°, l’incertitude maximale à craindre sur la hauteur n’excède pas 2,6’, celle-ci étant d’autant plus faible que l’astre culmine loin du zénith.

Cependant, on a remarqué que les valeurs maximales d’incertitude mises en évidence ci-dessus ne sont pas atteintes. De la pratique que nous avons de ces tables, les incertitudes constatées sont bien inférieures puisque les écarts successifs entre valeurs « exactes » et valeurs tabulées à 4 décimales sont :

- toujours inférieurs à $\varepsilon = 5.10^{-5}$,
- très fréquemment de signes alternés ce qui entraîne une certaine compensation des écarts.

Ces deux constatations nous ont conduits à rechercher la distribution des écarts entre valeurs dites « exactes » (fournies par un tableur) et valeurs tabulées. Pour les quatre tables constituant les « Petites Tables de Point Astronomique », une recherche systématique a conduit aux résultats suivants :

- valeur moyenne des écarts quasi nulle,
- écarts-types d'environ $2{,}8.10^{-5}$,
- valeur absolue maximale des écarts $\varepsilon = 5.10^{-5}$ (ce qui constitue une hypothèse de départ).

La distribution des écarts semble être sensiblement rectangulaire et il y a autant de chance d'obtenir un écart positif qu'un écart négatif. Une analyse plus poussée resterait à mener pour fixer des valeurs d'incertitude, sur le résultat final combinant les 6 lectures de tables, associées à une probabilité. Sur la base des très nombreux exemples traités, nous avons constaté que l'incertitude finale sur la hauteur excède rarement la minute d'arc, ceci sur l'intervalle pratique d'utilisation des tables, soit pour des hauteurs comprises entre 10° et 80°.

Formes naturelle et en cosinus-versines (ou haversine) de la formule fondamentale, comparaison :

La comparaison est effectuée à partir d'un exemple dont les données sont les suivantes, les calculs étant menés avec une table de logarithmes à 5 décimales (Norie's Nautical Tables par exemple pour les deux formes) :

P = 31° 18,5'	φ = 26° 51,0' N	D = 5° 17,3' S

Forme « naturelle » :

$$\sin H = \sin\varphi \,.\, \sin D + \cos\varphi \,.\, \cos D \,.\, \cos P$$

Le tableau de calcul est le suivant :

P =	31° 18,5'			logcos =	9,93165
φ =	26° 51,0' N	logsin =	9,65481	logcos =	9,95046
D =	5° 17,3' S	logsin =	8,96458	logcos =	9,99815
		logA =	8,61939	logB =	9,88026
		A =	- 0,04163		
		B =	0,75903		
		A + B =	0,71740	**H =**	**45° 50,4'**

Forme « cosinus-haversine » :

$$\mathrm{hav}(N) = \mathrm{hav}(\varphi - D) + \cos\varphi \,.\, \cos D \,.\, \mathrm{hav}(P)$$

Le tableau de calcul est ici :

P =	31° 18,5'	loghav =	8,86218		
φ =	+ 26° 51,0'	logcos =	9,95046		
- D =	+ 5° 17,3'	logcos =	9,99815		
φ – D =	32° 08,3'	loghav =	8,81079		
		havθ =	0,06468		
		hav(φ – D) =	0,07662		
		havξ =	0,14130	ξ =	44° 09,6'
				H =	**45° 50,4'**

On a reporté dans le tableau ci-après quelques critères d'appréciation des deux méthodes :

Formes	Logarithmes à reporter	Additions de logarithmes	Extraction de nombre à partir du logarithme	Additions de nombres	Extraction d'un arc
Naturelle	5	2	2	1 algébrique	1
cosinus-haversine	3	1	1	1 arithmétique	1

On remarque que l'avantage revient à la forme en cosinus-haversine (ou cosinus-versine).

ANNEXE 7-4

UTILISATION des VALEURS NATURELLES

TABLES de R. BRAGA et de R. DONIOL

Tables de R. Braga :

Formulation :

La formule fondamentale donnant la hauteur H en fonction de l'angle au pôle P, de la latitude φ et de la déclinaison D :

$$\sin H = \sin \varphi \,.\, \sin D + \cos \varphi \,.\, \cos D \,.\, \cos P$$

peut s'écrire, en utilisant la fonction haversine :

$$\mathrm{hav}(90° - H) = \mathrm{hav}(\varphi - D) + \cos \varphi . \cos D . \mathrm{hav}(P)$$

On vérifie d'autre part, en utilisant les formules de transformation de produit en somme, que :

$$\cos \varphi . \cos D = 1 - \mathrm{hav}(\varphi - D) - \mathrm{hav}(\varphi + D)$$

La relation s'écrit alors :

$$\mathrm{hav}(90° - H) = \mathrm{hav}(\varphi - D) + \mathrm{hav}(P) - \mathrm{hav}(\varphi - D).\mathrm{hav}(P) - \mathrm{hav}(\varphi + D).\mathrm{hav}(P)$$

Soit, en ordonnant selon une somme de deux termes A et B constitués d'une même composition de fonctions :

$$\mathrm{hav}(90° - H) = [\mathrm{hav}(P) - \mathrm{hav}(P).\mathrm{hav}(\varphi + D)] + [\mathrm{hav}(\varphi - D) - \mathrm{hav}(\varphi - D).\mathrm{hav}(P)] = A + B$$

$$A = \mathrm{hav}(P) - \mathrm{hav}(P).\mathrm{hav}(\varphi + D) \;,\; B = \mathrm{hav}(\varphi - D) - \mathrm{hav}(\varphi - D).\mathrm{hav}(P)$$

Mise en table :

Les tables de R. Braga sont constituées de deux séries de tableaux. La première, intitulée « Table I », donne les valeurs naturelles des fonctions A et B des variables P et z telles que :

$$A = \mathrm{hav}(P) - \mathrm{hav}(P).\mathrm{hav}(z) \quad \text{et} \quad B = \mathrm{hav}(z) - \mathrm{hav}(z).\mathrm{hav}(P)$$

La seconde série de tableaux, appelée « Table II », est une simple table des valeurs naturelles de la fonction haversine permettant d'extraire la hauteur. Selon un usage fréquent à cette époque et, dans le but d'éviter les décimales, les valeurs numériques calculées sont multipliées par 10^5.

Table I :

La table I comporte 108 pages, une par valeur entière de l'angle au pôle P, argumenté de degré en degré entier de 8° à 115°. Chaque page comporte un tableau à simple entrée z = x ou z = y, argumenté de 0° à 90° avec un intervalle de 1°. Chaque tableau donne, en fonction de cet argument, les quantités A et B (au facteur 10^5 près).

R. Braga a conçu sa table I à partir d'arguments positifs obtenus par des opérations arithmétiques :

$$x = |\varphi| + |D| \quad \text{et} \quad y = \big||\varphi| - |D|\big|$$

On a ainsi :

Si latitude et déclinaison sont de même nom :

$$\mathrm{hav(x) = hav(|\varphi| + |D|) = hav(\varphi + D)} \;\; \text{et} \;\; \mathrm{hav(y) = hav\big||\varphi| - |D|\big| = hav(\varphi - D)}$$

donc,

$$\mathrm{A = hav(P) - hav(P).hav(x)} \;\; \text{et} \;\; \mathrm{B = hav(y) - hav(y).hav(P)}$$

Si latitude et déclinaison sont de noms contraires :

$$\mathrm{hav(x) = hav(|\varphi| + |D|) = hav(\varphi - D)} \;\; \text{et} \;\; \mathrm{hav(y) = hav\big||\varphi| - |D|\big| = hav(\varphi + D)}$$

donc,

$$\mathrm{A = hav(P) - hav(P).hav(y)} \;\; \text{et} \;\; \mathrm{B = hav(x) - hav(x).hav(P)}$$

Ainsi, les arguments d'entrée sont les valeurs absolues de la somme et de la différence des valeurs absolues de la latitude et de la déclinaison, la lecture de la valeur des fonctions se faisant dans une colonne ou l'autre suivant leurs noms respectifs. La table I donne également, en vue de l'interpolation, les différences tabulaires ΔA et ΔB divisées par 60 : ces quantités sont donc les variations des fonctions consécutives à une variation de l'argument de 1' ou variations unitaires.

La table I est disposée comme suit :

P = 21° = 1 h 24 m				
Lat. et déc. de même nom				
φ ± D	A	(ΔA)	B	ΔB
… 6° 7° 8° … 39° 40° 41° …	… 3.312 3.309 3.305 … 2.951 2.933 2.914 …	… - 0,05 - 0,07 - 0,07 … - 0,30 - 0,32 - 0,33 …	… 265 360 470 … 10.773 11.309 11.857 …	… + 1,58 + 1,83 + 2,08 … + 8,93 + 9,13 + 9,32 …
φ ± D	B	ΔB	A	(ΔA)
Lat. et déc. de noms contraires				

Table II :

La table II comporte 9 pages et est une table des valeurs naturelles de la fonction haversine à 5 chiffres significatifs. Elle est argumentée de 0° à 84° 20' avec un intervalle de 1'.

Exemple :

R. Braga préconise d'utiliser un point auxiliaire dont les coordonnées géographiques, aussi proches que possible de celles du point estimé, sont définies comme suit :

- sa longitude est telle que l'angle au pôle soit un nombre entier de degrés,
- sa latitude est telle que la somme $\mathrm{x = |\varphi| + |D|}$ soit un nombre entier de degrés.

Dans ces conditions, il n'y a lieu d'interpoler que pour trouver B résultant de la différence arithmétique y entre les valeurs absolues de la latitude auxiliaire et de la déclinaison. Cette interpolation est immédiate en ajoutant à B le

produit M.ΔB, M étant le nombre de minutes de la différence y et ΔB, la variation unitaire de B lue dans la table en regard de la valeur de B considérée.

Remarque : compte tenu des éléments fournis par la table, on aurait aussi pu choisir un point auxiliaire dont la latitude est telle que la différence y soit un nombre entiers de degrés et interpoler pour A ; il est également possible de conserver la latitude estimée et d'interpoler pour A et pour B.

Les données de calcul sont les suivantes :

Estime		Coordonnées horaires		Observation	
φ_e	23° 54,0' S	AHvp	22° 48,7'	H_v	44° 50,0'
G_e	43° 37,0' W	D	16° 21,3' N		Soleil
$AHvg_e$ = 339° 11,7' ; Pe = 20° 48,3' E					

Angle au pôle auxiliaire : P_a = 21° E

Longitude auxiliaire : G_a = 43° 48,7' W

Latitude auxiliaire : le nombre entier le plus proche de la somme arithmétique $|\varphi_e| + |D| = 40° 15{,}3'$ est 40° ; la latitude auxiliaire est donc φ_a = 23° 38,7' S.

On a donc ici, une somme x = 40° et une différence $y = \big||\varphi_a| - |D|\big| = 7° 17{,}4'$. Sachant que latitude et déclinaison sont de noms contraires, on lit dans la table, dont un extrait est représenté en page précédente : A = 11.309, B = 3.309 et ΔB = - 0,07 ; la quantité B à considérer est donc B = 3.309 – 0,07.17,4 = 3.308. On obtient la somme A + B = 14.617.

La table II donne :

'	…	43°	44°	45°	46°	…
00'		15.900	15.267	14.645	14.033	
01'		15.889	15.257	14.634	14.023	
02'	…	15.879	15.246	14.624	14.013	…
03'		15.868	15.236	14.614	14.003	
…		…	…	…	…	

L'interpolation linéaire dans la table donne : H_a = 45° 02,7' ; l'intercept est donc de – 12,7' par rapport au point auxiliaire.

Table de Doniol :

Formulation :

D'une manière générale, la formule fondamentale liant à un instant donné hauteur H, latitude φ, déclinaison D et angle au pôle P s'écrit :

$$\sin H = \sin\varphi \,.\, \sin D + \cos\varphi \,.\, \cos D \,.\, \cos P$$

On sait d'autre part que :

$$\cos(D - \varphi) = \cos\varphi \,.\, \cos D + \sin\varphi \,.\, \sin D \quad \text{soit,} \quad \sin\varphi \,.\, \sin D = \cos(D - \varphi) - \cos\varphi \,.\, \cos D$$

soit, en reportant dans la formule de départ :

$$\sin H = \cos(D - \varphi) - \cos\varphi \,.\, \cos D \,.\, (1 - \cos P)$$

comme :

$$1 - \cos P = 2.\left(\sin\frac{P}{2}\right)^2 \quad \text{et} \quad 2.\cos\varphi \,.\, \cos D = \cos(D - \varphi) + \cos(D + \varphi)$$

il vient :

$$\sin H = \cos(D - \varphi) - [\cos(D - \varphi) + \cos(D + \varphi)].\left(\sin\frac{P}{2}\right)^2$$

ce que l'on peut finalement écrire sous la forme :

$$\sin H = n - (n + m).a$$

avec :

$$n = \cos(D - \varphi)\,, \quad m = \cos(D + \varphi), \quad a = \left(\sin\frac{P}{2}\right)^2 = \text{havP}$$

La formule est algébrique en utilisant les conventions usuelles de signe ; on remarquera donc que, l'astre étant observable, tous les termes de cette formule sont positifs, à l'exception de m dans le seul cas peu fréquent en pratique où $\varphi + D > 90°$.

Calcul de l'azimut :

On note ici A_z l'azimut de l'astre compté de 0° à 90°, à partir du N ou du S, vers l'E ou vers l'W. La formule des cotangentes s'écrit :

$$\tan A_z = \frac{\sin P}{\tan D \,.\, \cos\varphi - \cos P \,.\, \sin\varphi}$$

On va multiplier numérateur et dénominateur de cette fraction par $\cos D$ puis utiliser les relations :

$$\left(\cos\frac{P}{2}\right)^2 + \left(\sin\frac{P}{2}\right)^2 = 1 \quad , \quad \cos P = \left(\cos\frac{P}{2}\right)^2 - \left(\sin\frac{P}{2}\right)^2$$

On obtient :

$$\tan A_z = \frac{\sin P \,.\, \cos D}{\sin D \,.\, \cos\varphi \,.\left[\left(\cos\frac{P}{2}\right)^2 + \left(\sin\frac{P}{2}\right)^2\right] - \cos D \,.\, \sin\varphi \,.\left[\left(\cos\frac{P}{2}\right)^2 - \left(\sin\frac{P}{2}\right)^2\right]}$$

$$\tan A_z = \frac{\sin P \,.\, \cos D}{\left(\sin\frac{P}{2}\right)^2 .\sin(D + \varphi) + \left(\cos\frac{P}{2}\right)^2 .\sin(D - \varphi)}$$

Comme :

$$\sin P = 2.\sin\frac{P}{2}.\cos\frac{P}{2}$$

La fraction s'écrit :

$$\tan A_z = \frac{\cos D}{\frac{\tan P/2}{2}.\sin(D + \varphi) + \frac{\cot P/2}{2}.\sin(D - \varphi)}$$

La formule est algébrique et sera directement utilisée sous cette forme. Pour simplifier l'écriture, R. Doniol pose :

$$\tan A_z = \frac{\cos D}{f.\Delta_m + f'.\Delta_n} = \frac{\cos D}{\gamma}$$

Mise en table (voir extraits avec l'application numérique ci-après) :

Page « de droite » ou page B :

L'argument unique est l'angle au pôle exprimé en heures, minutes et secondes ; les valeurs d'argument tabulées, P_a, correspondent à des valeurs sélectionnées de a = hav(P_a). Ces dernières valeurs sont choisies pour ne comporter qu'un minimum de chiffres significatifs différents de zéro dans le but de simplifier les opérations arithmétiques. Au total, 122 valeurs de P_a sont exprimées, cet angle au pôle variant de 0 à 12 heures (0° à 180°). Ces valeurs imposées d'angle au pôle conduiront au choix de la longitude du point auxiliaire, P_a étant l'angle au pôle tabulé le plus proche de P_e.

Rappelons que nous avons toujours : $G_a = G_e + (P_e - P_a)$ si l'astre est à l'W (AHag < 180°) et $G_a = G_e - (P_e - P_a)$ si l'astre est à l'E (AHag > 180°).

En fonction de cet argument, la table donne :

- a = hav(P_a) à 3 ou 4 décimales exactes, les décimales suivantes pouvant être considérées comme nulles, dans la limite du niveau de précision recherché (5 décimales) ;
- f ; la valeur de f donnée est telle que :

$$f = \frac{10800}{\pi}.\frac{\tan {}^{P}/_{2}}{2}.10^{-2}$$

- f ' ; la valeur de f ' donnée est telle que :

$$f' = \frac{10800}{\pi}.\frac{\cot {}^{P}/_{2}}{2}.10^{-2}$$

Page « de gauche » ou page A :

L'argument d'entrée est ici un angle qui est compris entre 0° et 120° avec un intervalle d'argumentation de 0,5° ou 30'. Dans l'usage courant de la table, l'argument que l'on désignera par x peut représenter selon le cas l'une des quantités (D + φ), (D – φ) ou D. Ces valeurs imposées d'argument fixent le choix de la latitude du point auxiliaire φ_a qui doit être aussi voisine que possible de la latitude estimée φ_e et telle que (D + φ_a) ou (D – φ_a), au choix, soit un nombre entier de demi-degrés.

En fonction de cet argument x, la table donne :

- dans la colonne cos, la quantité 10^5.cosx ;
- dans la colonne Δ, la quantité exprimée avec une décimale :

$$\frac{\pi}{10800}.\sin x.10^5$$

- dans la colonne tg, la valeur de tanx, à deux décimales et pour x > 45°.

La colonne Δ a une double utilité :

- déterminer les éléments Δ_m et Δ_n respectivement en fonction de (D + φ_a) et (D – φ_a) ;
- elle fournit le facteur d'interpolation de l'élément correspondant figurant, pour le même argument, dans la colonne cos.

En effet, la colonne cos donne les valeurs de la fonction $y = 10^5.\cos x$; la variation de y, Δy, pour une petite variation Δx (en radians) de l'argument a pour expression :

$$\Delta y = -10^5.\sin x.\Delta x$$

Si $\Delta x = 1' = \pi/10800$ radian, nous retrouvons, en valeur absolue, la quantité donnée dans la colonne Δ ; cette quantité est donc la variation du cosinus (multiplié par 10^5) de l'argument lorsque ce dernier varie de 1', en valeur absolue.

Enfin, remarquons que R. Doniol a fait l'économie des valeurs naturelles de la fonction tangente pour les angles inférieurs à 45°. Il faudra alors prendre la tangente de l'argument complémentaire puis en calculer l'inverse pour obtenir la tangente cherchée. Par exemple, si x = 20°, prendre $\tan(90° - 20°) = \tan 70° = 2{,}75$; sachant que $\tan 20° = \cot 70° = 1/\tan 70°$, on obtient $\tan 20° = 1/2{,}75 = 0{,}36$.

Utilisation et exemple :

Les données de calcul sont les suivantes :

Estime		Coordonnées horaires		Observation	
φ_e	59° 03' N	AHap	286° 08,8'	H_v	38° 08,5'
G_e	27° 33' W	D	52° 35,0' N		
$AHag_e = 258°\ 35{,}8'$; $P_e = 101°\ 24{,}2'$ E = 6h 45m 37s					

Recherche des coordonnées du point auxiliaire: l'angle au pôle auxiliaire P_a, le plus proche de P_e, relevé en page B est de 6h 46m 09s ; la longitude du point auxiliaire est donc $G_a = G_e - (P_e - P_a) = 27°\ 41'$ W. On fixe ensuite l'arc $(D - \varphi_a)$, nombre entier de demi-degrés, ce qui conduit à $\varphi_a = 59°\ 05'$ N.

Calcul de la hauteur : l'angle au pôle auxiliaire donne directement la quantité a = 0,600. On recherche ensuite, en page A les quantités n et m, soit au facteur 10^5 près les valeurs de $\cos(D - \varphi_a)$ et $\cos(D + \varphi_a)$ en fonction de $(D - \varphi_a) = -6°\ 30'$ et $D + \varphi_a = 111°\ 40'$. La lecture de la table donne directement n = 99357 et, après interpolation m = - 36920.

On effectue ensuite la somme algébrique $\Sigma = m + n = 62437$. Cette somme est multipliée par a ; soit, $a.\Sigma = 37462$. On effectue enfin la somme algébrique $\sin H_a = n - a.\Sigma = 61895$. La hauteur cherchée est extraite de la table en page A à partir de son sinus que l'on vient de calculer en utilisant l'échelle complémentaire et en interpolant avec le facteur d'interpolation.

On lit dans la table : $\cos 52° = \sin 38° = 61566$, facteur d'interpolation $\Delta = 22{,}9$. La hauteur obtenue après interpolation est donc de 38° 14,4' et l'intercept est $H_v - H_a = -5{,}9'$, à partir du point auxiliaire.

Calcul de l'azimut :

Compte tenu d'une détermination au degré près, les interpolations sont négligées ou, exceptionnellement, faites « à vue ».

Dans la table en page B, on recherche, pour P_a, les valeurs de f et f ' : f = 21,1 et f ' = 14,1. En page A de la table, on recherche Δ_M et Δ_N en fonction respectivement de $(D + \varphi_a)$ et $(D - \varphi_a)$. On arrive facilement à : $\Delta_m = 27{,}1$ et $\Delta_n = -3{,}3$ (négatif car du signe de $D - \varphi_a$).

On effectue ensuite les produits $f.\Delta_m$ et $f'.\Delta_n$ puis la somme algébrique, soit $\gamma = +525$. En examinant les facteurs qui affectent les quantités f et Δ dans les tableaux, on note que γ est exprimé en millièmes et que la valeur à retenir pour diviser le $\cos D$ à trouver en dernière étape est de 0,525[76]. $\cos D$ se recherche dans la table en page A ; on lit directement sans interpoler, pour $D = 52°\ 35' \approx 52°\ 30'$: 60876, ce que l'on écrira 0,609. On effectue finalement la division 0,609/0,525 = 1,16 qui est la valeur approchée de $\tan A_z$, soit $A_z \approx 49°$. La tangente étant positive, l'azimut est compté du pôle élevé (N), vers l'E dans ce cas. On a donc finalement Z = N49°E = 049°.

[76] On peut aussi laisser γ en l'état et prendre pour cos D les 3 premiers chiffres donnés par la table.

Les calculs sont résumés dans le tableau ci-dessous :

Type du calcul :

D =	N 52° 35’					
φ_a =	N 59° 05’					
D – φ_a =	-6° 30’	n =	99357	f’.Δ_n =	-47	14,1.(-3,3)
D + φ_a =	111° 40’	m =	-36920	f.Δ_m =	572	21,1.27,1
		Σ =	62437	γ =	525	
P_a =	6h 46m 09s	-a.Σ =	-37462	cosD =	0,609	
a =	0,600	sinH_a =	61895	tanA_z =	1,16	cosD/γ
		sin38° =	61566	A_z =	49°	
		δ =	329/22,9	**Z =**	**N49°E = 049°**	
		H_a =	**38° 14,4’**			

Le calcul effectué à la calculette à partir du point auxiliaire donne H_a = 38° 14,4’ et Z = 049,3°.

Extraits des tables :

Table A

degrés	cos	Δ	tg	degrés
…	…	…		
6	99452	3,0		
6,5	99357	3,3		
7	99255	3,5		
…	…	…		
…	…	…	…	
52	61566	22,9	1,28	
52,5	60876	23,1	1,30	
53	60182	23,2	1,33	
…	…	…	…	
60	50000	25,2	1,73	120
…	…	…	…	…
68	37461	27,0	2,48	112
68,5	36650	27,1	2,54	111,5
69	35837	27,2	2,61	111
…	…	…	…	…

Table B

		f’	f	a	P_a
P_a	a	f	f’		
…	…	…	…	…	…
5 11 31	395	13,9	21,3	605	6 48 29
5 13 51	400	14,1	21,1	600	6 46 09
5 16 11	405	14,2	20,8	595	6 43 49
…	…	…	…	…	…

Formulation Haversines-Doniol :

La formule utilisée par R. Doniol,

$$\sin H = \cos(D - \varphi) - [\cos(D - \varphi) + \cos(D + \varphi)].\left(\sin\frac{P}{2}\right)^2$$

Peut être transformée en utilisant exclusivement la fonction haversine et on arrive facilement à :

$$\text{hav}(\xi) = \text{hav}(D - \varphi) + [1 - \text{hav}(D - \varphi) - \text{hav}(D + \varphi)].\text{hav}(P)$$

On posera alors :

$$\text{hav}(\xi) = n + [1 - (n + m)].a$$

expression dans laquelle :

$$n = \text{hav}(D - \varphi)\ ,\ \ m = \text{hav}(D + \varphi)\ ,\ \ a = \text{hav}(P)$$

et que l'on calculera à la main à l'aide de la seule table des haversines.

L'exemple ci-dessus peut être traité avec une table à quatre décimales et donne :

D =	N 52° 35'		
φ_a =	N 59° 05'		
D – φ_a =	-6° 30'	n =	0,0032
D + φ_a =	111° 40'	m =	0,6846
		m + n =	0,6878
P_a =	101° 32'	1 =	1
a =	0,600	1 – (m + n) =	0,3122
		[1 - (m + n)].a =	0,1873
		n =	0,0032
		havξ =	0,1905
		ξ =	51° 45,5'
		H_a =	38° 14,5'

H_a est ici arrondie à la demi-minute d'arc.

Extraits de la table des haversines naturels:

	…	6°	…	51°	…	101°	…	111°	…
…		…		…		…		…	
30'		0,0032		0,1887		0,5997		0,6833	
32'		0,0032		0,1890		0,6000		0,6835	
…		…		…		…		…	
40'	…	0,0034	…	0,1899	…	0,6011	…	0,6846	…
…		…		…		…		…	
44'		0,0027		0,1903		0,6017		0,6792	
46'		0,0035		0,1906		0,6020		0,6854	
…		…		…		…		…	

ANNEXE 7-5

TABLES de P. HUGON

Formulation :

La formule fondamentale s'écrit :

$$\sin H = \sin\varphi . \sin D + \cos\varphi . \cos D . \cos P$$

P. Hugon pose ensuite :

$$X = \left(\cos\frac{P}{2}\right)^2 \quad , \quad Y = \left(\sin\frac{P}{2}\right)^2$$

et on a donc :

$$X + Y = 1 \quad ; \quad X - Y = \cos P$$

La formule fondamentale peut alors s'écrire :

$$\sin H = (X + Y).\sin\varphi . \sin D + (X - Y).\cos\varphi . \cos D$$

$$\sin H = X.(\sin\varphi . \sin D + \cos\varphi . \cos D) + Y.(\sin\varphi . \sin D - \cos\varphi . \cos D)$$

$$\sin H = X.\cos(D - \varphi) - Y.\cos(D + \varphi)$$

En multipliant les deux membres de l'égalité par -1 puis en ajoutant 1 de chaque côté :

$$1 - \sin H = 1 - X.\cos(D - \varphi) + Y.\cos(D + \varphi)$$

En introduisant la distance zénithale $\xi = 90° - H$ et sachant que X + Y = 1, on obtient :

$$1 - \cos\xi = X - X.\cos(D - \varphi) + Y + Y.\cos(D + \varphi)$$

Soit :

$$1 - \cos\xi = X.[1 - \cos(D - \varphi)] + Y.[1 + \cos(D + \varphi)]$$

On introduit ici les fonctions haversine et co-haversine d'un arc α définis par :

$$\text{hav}\,\alpha = \frac{1 - \cos\alpha}{2} = \left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 \quad , \qquad \text{cohav}\,\alpha = \text{hav}(180 - \alpha) = \frac{1 + \cos\alpha}{2} = \left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

et on pose :

$$y = \text{hav}(D - \varphi) = \frac{1 - \cos(D - \varphi)}{2} \; ; \; x = \text{cohav}(D + \varphi) = \frac{1 + \cos(D + \varphi)}{2}$$

La formule fondamentale s'écrit finalement :

$$\text{hav}\,(\xi) = \text{cohav}\,(P).\text{hav}(D - \varphi) + \text{hav}\,(P).\text{cohav}(D + \varphi) = X.y + Y.x = A + B$$

La formule se calcule par logarithmes comme suit :

$$\log A = \log X + \log y \; ; \; \log B = \log Y + \log x \; ; \; \text{hav}\,\xi = A + B$$

La table, à simple argument, donne, en fonction de l'argument exprimé de 0° à 180° avec un intervalle d'argumentation de 1', les logarithmes des fonctions haversine et co-haversine de cet argument ainsi que son

haversine naturel. Etant donné que, par définition, cohav x = hav(180° - x), il suffit d'exprimer ces fonctions sur l'intervalle $[0°, 90°]$ avec une argumentation portée en partie supérieure pour les degrés et en colonne de gauche pour les minutes. Les valeurs supplémentaires relatives à l'intervalle $[90°, 180°]$, seront alors argumentées en partie inférieure pour les degrés et en colonne de droite pour les minutes.

A et B sont des quantités comprises entre 0 et 1 ; la correspondance entre ces nombres et leurs logarithmes peut donc se faire entre les colonnes donnant les haversines naturelles et leurs logarithmes. La table ainsi conçue permettrait d'extraire la distance zénithale ξ. Afin d'obtenir directement la hauteur H, la dernière colonne est argumentée en valeurs complémentaires. Les éléments calculés sont exprimés avec 5 décimales et chaque page comporte en partie droite un tableau de parties proportionnelles pour effectuer les interpolations si nécessaires.

Les logarithmes sont exprimés sous la forme fréquemment rencontrée dans les pays anglo-saxons : 10 est ajouté à la valeur algébrique du logarithme. Par exemple :

log(hav 47°) s'écrira 10 – 0,79860 = 9,20140.

Avec cette convention de notation, il faudra retrancher 10 aux caractéristiques à chaque fois que, dans une addition, le total dépassera 10. Notons pour terminer que les seules règles de signe à appliquer concernent les somme et différence algébriques D + φ et D – φ qui s'exécutent selon la convention usuelle :

- φ et D sont de même signe si elles sont de même nom,
- φ et D sont de signes contraires si elles sont de noms contraires.

On entrera dans la table avec les valeurs absolues de D + φ et de D - φ ; toutes les autres valeurs sont positives et il n'existe aucune ambiguïté possible dans la détermination de H_e.

Mise en table et exemple :

Angle au pôle estimé	Déclinaison	Latitude estimée
P_e = 67° 32,0' E	D = 12° 20,0' N	φ_e = 25° 13,0' S

$D - \varphi_e$ =	- 37° 33,0'	logy =	9,01531	$D + \varphi_e$ =	12° 53,0'	logx =	9,99450
P_e =	67° 32,0'	logX =	9,83952			logY =	9,48986
		logA =	8,85483			logB =	9,48436
		A =	0,07159				
		B =	0,30504				
		$hav\xi_e$ =	0,37663	**H_e =**	**14° 17,0'**		

Les extraits de table nécessaires sont représentés en page suivante.

Les lectures des quatre logarithmes (de X, Y, x, et y) sont directes dans la table et n'appellent pas d'explications particulières ; rappelons simplement que les fonctions haversine et co-haversine sont paires, on rentre ainsi dans la table avec la valeur absolue de l'argument si celui-ci est négatif.

Recherche de A et de B : encadrer log A et log B dans la colonne log hav et lire, en interpolant éventuellement, les valeurs correspondantes de A et de B ; dans cet exemple, l'interpolation est seulement nécessaire pour déterminer A : la différence tabulaire de la colonne de gauche est de 45.10^{-5}, celle de la colonne de droite est de 7.10^{-5} ; la différence entre la valeur de log A = 8,85483 et l'argument inférieur est de 12 ; l'interpolation donne : A = 0,07157 + 7.10^{-5}.12/45 = 0,07159.

Recherche de la hauteur estimée : on cherche maintenant à encadrer havξ_e, dans la colonne de droite ; on lira la partie entière de H_e sur la ligne du bas et les minutes correspondantes dans la colonne d'extrême droite ; l'interpolation est, dans ce cas, inutile.

↓	**12° 30'**			
D – φ D + φ P	logcohav x X	loghav y Y	hav A B	
… 22' 23' 24' …	… 9,99451 9,99450 9,99448 …	… 8,0988 8,0999 8,1010 …	… 0,01255 0,01259 0,01262 …	… 8' 7' 6' …
	Y y loghav	X x logcohav	H_e **77°00'**	P D + φ D - φ
	167° 00'			↑

↓	**37° 30'**			
D – φ D + φ P	logcohav x X	loghav y Y	hav A B	
… 2' 3' 4' …	… 9,95255 9,95251 9,95246 …	… 9,01494 9,01531 9,01569 …	… 0,10350 0,10359 0,10368 …	… 28' 27' 26' …
	Y y loghav	X x logcohav	H_e **52° 00'**	P D + φ D - φ
	142° 00'			↑

↓	**67° 30'**			
D – φ D + φ P	logcohav x X	loghav y Y	hav A B	
… 1' 2' 3' …	… 9,83961 9,83952 9,83944 …	… 9,48967 9,48986 9,49004 …	… 0,30879 0,30893 0,30906 …	… 29' 28' 27' …
	Y y loghav	X x logcohav	H_e **22°00'**	P D + φ D - φ
	112° 00'			↑

↓	**75° 30'**			
D – φ D + φ P	logcohav x X	loghav y Y	hav A B	
… 12' 13' 14' …	… 9,79484 9,79474 9,79464 …	… 9,57577 9,57593 9,57609 …	… 0,37650 0,37664 0,37678 …	… 18' 17' 16' …
	Y y loghav	X x logcohav	H_e **14° 00'**	P D + φ D - φ
	104° 00'			↑

↓	**31° 00'**			
D – φ D + φ P	logcohav x X	loghav y Y	hav A B	
… 2' 3' …	… 9,96775 9,96772 …	… 8,85471 8,85516 …	… 0,07157 0,07164 …	… 28' 27' …
	Y y loghav	X x logcohav	H_e **58°30'**	P D + φ D - φ
	148° 30'			↑

↓	**67° 00'**			
D – φ D + φ P	logcohav x X	loghav y Y	hav A B	
… 3' 4' …	… 9,84196 9,84188 …	… 9,48435 9,48454 …	… 0,30504 0,30517 …	… 27' 26' …
	Y y loghav	X x logcohav	H_e **22° 30'**	P D + φ D - φ
	112° 30'			↑

ANNEXE 7-6

UTILISATION des LOGARITHMES D'ADDITION et de SOUSTRACTION

Définition et tables :

On considère deux nombres positifs a et b dont on connait les logarithmes, $\log a$ et $\log b$. Le logarithme d'addition est la quantité $\log(a + b)$, celui de soustraction est $\log(a - b)$.

On pose x = b/a, avec a > b, et on obtient :

$$\log(a + b) = \log a.(1 + x) = \log a + \log(1 + x)$$

$$\log(a - b) = \log a.(1 - x) = \log a + \log(1 - x)$$

Une table, comme la table V de l'ouvrage de Friocourt, donne, en fonction de $\log x = \log b - \log a$, les quantités $\log(1 + x)$ et $\log(1 - x)$. Ainsi, si on désire calculer une quantité y = a ± b connaissant uniquement les logarithmes de a et de b, on évalue en premier lieu le logarithme du rapport x = b/a en veillant à choisir a > b puis, à l'aide de la table, on recherche le logarithme de (1 ± x). Par addition du logarithme de a à l'une des deux quantités, on obtient le logarithme d'addition ou de soustraction cherché, donc $\log y = \log(a \pm b)$. On déterminera ensuite la quantité y cherchée à l'aide d'une table de logarithmes classique.

Pour illustrer ce propos, on peut traiter un exemple de calcul de hauteur par la formule fondamentale sous sa forme naturelle :

$$\sin H = \sin \varphi \,.\, \sin D + \cos \varphi \,.\, \cos D \,.\, \cos P$$

avec P = 35°, φ = 50° N et D = 20° N puis 20° S. Le calcul semi-logarithmique classique conduit à :

$$\log a = \log \cos \varphi + \log \cos D + \log \cos P\,;\ \log b = \log \sin \varphi + \log \sin D\,;\ \log \sin H = \log(a + b)$$

Le calcul (que l'on ne détaillera pas ici) donne $\log b = 9{,}41831$ et $\log a = 9{,}69442$; il vient ensuite :

logb =	9,41831	log(1 + x) =	0,18456	log(1 – x) =	9,67253
- loga =	- 9,69442	+ loga =	9,69442	+ loga =	9,69442
logx =	- 0,27611	logsinH =	9,87898	logsinH =	9,36695
logx =	9, 72389				
		H =	49° 10,9'	H =	13° 27,7'
		φ et D de même nom, b > 0		φ et D de noms contraires, b < 0	

Les quantités $\log(1 \pm x)$ ont été ici obtenues directement en fonction de $\log x$ dans une table de type Friocourt. On utilise le logarithme d'addition lorsque les deux termes sont positifs, le logarithme de soustraction dès lors que les deux termes sont de signes contraires (latitude et déclinaison de noms contraires ou angle au pôle supérieur à 90°). En suivant un tel procédé, on n'utilise plus la table des logarithmes des nombres ainsi que celle des valeurs naturelles des rapports trigonométriques.

On peut également choisir de former le rapport n = a/b, toujours avec a > b. Dans ce cas, on utilise les relations suivantes :

$$\log(a + b) = \log a.\left(\frac{n + 1}{n}\right) = \log a + \log\left(\frac{n + 1}{n}\right)$$

$$\log(a-b) = \log a.\left(\frac{n-1}{n}\right) = \log a + \log\left(\frac{n-1}{n}\right) = \log a - \log\left(\frac{n}{n-1}\right)$$

Les tables, comme celles conçues par Leonelli et Berkeley, donnent alors les logarithmes de (n + 1)/n et n/(n – 1) en fonction du logarithme de n.

Formulation de C. Carić et exemple de calcul :

La formule utilisée, identique à celle de Hugon, est la suivante :

$$\left(\sin\frac{\xi}{2}\right)^2 = \left(\sin\frac{P}{2}\right)^2.\left(\cos\frac{\varphi+D}{2}\right)^2 + \left(\cos\frac{P}{2}\right)^2.\left(\sin\frac{\varphi-D}{2}\right)^2$$

soit :

$$\text{hav}(\xi) = \text{hav}(P).\text{cohav}(\varphi+D) + \text{cohav}(P).\text{hav}(\varphi-D) = A + B$$

On calcule donc, par logarithmes des rapports trigonométriques, les deux produits, obtenant ainsi $\log A$ et $\log B$; on utilise ensuite une table des logarithmes d'addition puis on détermine la distance zénithale ξ avec la table des logarithmes des haversines.

Exemple :

Angle au pôle estimé	Déclinaison	Latitude estimée
P_e = 67° 32,0' E	D = 12° 20,0' N	φ_e = 25° 13,0' S

D – φ_e =	- 37° 33,0'	loghav =	9,0153	D + φ_e =	12° 53,0'	logcohav =	9,9945
P_e =	67° 32,0'	logcohav =	9,8395			loghav =	9,4899
		logB =	8,8548			logA =	9,4844
		logA =	9,4844			- logB =	- 8,8548
		log(n + 1)/n =	0,0915	← table log	addition←	logn =	0,6296
		loghav =	9,5759	→	ξ_e =	**75° 43'**	

La hauteur est donc H_e = 14° 17'.

Formulation proposée par Waller :

Elle est obtenue à partir de la formule fondamentale par inversion des deux membres de l'expression :

$$\csc H = \frac{\csc\varphi\,.\csc D}{1+\dfrac{\csc\varphi\,.\csc D}{\sec\varphi\,.\sec D\,.\sec P}}$$

Le projet de tables de Waller comprenait des tables des logarithmes des sécantes et cosécantes ainsi qu'une table des logarithmes gaussiens pour traiter l'expression de la forme 1 ± x qui apparait au dénominateur de la fraction.

ANNEXE 7-7

TABLE DIGILOG

La table digilog est constituée d'un tableau donnant les valeurs naturelles des sinus et cosinus, exprimées avec quatre décimales, d'un angle compris entre 0° et 90° avec un intervalle d'argumentation de 1°. Il y est joint un tableau de parties proportionnelles pour effectuer les interpolations lorsqu'elles sont nécessaires. L'ensemble n'appelant pas de remarques particulières, les tableaux ne seront pas reproduits. On donne simplement ci-dessous un exemple montrant la succession d'opérations à poser pour arriver aux résultats.

Les données de calcul étant P = 68°, φ = 25° S, D = 12° 20,2' N, calculer la hauteur et l'azimut de l'astre.

Valeurs naturelles relevées dans la table :

P =	68°			cos P =	0,3746
φ =	25°	sin φ =	0,4226	cos φ =	0,9063
D =	12° 20,2'	sin D =	0,2137	cos D =	0,9769

Opérations :

				0,	4	2	2	6
			*	0,	2	1	3	7
				2	9	5	8	2
			1	2	6	7	8	
			4	2	2	6		
		8	4	5	2			
0,	0	9	0	3	0	9	6	2

				0,	3	7	4	6
			*	0,	9	0	6	3
				1	1	2	3	8
			2	2	4	7	6	
		0	0	0	0	0		
	3	3	7	1	4			
0,	3	3	9	4	9	9	9	8

				0,	3	3	9	5
			*	0,	9	7	6	9
				3	0	5	5	5
			2	0	3	7	0	
		2	3	7	6	5		
	3	0	5	5	5			
0,	3	3	1	6	5	7	5	5

On effectue ensuite la somme algébrique a + b = - 0,0903 + 0,3317 = 0,2414 et on recherche l'angle correspondant, dans la colonne relative aux sinus, soit, après interpolation H = 13° 58'.

Remarques : a est négatif car latitude et déclinaison sont de noms contraires ; les produits sont à arrondir à quatre chiffres significatifs ; il convient d'effectuer l'arrondi correct sur le quatrième chiffre retenu : ainsi le premier produit de cosinus s'écrira 0,3395 (et non 0,3394) et b s'écrira 0,3317 (et non 0,3316).

Concernant le calcul d'azimut par l'analogie des sinus, on relève :

sin P =	0,927	cos D =	0,977	cos H =	0,970

			0,	9	2	7
		*	0,	9	7	7
			6	4	8	9
		6	4	8	9	
	8	3	4	3		
0,	9	0	5	6	7	9

0,	9	0	5	6	7	9	0, 970
		3	2	6	7		0,933
			3	5	7	9	
				6	6	9	

Pour 0,933 dans la colonne des sinus, la table donne 69°, soit un azimut au N69° E ou W.

ANNEXE 8-1

ESSAI d'INVENTAIRE et CARACTÉRISTIQUES PRINCIPALES des TABLES de TYPE SOUILLAGOUËT-OGURA

Principe général du calcul de la hauteur par les tables Souillagouët-Ogura :

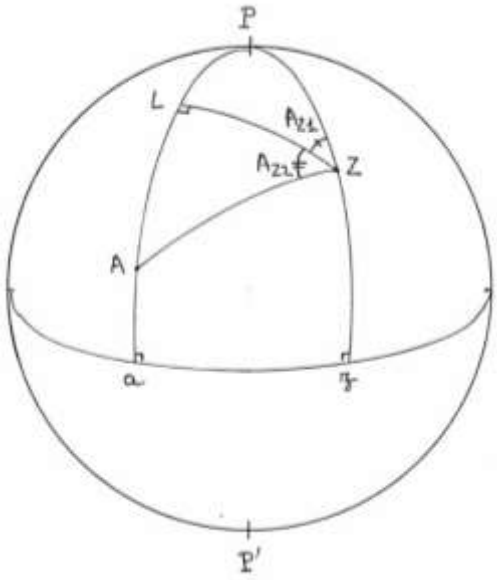


Fig : A8-1

Le triangle de position de l'astre PZA, construit à partir du pôle élevé, est décomposé en deux triangles rectangles selon la hauteur issue du zénith ZL (figure A8-1). Dans le triangle rectangle PZL (time triangle), on calcule les côtés LP = β et ZL = b par les formules :

$$\tan\beta = \cot\varphi \,.\, \cos P \quad \text{et} \quad \cos b = \frac{\sin\varphi}{\cos\beta}$$

Puis, dans le triangle AZL (altitude triangle), on calcule directement la hauteur après avoir évalué l'arc AL = 90° – (β + D), D étant la déclinaison de l'astre qui sera notée avec les conventions usuelles de signe ; β sera compté négativement si l'angle au pôle est supérieur à 90°. On utilise également, à la place de β, son complément, latitude du point L, souvent notée K ; on écrira alors AL = K ~ D qui représente la valeur absolue de la différence algébrique K – D, K étant toujours positif. On considèrera le supplément de cette différence si l'angle au pôle est supérieur à 90°. On obtient pour le calcul de hauteur :

$$\sin H = \sin(\beta + D) \,.\, \cos b = \sin(\beta + D) \,.\, \frac{\sin\varphi}{\cos\beta} = \cos(K{\sim}D) \,.\, \frac{\sin\varphi}{\sin K}$$

Sous forme logarithmique, les relations retenues en général sont :

$$\log\sin H = \log\sin(\beta + D) + \log\frac{\sin\varphi}{\cos\beta} \quad \text{et} \quad \log\csc H = \log\sec(K{\sim}D) + \log(\csc\varphi \,.\, \sin K)$$

L'azimut peut être calculé de diverses façons : recours à une table ou à un abaque spécifique, calcul des angles A_{z1} et A_{z2}, ou encore calcul logarithmique par l'analogie des sinus ; d'autres procédés ont aussi été mis au point. Dans le cas du calcul des angles A_{z1} et A_{z2}, les formules souvent retenues sont :

$$\cos A_{z1} = \sin P \,.\, \sin K \quad \text{et} \quad \tan A_{z2} = \tan(K{\sim}D) \,.\, \csc b$$

L'azimut de l'astre résulte de la somme ou de la différence des deux angles calculés (voir annexe 1-1).

Dans le tableau ci-après, on nomme « table principale » celle qui donne au minimum l'arc β ou son complément K et le logarithme du cosinus ou de la sécante de l'arc b. La « table secondaire » est celle des logarithmes des rapports trigonométriques utilisés pour terminer le calcul de la hauteur et, éventuellement, celui de l'azimut.

Argumentation de la table principale : les arguments d'entrée sont la latitude et l'angle horaire (ou l'angle au pôle) ; la latitude est argumentée au moins jusqu'à 60° avec un intervalle de 1° sauf pour les tables de Souillagouët et de Pinto pour lesquelles cet intervalle est ramené à 15' (ou 30' chez Souillagouët lorsque 3h < P < 9h). L'angle horaire est argumenté en général de 0° à 180° (0h à 12h) avec un intervalle de 1° (ou 4 minutes), sauf pour les tables de Souillagouët et de Pinto où cet intervalle est ramené à 1 minute (ou 2 minutes chez Souillagouët si 3h < P < 9h).

Argumentation de la table secondaire : de 0° à 90° ou 180° avec un intervalle de 1' sauf pour les Hughes' Tables et le Manual of Celestial of Navigation d'Ageton où il est de 0,5' ainsi que pour les Kortbesteck Tafel où il est de 0,5' si l'argument est inférieur à 20° puis de 1', de 20° à 90°.

Tableau inventaire :

Intitulé	Table principale Eléments calculés	Table secondaire Eléments calculés	Calcul de hauteur	Calcul d'azimut
Table du point auxiliaire F. Souillagouët 1891	β (5'' près) $X = \log(\sin\varphi / \cos\beta)$, 5 décimales	Recours nécessaire à une table annexe des logarithmes des rapports trigonométriques	$\log\sin H = X + \log\sin(\beta + D)$	Table III (voir chapitre 2)
New Altitude and Azimuth Table. S. Ogura 1920	K (1' près) $A = \log(\csc\varphi . \sin K)$, 5 décimales	Log sécante et cosécante de l'argument 5 décimales	$\log\csc H = A + \log\sec(K\sim D)$	Tables ABC incluses dans le document
Position Line Table W. M. Smart & F. N. Shearme 1922	U = β (0,1' près) $V = \log(\sin\varphi / \cos U)$, 5 décimales	Recours nécessaire à une table annexe des logarithmes des rapports trigonométriques.	$\log\sin H = V + \log\sin(U + D)$	Table annexe
Line of Position Book P. V. H. Weems 1927	K (0,1' près) $A = \log(\csc\varphi . \sin K)$, 5 décimales	Log sécante et cosécante de l'argument 5 décimales	$\log\csc H = A + \log\sec(K\sim D)$	Diagramme de Rust inclus dans le document ou calcul logarithmique de l'analogie des sinus exprimée avec les sécantes et cosécantes
Navigation Tables for Mariners and Aviators J. Y. Dreisonstok 1928	β (0,1' près) $A = \log\sec b$, 5 décimales $C = \log\csc b$, 3 décimales A_{z1} (0,1° près)	Log cosécante (5 décimales) et log tan et cot (3 décimales) de l'argument	$\log\csc H = A + \log\csc(\beta + D)$	$\log\tan A_{z2} = C + \log\cot(\beta + D)$ $A_z = \pm A_{z1} \pm A_{z2}$
Aerial and Marine Navigation Tables J. E. Gingrich 1931	K (0,1' près) $A = \log(\csc\varphi . \sin K)$, 5 décimales $X = -\cot P . \tan\varphi$, $Y = \tan D . \csc P$ 2 décimales	Log sécante et cosécante de l'argument 5 décimales	$\log\csc H = A + \log\sec(K\sim D)$	Table d'azimut incluse résolvant : $\frac{\cot A_z}{\cos\varphi} = X + Y$
The Simplex Navigation and Avigation Tables J. C. Pinto 1933	K (0,1' près) $A = \log(\csc\varphi . \sin K)$, 5 décimales	Log sécante et cosécante de l'argument 5 décimales	$\log\csc H = A + \log\sec(K\sim D)$	Tables ABC incluses dans le document
F Tafel Deutsch Seewarte 1937	U = β (0,1' près) $V = \log(\sin\varphi / \cos U)$, 5 décimales Éléments particuliers du calcul d'azimut	Log sinus de l'argument 5 décimales	$\log\sin H = V + \log\sin(U + D)$	Méthode particulière ; voir annexe 8-5

Hughes' Tables for Sea and Air Navigation L. J. Comrie 1938	K (0,1' près) $A = \log \sec b$, 5 décimales $C = \log \csc b$, 3 décimales A_{z1} (0,1° près)	Log sécante et cosécante de l'argument 5 décimales	$\log \csc H = A + \log \sec(K \sim D)$	Table III donnant les logtan. $\log \tan A_{z2} = C + \log \tan(K \sim D)$ $A_z = \pm A_{z1} \pm A_{z2}$
Rapid Navigation Tables W. Myerscough & W. Hamilton 1939	Table unique comportant une page par valeur entière, en degrés, d'un argument principal. La table donne l'arc β, $\log \sec b$, $\log \csc$(argument) avec le niveau de précision usuel ainsi que les éléments de calcul de l'azimut par le procédé ABC. $\log \csc H = A + \log \csc(\beta + D)$			
Manual of Celestial navigation A. A. Ageton 1942	K (0,1' près) $A = \log(\csc \varphi \,.\, \sin K)$, 5 décimales A_{z1} (0,1° près)	Log sécante et cosécante de l'argument 5 décimales	$\log \csc H = A + \log \sec(K \sim D)$	Calcul par log de : $\csc A_{z2} = \frac{\csc(K \sim D)}{\sec H}$ $A_z = \pm A_{z1} \pm A_{z2}$
Astro-Navigation Tables for the Common Tangent Method E. E. Benest & E. M. Timberlake 1945	K (0,1' près) $A = \log(\csc \varphi \,.\, \sin K)$, 6 à 7 décimales	Log sécante de l'argument 6 à 7 décimales	$\log \csc H = A + \log \sec(K \sim D)$ H extraite à partir d'une table particulière des log csc.	Evaluation de l'azimut inutile dans la méthode de la tangente commune
Tavole H Istituto Idrografico della Marina 1947	K (0,1' près) $A = \log(\csc \varphi \,.\, \sin K)$, à 6 décimales pour P = 0°(1°)20° et 160°(1°)180°, 5 décimales pour le reste de l'intervalle.	Log sécante de l'argument 5 à 6 décimales	$\log \csc H = A + \log \sec(K \sim D)$	Calcul logarithmique de l'analogie des sinus exprimée avec les sécantes et cosécantes
Kortbestek Tafel J. C. Lieuwen 1949	K (0,1' près) $A = \log(\csc \varphi \,.\, \sin K)$, 5 décimales A_{z1} (0,1° près)	Log sécante et cosécante de l'argument 5 décimales	$\log \csc H = A + \log \sec(K \sim D)$ H extraite à partir d'une table particulière des log csc à 5 décimales ; 0°(0,5')88°.	Table à double argument résolvant : $\tan A_{z2} = \tan(K \sim D) \,.\, \csc b$ $A_z = \pm A_{z1} \pm A_{z2}$
Record Tables J. C. Lieuwen 1953	Table unique comportant une page par valeur entière, en degrés, d'un argument principal. La table donne directement l'arc K, $A = \log \sec b$, l'angle A_{z1}, les $\log \sec$(argument) et $\log \csc$(argument), l'angle A_{z2}. $\log \csc H = A + \log \sec(K \sim D)$			

ANNEXE 8-2

LINE of POSITION BOOK, P. V. H. WEEMS

Le Line of Position Book se présente sous la forme d'un carnet à couverture cartonnée de 44 pages aux coins arrondis. Le document comprend :

- une instruction d'emploi, concise, avec de nombreux exemples,
- une table de conversion heures-minutes-secondes en degré-minutes-dixièmes et réciproquement,
- des tables de correction des hauteurs (Soleil, Lune, étoiles et planètes),
- des éléments spécifiques à l'usage du sextant à bulle et des tables propres à la navigation aérienne,
- une table repérée A (table principale),
- une table repérée B (table secondaire),
- un diagramme de Rust en deux parties.

Table A :

Cette table couvre 18 pages et donne les quantités K et $A = 10^5 . \log(\csc \varphi . \sin K)$ en fonction de l'angle au pôle P (noté Hour Angle) et de la latitude φ (notée Lat). L'angle au pôle est l'argument horizontal ; il est exprimé de 0° à 90° (entrée supérieure) puis de 90° à 180° (entrée inférieure) ; la latitude est l'argument vertical, indiquée en colonne d'extrême gauche ; elle est exprimée de 0° à 65°. Les arguments sont exprimés en degrés entiers, avec un intervalle d'argumentation de 1°.

Table B :

C'est une simple table des logarithmes des sécantes et cosécantes d'un argument X ; elle donne la quantité $10^5 . \log(\sec X)$ ou $10^5 . \log(\csc X)$. Cette table couvre 9 pages ; l'entrée supérieure, notée K~D, est exprimée de 0° à 90° avec un intervalle d'argumentation de 1' (les minutes figurent à gauche). L'entrée inférieure, complémentaire, permet, en lecture inverse, la détermination de la hauteur ou, en lecture directe, la détermination du logarithme d'une cosécante ; les minutes de l'argument figurent alors à droite.

Mode opératoire et exemples :

Le mode opératoire se décline comme suit :

1) Calcul de l'angle au pôle estimé P_e puis détermination des coordonnées du point auxiliaire dont la latitude φ_a est le nombre entier de degré le plus proche de la latitude estimé φ_e et la longitude G_a est telle que l'angle au pôle auxiliaire P_a soit le nombre entier de degré le plus proche de l'angle au pôle estimé P_e.
2) Lecture de A et K dans la table A.
3) Evaluation de X = K~D (voir ci-dessous).
4) Sachant que $10^5 . \log \csc H = A + 10^5 . \log \sec X = A + B$, recherche de B en fonction de X dans la table B (lecture directe) puis, après avoir effectué la somme A + B, de la hauteur, en lecture inverse, en utilisant l'échelle inférieure de la table B.

Calcul de X = K~D :

- si P < 90°, K < 90° et on lit directement K dans la table A ;

- si P > 90°, K > 90° ; la lecture directe de la table donne alors K' = 180° - K ; il conviendra de calculer K, en prenant le supplément de K'.

Weems propose ensuite la procédure suivante concernant K~D :

- donner à K le nom de la latitude,
- si K et D sont de noms contraires, faire la somme de K et de D,
- si K et D sont de mêmes noms, prendre la différence entre K et D et en retenir la valeur absolue.

Exemple :

Estime		Coordonnées horaires		Observation	
φ_e	44° 24' N	AHvp	92° 32'	H_v	28° 31'
G_e	32° 20' W	D	9° 48' N		Soleil
Angle au pôle P_e = $AHag_e$ = 60° 12' W					

Point auxiliaire : φ_a = 44° N, P_a = 60° W d'où G_a = 32° 32' W.

L'extrait de table A est le suivant :

H.A.	**59° (3h 56m)**		**60° (4h 00m)**		**61° (4h 04m)**	
Lat	**A**	**K**	**A**	**K**	**A**	**K**
0°	28816	0 00.0	30103	0 00.0	31443	0 00.0
…	…	…	…	…	…	…
44°	10388	61 55.6	10666	62 37.6	10942	63 20.5
…	…	…	…	…	…	…
65°	3054	76 29.7	3123	76 52.5	3190	77 15.7
Lat	**A**	**180° - K**	**A**	**180° - K**	**A**	**180° - K**
H.A.	**121° (8h 04m)**		**120° (8h 00m)**		**119° (7h 56m)**	

L'extrait de table B est le suivant :

K~D	**…**	**52°**	**…**	**61°**	**…**	**min alt**
00'	…	21066	…	31443	…	**60'**
…	…	…	…	…	…	**…**
47'	…	21837	…	32532	…	**13'**
48'	…	21853	…	32555	…	**12'**
49'	…	21870	…	32579	…	**11'**
50'	…	21887	…	32602	…	**10'**
…	…	…	…	…	…	**…**
60'	…	22054	…	32839	…	**00'**
	…	**37°**	**…**	**28°**	**…**	**min alt**

Le détail du calcul figure ci-dessous :

K =	62° 37,6'	A =	10666
- D =	9° 48,0'		
X =	52° 49,6'	+ B =	21887
		log csc H =	32553
		H_c =	28° 12'

Le calcul a été effectué sans interpoler dans la table B ; si l'on désire être plus précis, les interpolations linéaires donnent : B = 21880, d'où log(csc H) = 32546 et H_c = 28° 12,4', valeur également donnée par l'exécution de la formule fondamentale à l'aide d'une calculatrice.

Calcul de l'azimut :

P. V. H. Weems propose, dans le « Line of Position Book », deux méthodes :

- à l'aide du diagramme de Rust (voir chapitre 14),
- par le calcul en utilisant la formule donnant l'azimut par l'heure et la hauteur et la table B, soit :

$$\sin A_z = \frac{\sin P \,.\, \cos D}{\cos H}$$

soit encore, en utilisant exclusivement les fonctions sécantes et cosécantes :

$$\csc A_z = \frac{\csc P \,.\, \sec D}{\sec H}$$

La formule est logarithmique et peut s'écrire comme suit :

$$\log \csc A_z = \log \csc P + \log \sec D - \log \sec H$$

La table B permet d'en effectuer le calcul sans difficulté.

Il reste à fixer le quadrant dans lequel se trouve l'astre observé ; suite au calcul effectué avec la table B, l'angle trouvé sera nécessairement compris entre 0° et 90° et il conviendra de le convertir en un azimut Z compris entre 0° et 360°. La règle de détermination est la suivante :

- la valeur de l'angle horaire local fixe la détermination E ou W de l'azimut ;
- Z est N ou S selon les dispositions du tableau ci-dessous :

<table>
<tr><th colspan="3">Cas de figure</th><th>Nom de Z</th></tr>
<tr><td colspan="3">Latitude φ et déclinaison D de noms contraires</td><td>nom de D</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Latitude φ et déclinaison D de mêmes noms</td><td colspan="2">D > φ</td><td>nom de D</td></tr>
<tr><td rowspan="2">D < φ</td><td>P > P_1</td><td>nom de D</td></tr>
<tr><td>P < P_1</td><td>nom contraire à D</td></tr>
</table>

P_1 est l'angle au pôle de l'astre à l'instant de son passage au premier vertical ; rappelons qu'à cet instant l'azimut de l'astre est E (090°) ou W (270°). La détermination N ou S de l'azimut s'effectue en comparant l'angle au pôle P de l'astre à l'instant considéré à P_1. Cet angle se calcule à l'aide de la formule :

$$\cos P_1 = \frac{\tan D}{\tan \varphi}$$

La connaissance de la latitude et de la déclinaison de l'astre permet l'évaluation à vue de P_1 à l'aide d'un diagramme figurant dans le Line of Position Book.

Remarque : dans la pratique, la détermination du quadrant est immédiate en relevant approximativement l'astre, cependant, le lever d'une éventuelle ambigüité de quadrant peut être nécessaire lorsque l'on traite une observation prise dans le voisinage du premier vertical.

Exemple :

On obtient, avec les éléments de calcul de l'exemple précédent :

logcsc P_a =	6247	P_a est W donc Z est **W**
+ logsec D =	+ 638	D et φ sont de mêmes noms et D < φ
somme =	6885	
- logsec H_c =	- 5487	
logcsc A_z =	1398	$P_1 \approx 79,7°$, $P_a < P_1$ donc Z est de nom contraire à D soit **S**
A_z =	**75,5°**	**Z = S 75,5°W = 255,5°**

Le Line of Position Book de P. V. H. Weems sera réédité de multiples fois. Dès la seconde édition (1928), la latitude sera argumentée jusqu'à 90°. A partir de l'édition de 1943, latitude et angle horaires seront permutés en table A de façon à pouvoir traiter sur la même page une série d'observations crépusculaires.

ANNEXE 8-3

NAVIGATION TABLES for MARINERS and AVIATORS, HO208, J. Y. DREISONSTOK

La symbolisation utilisée est définie à l'annexe 8-1.

Les tables HO 208 se présentent sous la forme d'un livret relié, d'une centaine de pages, comportant les tables spécifiques I (table principale) et II (table secondaire), une notice explicative ainsi que les tables usuelles de navigation à l'usage des marins et des aviateurs. Des onglets en facilitent le feuilletage.

Table I :

Cette table couvre 44 pages et donne les quantités β, $A = 10^5.\log(\sec b)$, $C = 10^3.\log \csc b$, A_{z1}, en fonction de l'angle au pôle P et de la latitude φ. L'angle au pôle est l'argument horizontal ; il est exprimé de 0° à 90° et 270° à 360°(entrée supérieure) puis de 90° à 270° (entrée inférieure) ; la latitude est l'argument vertical, portée en colonne d'extrême gauche de 0° à 65°. Les arguments sont exprimés en degrés entiers, avec un intervalle d'argumentation de 1°. L'argumentation en latitude sera étendue jusqu'à 90° dès la seconde édition en 1929.

Table II :

C'est une simple table des logarithmes des rapports trigonométriques d'un argument X = β + D (voir règles de signes ci-après) ; elle donne sur 18 pages les quantités $B = 10^5.\log(\csc X)$ et $E = 10^3.\log(\cot X)$; l'argument d'entrée est exprimée de 0° à 180° avec un intervalle d'argumentation de 1'. Cette table permet ensuite de déterminer, en lecture inverse la hauteur et l'azimut de l'astre.

Mode opératoire et règles de noms (ou de signes) :

Le mode opératoire se décline comme suit :

5) Calcul de l'angle au pôle estimé P_e puis détermination des coordonnées du point auxiliaire dont la latitude φ_a est le nombre entier de degré le plus proche de la latitude estimé φ_e et la longitude G_a est telle que l'angle au pôle auxiliaire P_a soit le nombre entier de degré le plus proche de l'angle au pôle estimé P_e.
6) Lecture de β, A, C et A_{z1} dans la table I.
7) Evaluation de X = β + D (voir ci-dessous).
8) Sachant que $10^5.\log \csc H = A + 10^5.\log \csc X = A + B$, recherche de B en fonction de X dans la table II (lecture directe) puis, après avoir effectué la somme A + B, de la hauteur, en lecture inverse.
9) Sachant ensuite que $10^3.\log(\tan A_{z2}) = C + 10^3.\log(\cot(\beta + D)) = C + E$, recherche de E en fonction de X dans cette même table II en lecture directe puis, après avoir effectué la somme C + E, recherche de A_{z2} en lecture inverse ; l'azimut cherché se déduit enfin d'une combinaison entre A_{z1} et A_{z2} (voir ci-dessous).

J. Y. Dreisonstok a choisi d'utiliser le nom (N ou S) des variables et, dans les opérations algébriques entre deux variables, de considérer qu'elles sont de même signe si elles sont de même nom et de signes contraires si elles sont de noms contraires. Donc, dans le cas de la somme algébrique β + D :

- on effectuera une somme si ces deux variables sont de même nom ; la somme gardera alors le nom commun aux deux variables ;
- on effectuera une différence si ces deux variables sont de noms contraires en donnant au résultat le nom de la variable dont la valeur absolue est la plus grande.

Par convention, β est du nom de la latitude si l'angle au pôle est inférieur à 90° et le nom contraire si celui-ci est supérieur à 90°.

L'azimut Z est toujours compté à partir du pôle élevé, de 0° à 180° vers l'E ou vers l'W suivant la valeur de l'angle horaire local. Cet azimut résulte de la somme algébrique des deux composantes A_{z1} et A_{z2} affectés de leurs noms respectifs suivant le cas de figure.

L'ensemble des règles de nom, déduites de l'analyse des différents cas de figure, est résumé sur le tableau ci-dessous :

Cas	**P**	**φ et D**	**β**	**Nom de β**	**A_{z1}**	**A_{z2}**
1	< 90°	même nom	β > 90° - D	nom de φ	Nom de β	nom contraire à β + D
2	< 90°	même nom	β < 90° - D	nom de φ		nom de β + D
3	< 90°	noms contraires	β < 90° - D	nom de φ		
4	> 90°	même nom		nom contraire à φ		

Remarque : ces règles, déduites des instructions d'emploi de la table HO208, sont passablement compliquées. Elles ont été clarifiées et simplifiées par John S. Letcher dans son ouvrage « Self Contained Celestial navigation with HO208 » (voir bibliographie).

Exemple :

Les données d'observation sont les suivantes :

Estime		Coordonnées horaires		Observation	
φ_e	24° 51' N	AHap	189° 31,7'	H_v	49° 58,5'
G_e	146° 29' W	D	45° 04,8' N		Deneb
$AHag_e$ = 43° 02,7' ; P_e = 43° 02,7' W					

Point auxiliaire: φ_a = 25° N, P_a = 43° W soit G_a = 146° 31,7' W.

Le calcul se dispose comme ci-dessous :

P_a =	43° W	D =	45° 04,8' N						
φ_a =	25° N	β =	57° 28,7' N	A =	10453	C =	209	A_{z1} =	N 68,5°
		D+β =	102° 33,5' N	B =	1052	E =	9348	A_{z2} =	S 19,8°
				A+B =	11505	C+E =	9557	Z =	N 48,7° W
		H_v =	49° 58,5'						
		H_c =	50° 06,7'					**Z =**	**311,3°**
		Int =	**- 8,2'**						

Extrait de la table I :

P →	**317°**	**43°**		
φ ↓	β	A	C	A_{z1}
0°	90° 00.0’	13587	166	90 .0°
…	…	…	…	…
24°	58° 40.1’	10669	205	69.2°
25°	57° 28.7’	10453	209	68.5°
26°	56° 18.1’	10231	212	67.8°
…	…	…	…	…
65°	18° 49.9’	1883	540	49.8°
P →	**223°**	**137°**		

La table 1 ne présente aucune difficulté de lecture ; il n’y a pas d’interpolation à considérer du fait de l’utilisation d’un point auxiliaire.

Extraits de la table II :

1re entrée en fonction de β + D = 102° 33,5’ :

Minutes ↓		**77°**			Dixièmes ° ↓	Minutes ↓
		H_c 77°	A_{z2} 12°			
	…	3 B	E	…		
00	…	1128	9363	…	1.0	60
…	…	…	…	…	…	…
26	…	1053	9348	…	.6	34
27	…	1050	9348	…	.6	33
…	…	…	…	…	…	
60	…	0960	9327	…	.0	00
		102°				

La lecture de B et de E se fait directement dans la colonne 102° et entre les lignes 33’ et 34’ (colonne de droite) ; l’interpolation se fait à vue (ou est éventuellement négligée).

La procédure de calcul nécessite ensuite deux lectures de la table II :

- une première pour extraire H_c en entrant avec A + B = 11505 dans la colonne repérée H_c ;
- la seconde pour extraire A_{z2}, en entrant avec C + E = 9557 dans la colonne repérée A_{z2}.

L’interpolation sera faite à vue, pour H_c en utilisant la différence tabulaire figurant en tête de colonne, à côté du symbole B.

A_{z2} se lit directement, sans chercher à interpoler.

L’exécution de la formule fondamentale à l’aide d’une calculatrice scientifique donne, à partir des coordonnées du point auxiliaire : H_c = 50° 06,7’ et Z = 311,3°.

Minutes ↓	**50°**		**…**	**70°**		Dixièmes ° ↓	Minutes ↓
	H_c 50°	A_{z2} 39°	…	H_c 70°	A_{z2} 19°		
	11 B	E	…	4 B	E		
00	11575	9924	…	2701	9561	1.0	60
…	…	…	…	…	…	…	…
06	11511	9922	…	2674	9559	.9	54
07	11501	9922	…	2669	9558	.9	53
08	11490	9922	…	2665	9558	.9	52
09	11479	9922	…	2660	9558	.9	51
10	11469	9921	…	2656	9557	.8	50
11	11458	9921	…	2651	9557	.8	49
12	11448	9921	…	2647	9556	.8	48
…	…	…	…	…	…	…	…
60	10950	9908	…	2433	9537	.0	00
	129°			**109°**			

ANNEXE 8-4

AERIAL & MARINE NAVIGATION TABLES, J. E. GINGRICH

La symbolisation utilisée est définie à l'annexe 8-1.

Calcul de la hauteur :

La formulation, la tabulation et la procédure de calcul utilisées sont rigoureusement identiques à celles employées par P. V. H. Weems dans son Line of Position Book dont on rappelle brièvement le mode opératoire qui se déroule à partir de la détermination du point auxiliaire, aussi proche que possible du point estimé, dont la latitude est un nombre entier et dont la longitude est telle que l'angle au pôle soit aussi un nombre entier. On recherche tout d'abord, en fonction de l'angle au pôle et de la latitude auxiliaires, un logarithme A et un arc K en table principale référencée A. On associe ensuite K à la déclinaison D de l'astre par une addition algébrique (K~D). A l'aide de la table secondaire référencée B, on recherche le logarithme de la sécante de (K~D) que l'on additionne à A puis, toujours dans cette table B, une recherche inverse permet d'extraire la hauteur calculée H_c.

Calcul de l'azimut :

La caractéristique essentielle du recueil de tables de Gingrich réside dans l'intégration d'éléments du calcul de l'azimut par l'heure dans la table A. En effet, partant de :

$$\cot A_z = \frac{\tan D \,.\, \cos\varphi - \cos P \,.\, \sin\varphi}{\sin P}$$

puis, en divisant les deux membres par $\cos\varphi$ ($\varphi \neq 90°$), la relation devient :

$$\frac{\cot A_z}{\cos\varphi} = \frac{\tan D}{\sin P} - \cot P \,.\, \tan\varphi$$

et posant ensuite :

$$Y = \frac{\tan D}{\sin P} \quad \text{et} \quad X = -\cot P \,.\, \tan\varphi$$

on arrive à :

$$\frac{\cot A_z}{\cos\varphi} = X + Y$$

X et Y[77] sont deux fonctions de l'angle au pôle P et, respectivement, de la latitude φ, et de la déclinaison D, et sont données directement par la table A, en fonction de P et de φ pour X que l'on relèvera simultanément à A et K ; Y devra faire l'objet d'une lecture séparée en table A en fonction de P et de D (nécessairement limitée, comme φ, à 65°).

La table dite d'azimut[78] figurant en dernière partie de l'ouvrage de Gingrich donne ensuite A_z en fonction de la somme algébrique X + Y et de la latitude φ. La latitude φ figure en argument vertical avec un intervalle de 1° ; X + Y figure en argument horizontal avec un intervalle variable. L'interpolation se fait à vue si nécessaire.

Les règles de signe à appliquer sont celles données, entre autres, par Perrin, à savoir :

[77] Leurs expressions ont aussi été établies lors de l'étude des tables ABC et de E. Perrin.
[78] Table équivalente à la table III de Perrin ou C des tables ABC.

- une latitude (ou une déclinaison) N est positive, S est négative,
- Y est du signe (ou du nom) de D,
- X est de signe (nom) contraire à φ si P < 90°, du signe (nom) de φ si P > 90°,
- l'angle A_z est compté à partir du N si X + Y > 0, du S si X + Y < 0.

Ces règles sont rappelées à chaque page des tables A et d'azimuts.

Exemple :

Estime		Coordonnées horaires		Observation	
φ_e	38° 10' N	AHvp	001° 41,1'	H_v	23° 37,0'
G_e	50° 39' W	D	10° 05,1' S		Soleil
$AHvg_e$ = 311° 02,1'					

Point auxiliaire : φ_a = 38° N, P_a = 49° E d'où G_a = 50° 41,1' W.

Le calcul se décline ensuite comme suit :

K =	49° 58,8'	A =	9478	X =	0,679 S
D =	10° 05,1'	B =	30189	Y =	0,234 S
K ~ D =	60° 03,9'	A+B =	39667	X+Y =	0,913 S
H_v =	23° 37,0'			Z =	S54,3°E
- H_c =	- 23° 39,1'				
Int =	**-2,1'**			**Z =**	**125,7°**

Extraits des tables :

Table A :

Lat / **Dec**	…	**HA = 49°**				…
	…	A	K	X	Y	…
0°	…	18306	00° 00.0'	.000	.000	…
…		…	…	…	…	
10°		17456	15° 02.6'	.153	.234	
11°		17284	16° 30.2'	.169	.258	
…		…	…	…	…	
38°		9478	49° 58.8'	.679	1.035	
…		…	…	…	…	
65°		2330	72° 59.4'	1.864	2.842	
Lat / **Dec**	…	A	180° - K	X	Y	…
	…	**HA = 131°**				…

Table B :

K ~ D								Alt Min.
K ~ D Min.	**…**	**59°**	**60°**	**61°**	**…**	**66°**	**…**	
0		28816	30103	31443		39069		60
…		…	…	…		…		…
3		28879	30169	31511		39154		57
4		28900	30191	31534		38182		56
…	…	…	…	…	…	…	…	…
20		29239	30544	31902		39641		40
21		29261	30566	31925		39669		39
…		…	…	…		…		…
60		30103	31443	32839		40812		0
K ~ D Min.	**…**	**30°**	**29°**	**28°**	**…**	**23°**	**…**	Alt Min.
	Calculated altitude H_c							

Table d'azimut :

	X + Y					
Lat	**…**	**0.900**	**0.910**	**0.920**	**0.930**	**…**
0°		48.0°	47.7°	47.4°	47.1°	
…		…	…	…	…	
37°		54.3°	54.0°	53.7°	53.4°	
38°	…	54.7°	54.4°	54.1°	53.8°	…
39°		55.0°	54.7°	54.4°	54.1°	
…		…	…	…	…	
65°		69.2°	69.0°	68.8°	68.5°	

Le calcul exact donne, à partir du point auxiliaire : H_c = 23° 39,1', Z = 125,8°.

ANNEXE 8-5

F-TAFEL, CALCUL de l'AZIMUT

La symbolisation utilisée est définie à l'annexe 8-1.

Principe du calcul et de la détermination de l'azimut utilisé dans la table F :

On emploi ici la formule du calcul de l'azimut par l'heure et la hauteur ; on applique donc l'analogie des sinus dans le triangle de position de l'astre et on introduit un arc auxiliaire noté γ, ce qui donne :

$$\sin A_z . \cos H = \sin P . \cos D = \cos \gamma$$

Dans cette expression, qui sera calculée en valeur absolue, A_z désigne l'azimut de l'astre par quadrant de 0° à 90°, à partir du N ou du S, vers l'E ou vers l'W. L'idée retenue par les auteurs de la table F consiste à utiliser une table à deux arguments, P et D, pour évaluer γ, puis, la formule étant identique, à recourir à cette même table pour évaluer l'angle A_z, les éléments connus étant alors γ et H. Il reste ensuite à déterminer l'azimut de l'astre, dans le bon quadrant.

La détermination E ou W est donnée par la valeur de l'angle horaire local :

- A_z est E si 360° (ou 24 h) > AHag > 180° (ou 12 h),
- A_z est W si 180° (ou 12 h) > AHag > 0° (ou 0 h).

La détermination N ou S est donnée par la position de l'astre par rapport au premier vertical. On distingue plusieurs cas de figure représentés sur la figure A8-2 ci-après. Ayant noté P le pôle élevé et P' le pôle abaissé :

1) Si déclinaison D et latitude φ sont de même nom et que D > φ (position A_0), alors A_z est du nom du pôle élevé ;
2) Si déclinaison D et latitude φ sont de même nom et que P > 90° (position A_1), alors A_z est du nom du pôle élevé ;
3) Si déclinaison D et latitude φ sont de noms contraires (position A_4), alors A_z est du nom du pôle abaissé.
4) Il reste à lever l'ambiguïté dans le cas où latitude et déclinaison sont de même nom, que P < 90° et que D < φ. Pour cela, on définit dans la table F la quantité notée Gr.D qui est la déclinaison d'un astre fictif qui a toujours même angle au pôle P que l'astre considéré et qui est situé sur le premier vertical. Cette quantité s'évalue facilement car le triangle de position de cet astre fictif est rectangle en Z et on a : $\tan Gr.D = \cos P . \tan \varphi$.

La comparaison entre D et Gr.D permet ensuite de trouver le nom de A_z :

5) Si D > Gr.D (position A_2), alors A_z est du nom du pôle élevé ;
6) Si D < Gr.D (position A_3), alors A_z est du nom du pôle abaissé.

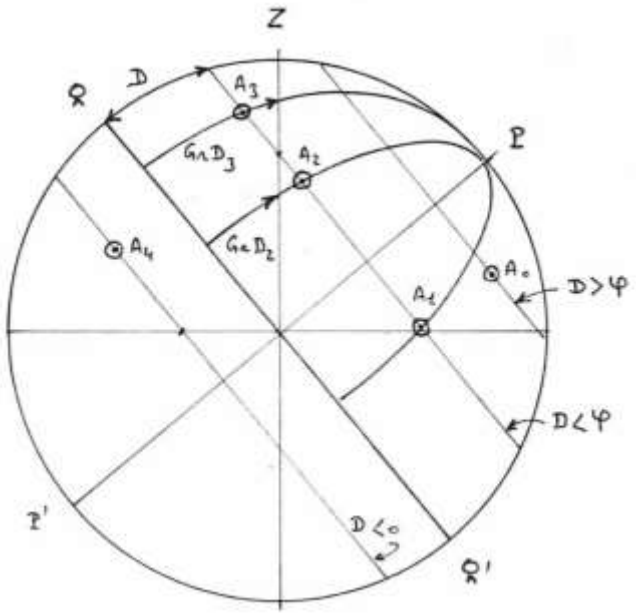


Fig : A8-2

Mise en table des éléments de calcul de l'azimut :

La table 1, qui est la table principale de l'ouvrage, donne en fonction de l'angle au pôle P et de la latitude φ :

- l'arc β, noté U, au dixième de minute près,
- la quantité $V = \log(\sin\varphi/\cos U)$ avec 5 décimales,
- l'arc Gr.D au dixième de degré près.

Cette même table 1 donne également, en fonction de l'angle au pôle P et de la déclinaison D (qui devient argument d'entrée à la place de la latitude), l'arc auxiliaire γ tel que $\cos\gamma = \sin P \,.\, \cos D$ au dixième de degré près. Cette table 1 donne enfin accès à l'azimut calculé selon la formule $\cos\gamma = \sin A_z \,.\, \cos H$.

En définitive, une première lecture de la table 1, en fonction de l'angle au pôle et de la latitude donne les éléments de calcul de la hauteur, U et V, et l'arc Gr.D qui permet la détermination du quadrant. Une seconde lecture, en fonction de l'angle au pôle et de la déclinaison, qui se fera sur la même page, permet de relever l'arc auxiliaire γ. Enfin, une troisième lecture de cette même table, en fonction de l'arc γ (à rechercher dans sa colonne) et de la hauteur (qui est alors argument d'entrée à la place de la latitude) donne l'angle A_z, à lire en bas de colonne. Cette dernière lecture se fait par tâtonnements d'une page à l'autre.

La table 1 ne permet une évaluation précise de l'azimut (au demi-degré) que si son taux de variation par rapport à l'arc γ n'est pas trop important. Les concepteurs de la table ont limité ce taux à (en valeur absolue) :

$$\frac{\Delta A_z}{\Delta\gamma} = \frac{|-\sin\gamma|}{\cos A_z . \cos H} < 3{,}33$$

En d'autres termes, la variation de l'azimut ne doit pas excéder 1° lorsque γ varie de 0,3°. Ces conditions sont toujours vérifiées tant que l'angle au pôle de l'astre est inférieur à 37,5° (2 h 30 m) et que, simultanément, la hauteur est inférieure à 70°, c'est-à-dire sur les 13 premières pages de la table 1. Les autres pages de la table 1 sont partagées en deux zones séparées par un trait tireté ; les conditions de bonne précision de calcul d'azimut par la table 1 sont vérifiées lorsque le point de calcul de la formule $\cos\gamma = \sin A_z \,.\, \cos H$ se situe dans la zone située au-dessus du trait. Dans le cas contraire, il faudra calculer l'azimut avec une autre table, référencée 11, plus précise. D'une manière générale, il faudra recourir à la table 11 lorsque l'astre est proche du premier vertical et et/ou

lorsque la hauteur est importante. On effectue ensuite la détermination du quadrant de A_z comme indiqué plus haut.

La table 11 permet de calculer à la minute près l'arc auxiliaire γ en fonction de P et de D puis de calculer ensuite l'angle A_z en fonction de l'arc γ et de la hauteur H. Cette table a pour arguments verticaux H ou D et pour arguments horizontaux respectifs A_z ou P, γ figurant en valeur calculée. La valeur de γ se détermine simplement par simple lecture en fonction de P et de D et éventuelle interpolation. Pour trouver l'angle A_z, il faut entrer avec la hauteur H et suivre la ligne correspondante jusqu'à trouver une valeur de γ aussi voisine que possible de la valeur considérée ; la valeur cherchée de A_z figure en bas de colonne en degrés entiers.

Exemple :

Les données de calcul figurent dans le tableau ci-dessous.

Estime		Coordonnées horaires		Observation	
φ_e	40° 12' N	AHvp	74° 56,0'	H_v	39° 15'
G_e	19° 38' W	D	20° 00' N		Soleil
$AHvg_e$ = 55° 18,0'					

On adopte φ_a = 40° N comme latitude auxiliaire et P_a = 55° W (3 h 40 m) comme angle au pôle auxiliaire.

La table 1 donne, en fonction de P_a et de φ_a les quantités U, V et Gr.D = 25,7°. On relève ensuite, pour la même valeur de P_a, et en fonction de D l'arc γ = 39,7°.

On entre à nouveau dans cette table 1 avec la hauteur H = 39° 15' et l'arc γ = 39,7° et on y relève que l'angle A_z est voisin de 90° mais qu'il est impossible d'en déduire une valeur précise, d'où le recours nécessaire à la table 11 dont on a reproduit l'extrait utile ci-dessous :

D, H ↓	P = 3 h 40		…	P = 5 h 32		P = 5 h 36	
20°	39° 40'	*.45*	…	21° 08'	*.94*	20° 51'	*.96*
21°	40° 07'			22° 05'		21° 48'	
39°	50° 28'	*.67*		39° 31'	*.98*	39° 23'	*.99*
40°	51° 08'			40° 30'		40° 22'	
	A_z = 55°		…	A_z = 83°		A_z = 84°	

Les valeurs en italiques portées en partie droite des colonnes sont les variations de l'élément calculé pour une variation de 1' de l'argument vertical.

Une première lecture en fonction de D et de P donne une valeur précise de l'arc γ = 39° 40'. Entrant ensuite avec la hauteur de 39° 15', il faut interpoler entre les valeurs surlignées de γ dans les deux colonnes de droite pour extraire l'angle A_z. Le calcul donne finalement A_z = 83,8°.

Nous sommes ici dans le cas où latitude et déclinaison sont de même nom, D < φ et D < Gr.D, l'azimut est donc S (pôle abaissé) et W (AHvg < 180°). On a donc Z = S83,8°W = 263,8°.

ANNEXE 9-1

De CORNET à PEPPERDAY

Formulations utilisées :

Les formules successives de calcul sont obtenues à partir d'une décomposition du triangle de position PZA selon la hauteur sphérique AK issue de l'astre (figure A9-1). Les arcs auxiliaires utilisés sont l'arc AK, noté R chez Ageton, ou son complément TA, noté y chez Cornet, et la latitude du point K, que l'on notera φ_K pour plus de commodité (notée x par Cornet et K par Ageton). On remarquera que cette latitude est toujours du nom de la déclinaison D de l'astre observé.

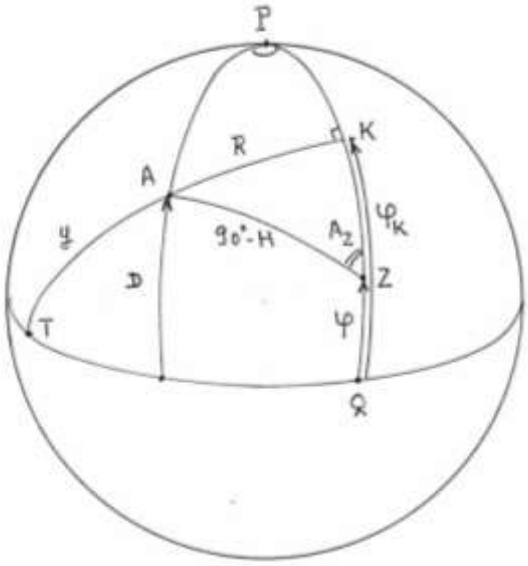


Fig : A9-1

Les différentes formules sont indiquées dans le tableau ci-dessous :

1er groupe Cornet	2e groupe Cornet	Ageton
$\cot \varphi_K = \cot D \,.\, \cos P$ $\cot y = \tan P \,.\, \cos \varphi_K$ $\cot A_z = \tan y \,.\, \sin(\varphi_K \pm \varphi)$ $\tan H = \cot(\varphi_K \pm \varphi) \,.\, \cos A_z$	$\cos y = \cos D \,.\, \sin P$ $\sin \varphi_K = \sin D \,/\, \sin y$ $\sin H = \sin y \,.\, \cos(\varphi_K \pm \varphi)$ $\sin A_z = \cos y \,/\, \cos H$	$\csc R = \sec D \,.\, \csc P$ $\csc \varphi_K = \csc D / \sec R$ $\csc H = \sec R \,.\, \sec(\varphi_K \sim \varphi)$ $\csc A_z = \csc R / \sec H$

Règles de signes et noms concernant les tables de Cornet :

- si l'angle au pôle est inférieur à 90°, on forme la différence algébrique ($\varphi_K - \varphi$) à laquelle on donne le nom, N ou S, du résultat,
- si l'angle au pôle est supérieur à 90°, on utilise la somme ($\varphi_K + \varphi$),
- l'azimut est compté par quadrant, à partir du pôle du nom de la quantité ($\varphi_K \pm \varphi$) utilisée ; la détermination E ou W est fixée par la valeur de l'angle horaire local.

Concernant la table d'Ageton, les règles sont plus simples compte tenu du fait que l'argumentation s'étend jusqu'à 180°. La notation ($\varphi_K \sim \varphi$) représente la valeur absolue de la différence algébrique entre φ_K et φ. Si l'angle au pôle est supérieur à 90°, la valeur de φ_K est aussi supérieure à 90° et sera relevée sur l'échelle d'argumentation du bas

de la table (minutes à droite, voir extraits de table ci-après). Les déterminations de l'angle A_z figurent dans le tableau ci-dessous :

		$\varphi_K \sim \varphi$	A_z compté du pôle élevé
φ et D de noms contraires		$\lvert\varphi_K\rvert + \varphi$	$A_z > 90°$
φ et D de mêmes noms	$\varphi_K > \varphi$	$\lvert\varphi_K\rvert - \varphi$	$A_z < 90°$
	$\varphi_K < \varphi$	$\varphi - \lvert\varphi_K\rvert$	$A_z > 90°$

Cornet, table I :

Le principe d'utilisation est extrêmement simple connaissant la latitude du lieu φ, l'angle au pôle P et la déclinaison D de l'astre. La procédure de calcul est la suivante :

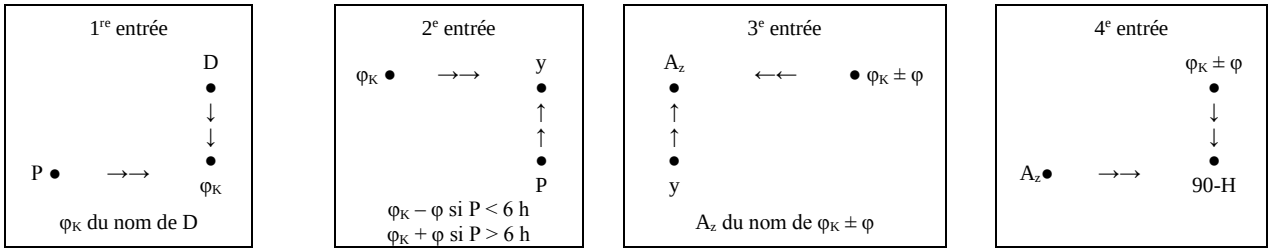
1re entrée : prenant D « en haut » et P « à gauche », on trouve φ_K auquel on donne le nom de D ; on applique ici la 1re formule du 1er groupe.

2e entrée : prenant P « en bas » et φ_K « à gauche », on trouve y ; on applique la 2e formule.

3e entrée : ayant formé algébriquement $\varphi_K \pm \varphi$, on prend y « en bas » et $\varphi_K \pm \varphi$ « à droite » pour trouver A_z ; on applique alors la 3e formule.

4e entrée : on peut de plus évaluer H en prenant $\varphi_K \pm \varphi$ « en haut » et A_z « à gauche » ; on obtient alors le complément de H ; on applique la 4e formule.

Dans sa notice explicative, Charles Cornet a très clairement synthétisé la procédure de calcul ; elle est reproduite ci-dessous :



Exemple :

Calculer l'azimut d'un astre d'angle au pôle 6 h 51 m W et de déclinaison D = 34° 48' N en un lieu de latitude φ = 48° 42' N.

1re entrée :

			…	**146°**	**145°**	**…**		
			…	**34°**	**35°**	**…**		
0h 40m	**11h 20m**	**10°**	…	34,4°	35,4°	…	**80°**	**100°**
…	**…**	**…**	…	…	…	…	**…**	**…**
5h 08m	**6h 52m**	**77°**	…	71,6°	72,2°	…	**13°**	**167°**
5h 12m	**6h 48m**	**78°**	…	72,9°	73,5°	…	**12°**	**168°**
…	**…**	**…**	…	…	…	…	**…**	**…**
			…	**56°**	**55°**	**…**		
			…	**8h 16m**	**8h 20m**	**…**		
			…	**3h 44m**	**3h 40m**	**…**		

On entre ici avec D « en haut », en argument horizontal, et P « à gauche », en argument vertical. La notice de la table suggère de ne pas interpoler (ou de le faire « à vue »). On obtient ainsi, avec D arrondie à 35° N et P forcé à 6 h 52m, φ_K = 72,2° N, que l'on arrondira à 72° dans l'entrée suivante.

2e entrée:

			…	168°	167°	…		
			…	12°	13°	…		
…	…	…	…	…	…	…	…	…
4h 48m	7h 12m	72°	…	34,5°	36,8°	…	18°	162°
4h 52m	7h 08m	73°	…	36,0°	38,3°	…	17°	163°
…	…	…	…	…	…	…	…	…
			…	78°	77°	…		
			…	6h 48m	6h 52m	…		
			…	5h 12m	5h 08m	…		

On entre ici avec P « en bas », en argument horizontal, et φ_K « à gauche », en argument vertical, de même sans interpoler. On obtient y = 36,8° que l'on arrondira à 37°.

On forme $\varphi_K + \varphi$ (car P > 6h) soit 48,7° + 72,2° = 120,9° que l'on arrondit à 121° N.

On entre enfin avec y « en bas », en argument horizontal et $\varphi_K + \varphi$ « à droite », en argument vertical.

3e entrée :

			…	127°	126°	…		
			…	53°	54°	…		
…	…	…	…	…	…	…	…	…
2h 00m	10h 00m	30°	…	56,9°	57,8°	…	60°	120°
2h 08m	9h 52m	32°	…	57,4°	58,4°	…	58°	122°
…	…	…	…	…	…	…	…	…
			…	37°	36°	…		
				9h 32m	9h 36m			
				2h 28m	2h 24m			

L'intervalle d'argumentation étant ici de 2° en vertical, on prendra la moyenne entre les deux valeurs relevées que l'on arrondira au degré le plus proche soit 57°. L'azimut est en définitive Z = N57°W soit 303°.

Méthode d'Ageton :

La table d'Ageton (HO211) est une simple table des logarithmes – multipliés par 10^5 – des sécantes et cosécantes d'un argument variant de 0° à 180° avec un intervalle de 0,5'. La table II de Cornet est analogue mais son argumentation est moins étendue, faisant appel aux arcs complémentaires et supplémentaires, ce qui ne change rien à la présentation du calcul. On a choisi d'illustrer leur usage à partir d'exemples traités sur le modèle d'Ageton.

Les données d'un premier calcul figurent dans le tableau ci-dessous :

Estime		Coordonnées horaires		Observation	
φ_e	40° 43' N	AHap	323° 12,5'	H_v	14° 38,5'
G_e	68° 30' W	D	38° 43,6' N		Véga
$AHag_e$ = 254° 42,5' ; P_e = 105° 17,5' E					

			ADD		SUBSTRACT		ADD		SUBSTRACT
P =	105° 17,5’ E	A =	1565						
D =	38° 43,6’ S	B =	10782	A =	20371				
R =	48° 48,5’	A =	12347	B =	18139	B =	18139	A =	12347
φ_K =	108° 13,0’ N	←	←	A =	2232				
- φ =	40° 43,0’ N								
$\varphi_K \sim \varphi$ =	67° 30,0’ N	→	→	→	→	B =	41716		
H_e =	14° 36,0’	←	←	←	←	A =	59855	B =	1425
H_v =	14° 38,5’								
Int =	**+ 2,5’**			**Z =**	**N51°E = 051°**	←	←	A =	10922

Dans le tableau de calcul ci-dessus, A et B représentent respectivement les logarithmes des cosécantes et sécantes des arguments. Le calcul est ici fait sans interpoler et le résultat est voisin de H_e = 14° 36,3’ trouvée en exécutant la formule fondamentale avec une calculette. Il est facile de retrouver les différentes valeurs numériques figurant dans le type de calcul ci-dessus ; on a simplement reproduit les extraits de table permettant de trouver R et φ_K.

↓		**48° 30’**			**71° 30’**			
	…	A	B	…	A	B	…	
…		…	…		…	…		…
17		12365	18117		2233	50499		13
		12360	18125		2231	50519		
18	…	12354	18132	…	2229	50538	…	12
		12349	18139		2227	50557		
19		12343	18146		2225	50576		11
…		…	…		…	…		…
		A	B	…	A	B	…	↑
		131°			**108°**			

On donne ci-dessous les éléments d’un second calcul :

Estime		Coordonnées horaires		Observation	
φ_e	45° 00’ S	AHap		H_v	39° 45’
G_e		D	63° 12’ S		Acrux
P_e = 88° 19’ E					

			ADD		SUBSTRACT		ADD		SUBSTRACT
P =	88° 19’ E	A =	18,7						
D =	63° 12’ S	B =	34594,0	A =	4935				
R =	26° 47,5’	A =	34612,7	B =	4932	B =	4932	A =	34613
φ_K =	89° 19,5’ S	←	←	A =	3				
- φ =	45° 00,0’ S								
$\varphi_K \sim \varphi$ =	44° 19,5’ S	→	→	→	→	B =	14546		
H_e =	39° 41’	←	←	←	←	A =	19478	B =	11374
H_v =	39° 45’								
Int =	**+ 4’**			**Z =**	**S36°E = 144°**	←	←	A =	23239

Le calcul a été fait de même sans interpoler mais le résultat diffère notablement de celui déduit d’un calcul plus exact qui est H_e = 39° 49,8’ (environ 9’ d’écart).

Les extraits pertinents des tables sont les suivants :

↓		**26° 30’**			**89°**			
	…	A	B	…	A	B	…	
…		…	…		…	…		…
10		34795	4884		4,6	183732		20
		34782	4887		4,5	184168		
11		34770	4890		4,4	184609		19
		34757	4894		4,3	185055		
12		34744	4897		4,2	185505		18
…		…	…		…	…		…
17	…	34619	4929	…	3,4	190282	…	13
		34607	4932		3,3	190790		
18		34594	4935		3,2	191303		12
		34582	4938		3,2	191824		
19		34569	4941		3,1	192350		11
		34557	4945		3,0	192883		
20		34544	4948		2,9	193422		10
…		…	…		…	…		…
		A	B	…	A	B	…	↑
		153°			**90° 30’**			

Si on effectue les interpolations (la table ne fournit aucune aide pour les exécuter) au niveau de la recherche de R, on arrive ensuite à φ_K = 89° 11’, ce qui conduira à trouver une hauteur estimée de 39° 48’, encore à 2’ environ de la juste valeur.

La technique de Sadler :

L'imprécision du calcul lorsque l'angle au pôle est voisin de 90° a conduit à mettre au point une autre méthode de calcul de la hauteur. Celle-ci, énoncée par D. H. Sadler et figurant dans la table de Bayless, consiste à calculer la hauteur H_1 lorsque l'angle au pôle est égal, rigoureusement, à 90° puis à évaluer à l'aide d'une expression approchée un petit terme correctif noté H_2 ; la hauteur estimée cherchée H_e est la somme des deux termes.

On établit ainsi :

$$\sin H_1 = \sin \varphi_e \,.\, \sin D \quad \text{et} \quad \sin H_2 \approx \frac{\cos \varphi_e \,.\, \cos D \,.\, \cos P_e}{\cos \frac{H_v + H_1}{2}}$$

Ces expressions sont à employer dès lors que l'on est dans la « zone interdite » fixée par Ageton ou Bayless dans leurs tables respectives et sont calculables avec les logarithmes qui y figurent ; avec les données de l'exemple précédent, on obtient H_1 = 39° 08,1' et H_2 = 0° 41,7' soit H_e = 39° 49,8' qui est la bonne valeur.

La table S de Pepperday :

La table de Mike Pepperday est une copie de la table d'Allan Bayless, identique à celle de Cornet, les logarithmes des sécantes et cosécantes étant multipliés par la constante 94293,4 au lieu de 10^5 pour une raison de mise en page, le passage de 6 à 5 chiffres significatifs du nombre représentatif de la cosécante de l'argument devant se faire en bas de la dernière colonne de la 1re page, entre 4° 59' et 5° ; on a ainsi 100059 pour 4° 59' et 99923 pour 5° et les colonnes sont de largeur égale à chaque page. Si on regarde la table de Bayless (ou de Cornet), le passage de 6 à 5 chiffres significatifs se fait entre 5° 44' et 5° 45' donc, en milieu de première colonne de la 2e page.

ANNEXE 9-2

TABLE de DOMENJOUD

Formulation utilisée :

Les formules successives de calcul sont obtenues à partir d'une décomposition du triangle de position PZA selon la hauteur sphérique AK issue de l'astre (figure A9-2). Les arcs auxiliaires utilisés sont l'arc AK, noté N chez Domenjoud, et la latitude du point K, que l'on notera φ_K.

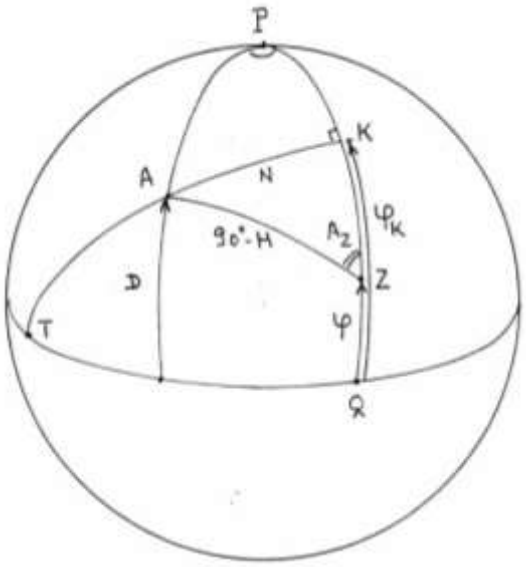


Fig : A9-2

P. Domenjoud caractérise l'arc KZ par la lettre R et construit le tableau ci-dessous en considérant les différentes configurations des triangles :

		R	A_z compté à partir
φ et D de noms contraires		$R = \varphi_K + \varphi$	du pôle abaissé
φ et D de mêmes noms	$P < 90°$ et $\varphi > \varphi_K$	$R = \varphi - \varphi_K$	du pôle abaissé
	$P < 90°$ et $\varphi < \varphi_K$	$R = \varphi_K - \varphi$	du pôle élevé
	$P > 90°$	$R = 180° - (\varphi_K + \varphi)$	du pôle élevé

Utilisant la règle du pentagone de Neper, on établit et vérifie, pour chacun des cas de figure :

$$\text{triangle PKA :} \quad \sin N = \sin P . \cos D \quad ; \quad \tan \varphi_K = \frac{\tan D}{\cos P} \quad ;$$

$$\text{triangle ZKA :} \quad \sin H = \cos R . \cos N \quad ; \quad \tan A_z = \frac{\tan N}{\sin R} \quad .$$

La table 1-2-3 permet le calcul de ces formules par logarithmes népériens, soit, en partant des éléments connus P et D et en inversant les formules :

$$\ln \csc N = \ln \csc P + \ln \sec D \text{ d'où } N$$

$$\ln\cot\varphi_K = \ln\cot D - \ln\sec P \text{ d'où } \varphi_K \text{ puis R}$$

$$\ln\csc H = \ln\sec R + \ln\sec N \text{ d'où H}$$

$$\ln\cot A_z = \ln\cot N - \ln\csc R \text{ d'où } A_z$$

La table 1-2-3 donne des valeurs numériques fonction du logarithme népérien des cosécantes, sécantes et cotangente de l'argument d'entrée et permet ainsi le calcul successif de N, φ_K (d'où R) puis H et A_z.

Construction de la table 1-2-3 :

Une simple table de logarithmes donnant les éléments ci-dessus aurait pu tout simplement être reproduite mais ces tables conduisent à utiliser des logarithmes dont la caractéristique peut être positive ou négative. Dans le but de rendre le déroulement du calcul plus sûr (et plus familier aux utilisateurs), Paul Domenjoud va chercher à éviter l'emploi des quantités négatives.

La table comporte 90 tableaux (de 0° à 89°) de 61 lignes (de 0' à 60'). L'argument, unique, d'entrée dans la table varie donc de 0° à 90° avec un intervalle de 1'. Pour une valeur X de l'argument ($X \in [0°, 90°]$), la table fournit trois nombres X1, X2 et X3. Par exemple, pour X = 49° 04', on lit, de gauche à droite, dans l'extrait de table reproduit ci-après :

X1 = 1607 X2 = 2423 X3 = 49184

L'analyse de la table montre que X1 est de la forme $A.\ln\csc x$ et que X2 est de la forme $A.\ln\sec x$, A étant une constante ; X1 et X2 sont d'autre part toujours positifs.

Le 3e logarithme à intervenir est celui de la cotangente de l'argument. Nous avons nécessairement :

$$A.\ln\cot x = A.\ln\csc x - A.\ln\sec x = X1 - X2$$

En analysant ligne à ligne la table, on vérifie facilement que X3 = X1 – X2 + 50000, soit encore :

$$X3 = A.\ln\cot x + 50.000$$

P. Domenjoud a donné à la constante A la valeur de 18000/π, soit environ 5.729,578. Cette valeur a probablement été donnée pour que, sur l'échelle de 0,01° à 89,99°, toutes les valeurs numériques figurent dans l'intervalle $[0, 50.000]$ pour X1 et X2 et $[0, 99999]$ pour X3. Les nombres qui seront relevés dans la table permettent le calcul des éléments N, φ_K, H et Z nécessaires à la détermination des éléments de la droite de hauteur.

Exemple :

Les données de calcul figurent dans le tableau ci-dessous :

Estime		Coordonnées horaires		Observation	
φ_e	37° 10' S	AHvp	249° 01'	H_v	25° 00'
G_e	61° 12' E	D	8° 25' N		Soleil
Angle au pôle P_e = 49° 47' E					

Le type de calcul est le suivant :

D =	8° 25’ N	D2 =	62	D3 =	60948		
P =	49° 47’ E	+P1 =	1545	-P2 =	-2506	φ =	37° 10’ S
		N1 =	1607	K3 =	58442	φ_K =	12° 54’ N
		N2 =	2423	N3 =	49184		
H_v =	25° 00’	+R2 =	2540	-R1 =	-1521	R = φ_K + φ =	50° 04’ N
$-H_e$ =	-24° 52’	H1 =	4963	Z3 =	47663		
Int =	+8’			A_z =	N56,4°E		

Le calcul est fait sans interpolation ; les justes valeurs sont : H_e = 24° 52,2’ et Z = 056,4°.

Extraits des tables 1-2-3 :

	8°			…	**12°**			…	**24°**		
	1	2	3		1	2	3		1	2	3
…	…	…	…		…	…	…		…	…	…
24’	11021	61.80	60960		8814	135.2	58679		5065	536.1	54529
25’	11010	62.04	60948		8807	135.6	58671		5062	536.8	54525
26’	10999	62.29	60936		8799	136.0	58663		5058	537.6	54520
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
52’	10714	68.88	60645		8606	145.7	58460		4963	557.5	54406
53’	10703	69.14	60634		8599	146.1	58452		4960	558.2	54402
54’	10693	69.40	60623		8591	146.5	58445		4956	559.0	54397
55’	10682	69.66	60612		8584	146.8	58437		4953	559.8	54393
…	…	…	…		…	…	…		…	…	…

	49°			**50°**			…	**56°**		
	1	2	3	1	2	3		1	2	3
…	…	…	…	…	…	…		…	…	…
03’	1608	2421	49187	1523	2538	48985		1071	3338	47733
04’	1607	2423	49184	1521	2540	48981		1070	3340	47729
05’	1605	2425	49181	1520	2542	48978		1069	3343	47726
…	…	…	…	…	…	…		…	…	…
21’	1582	2456	49127	1498	2574	48924		1051	3383	47668
22’	1581	2457	49123	1496	2576	48920		1050	3385	47665
23’	1579	2459	49120	1495	2578	48917	…	1049	3388	47661
24’	1578	2461	49117	1494	2580	48914		1047	3390	47657
…	…	…	…	…	…	…		…	…	…
46’	1547	2504	49042	1464	2625	48839		1023	3446	47578
47’	1545	2506	49039	1462	2627	48835		1022	3448	47574
48’	1544	2508	49035	1461	2629	48832		1021	3451	47570
…	…	…	…	…	…	…		…	…	…

ANNEXE 9-3

PROJET de TABLE de P. HUGON

Formulation utilisée :

Les formules successives de calcul sont obtenues à partir d'une décomposition du triangle de position PZA selon la hauteur sphérique ZL issue du zénith (figure A9-3). Les arcs auxiliaires utilisés sont l'arc ZL, noté g_0, et les deux arcs PL et LA dont les compléments sont notés respectivement d_1 et d_2.

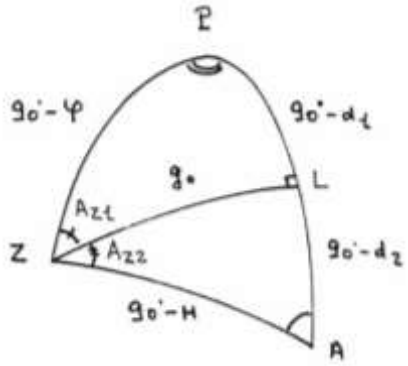


Fig : A9-3

Les formules utilisées, déduites des règles du pentagone de Neper, sont les suivantes :

Triangle PLZ :

$$\sin g_0 = \cos\varphi \,.\, \sin P \quad , \quad \sin\varphi = \sin d_1 \,.\, \cos g_0 \quad , \quad \cos A_{Z1} = \tan\varphi \,.\, \tan g_0$$

Triangle ZLA :

$$\sin g_0 = \cos H \,.\, \sin A \quad , \quad \sin H = \sin d_2 \,.\, \cos g_0 \quad , \quad \cos A_{Z2} = \tan H \,.\, \tan g_0$$

Pour un astre A situé au-dessus de l'horizon de l'observateur, quatre cas de figure sont à considérer. Ils sont récapitulés dans le tableau ci-dessous.

φ et D	P	d_1	Az	|D|	Angle A
Même nom	< 90°	> D	$A_{Z1} + A_{Z2}$	$d_1 + d_2 - 90°$	< 90°
	< 90°	< D	$A_{Z1} - A_{Z2}$	$d_1 - d_2 + 90°$	> 90°
	> 90°	-	$A_{Z2} - A_{Z1}$	$90° - (d_1 - d_2)$	< 90°
Noms contraires	< 90°	-	$A_{Z1} + A_{Z2}$	$90° - (d_1 + d_2)$	< 90°

Procédure opératoire et mise en table :

Les éléments connus au début du calcul sont les suivants :

- coordonnées du point estimé : φ_e et G_e ;
- coordonnées horaires de l'astre à l'instant de l'observation : angle au pôle estimé P_e et déclinaison D ;
- hauteur vraie H_v résultant de la mesure.

Au vu des formules ci-dessus, les deux entrées successives dans la table se feront avec les arguments g_0 et φ pour la première entrée et g_0 et H pour la seconde entrée. La première opération à effectuer est donc la détermination de g_0 à l'aide d'une table index dont les arguments d'entrée sont la latitude et l'angle au pôle estimés. Cette table résoud la formule $\sin g_0 = \cos \varphi_e \,.\, \sin P_e$. Elle permet de trouver la valeur de g_0, arrondie aux 15' rondes les plus proches, qui sera utilisée pour les deux entrées dans la table principale. Celle-ci, dont la disposition générale est indiquée ci-dessous, est ensuite ouverte, une fois pour toute, à la page correspondant à la valeur trouvée de g_0.

φ ou H	g_0		
0° 00'			
… φ_a →	P_a	d_1	A_{Z1}
… H_a →	… A	… d_2	… A_{Z2}
… $90 - g_0$			

1re entrée dans la table et définition du point auxiliaire :

La latitude du point auxiliaire est φ_a, valeur arrondie aux 15' rondes les plus proches de la latitude estimée φ_e ; en d'autres termes, la différence entre ces deux latitudes n'excède pas 7,5'. La première entrée dans la table se fait en fonction de g_0 et de φ_a et donne directement les trois valeurs P_a, d_1 et A_{Z1}. P_a est l'angle au pôle auxiliaire qui donne accès à la longitude auxiliaire G_a.

2e entrée dans la table :

Cette seconde entrée se fait en fonction d'une hauteur auxiliaire H_a qui est celle de H_v arrondie aux 15' rondes les plus proches. De même, la différence entre ces deux hauteurs n'excède pas 7,5'. Cette seconde entrée donne directement les trois valeurs A, d_2 et A_{Z2}.

Calculs :

On calcule ensuite la déclinaison auxiliaire D_a (qui serait celle d'un astre d'angle au pôle P_a, observé du point auxiliaire à la hauteur H_a). Cette déclinaison D_a est obtenue conformément aux règles indiquées dans le tableau récapitulant les cas de figure ; on donne enfin à D_a le signe de D.

On évalue la correction à appliquer à la hauteur auxiliaire H_a pour tenir compte de la différence entre déclinaisons auxiliaire D_a et réelle D ; cette correction est de la forme :

$$\Delta H = \Delta D . \cos A \quad \text{(algébriquement avec } \Delta D = D - D_a)$$

Une table auxiliaire permet d'effectuer facilement le calcul. On observera cependant qu'il conviendra de veiller à la nature aigüe ou obtuse de A et au signe de la différence algébrique des déclinaisons.

On obtient finalement la hauteur calculée au point auxiliaire puis l'intercept :

$$H_c = H_a + \Delta H \quad \text{et} \quad \text{intercept} = H_v - H_c$$

L'azimut, compté à partir du pôle élevé, vers l'Est ou vers l'Ouest, est obtenu à partir de A_{Z1} et A_{Z2} conformément aux règles du tableau précité.

Intervalles tabulaires et limites de précision :

Une analyse géométrique, ou le simple examen des formules qui ont servi à construire la table, montre que :

$$g_0 \leq 90° - \varphi \quad \text{ou} \quad g_0 \leq 90° - H$$

Les intervalles de présentation des éléments sont liés à la largeur de l'argumentation qui, pour une valeur donnée de g_0, va de 0° à (90° - g_0) avec un pas de 15'.

On notera que pour $g_0 = 90° - \varphi$, le triangle de position est rectangle en P et que l'on a de plus $d_1 = 90°$ et $A_{Z1} = 0°$; pour $g_0 = 90° - H$, le triangle de position est rectangle en A (digression maximale de l'astre) et on a alors $d_2 = 90°$ et $A_{Z2} = 0°$.

Dans les deux cas, les différences tabulaires sur P (ou A) et A_{Z1} (ou A_{Z2}) deviennent très grandes, ce qui n'est pas gênant tant que l'on effectue une lecture directe. Il y a cependant lieu d'examiner jusqu'à quel point l'interpolation finale peut être limitée à son seul terme du premier ordre ΔD.cosA. Pour cela, il convient d'établir le développement limité de la hauteur H en fonction de $\Delta D = \Delta d_2$ au voisinage de la hauteur limite $H_L = 90° - g_0$. Ce développement est de la forme :

$$H = H_L + \Delta d_2 \frac{dH}{dd_2} + \frac{(\Delta d_2)^2}{2}\left[\frac{d^2H}{dd_2^2}\right] + \cdots$$

On établit ce développement à partir de l'équation $\sin H = \sin g_0 . \sin d_2$ et on obtient, en minutes d'arc :

$$H = H_L + \Delta d_2 . \cos A + \frac{\pi . (\Delta d_2)^2}{2.10800} . \cot g_0 . [(\cos A)^2 - \sin d_2] + \cdots$$

Au voisinage de la hauteur limite, on peut considérer que la variation de hauteur consécutive à une variation de déclinaison est la somme algébrique de deux termes dont le premier est le terme correctif usuel. L'analyse montre que le second terme, du 2e degré, prend des valeurs non négligeables[79] dès lors que la hauteur considérée est comprise, approximativement, entre ($H_L - 4°$) et H_L. Dans ces conditions, il sera nécessaire d'appliquer deux corrections, une première égale à ΔD.cosA et une seconde, dite du second ordre, qui sera de la forme $-\pi . (\Delta D)^2 . \cot g_0 / 2.10800$, sachant que, au voisinage de H_L, A et d_2 tendent vers 90°. Les valeurs de hauteur à partir desquelles cette seconde correction doit être appliquée étaient prévues être indiquées dans la table par une séparation en couleur ; une petite table annexe dite « table des corrections exceptionnelles » donne la valeur corrective en fonction de g_0 et de ΔD. Enfin, toujours dans ces mêmes conditions limites, l'azimut A_{Z2} doit être interpolé en fonction de ΔD. Par différentiation de la formule $\cos d_2 = \sin Z_2 . \cos H$, on établit que l'interpolation sur l'azimut a pour expression (avec ΔZ_2 en degrés et ΔD en minutes) :

$$\Delta A_{Z2} = \frac{-\Delta D}{60 . \sin g_0}$$

La table des corrections exceptionnelles donne également ΔA_{Z2} en fonction des mêmes paramètres.

Exemple :

Les données de calcul sont réunies dans le tableau ci-dessous :

Estime		Coordonnées horaires		Observation	
φ_e	18° 08,0' N	AHap	146° 06,0'	H_v	63° 32,0'
G_e	135° 17,0' W	D	43° 12,0' N		Etoile
$AHag_e = 10° 49,0' = P_e$					

[79] Supérieures ou égales à 0,2'.

On adopte comme latitude auxiliaire φ_a = 18° 15' N ; la table index donne en fonction de l'angle au pôle et de la latitude et après interpolation : g_0 = 10° 15'.

1re lecture	φ_a =	18° 15,0'	P_a =	10° 47,9'	d_1 =	18° 33,3'	A_{Z1} =	86,6°
2e lecture	H_a =	63° 30,0'	A =	180° - 23° 30,2'	d_2 =	65° 25,8'	A_{Z2} =	68,7°
			A =	156,5°	D_a =	43° 07,5'	A_Z =	17,9°
					D =	43° 12,0'		
					ΔD =	+4,5'	**Z =**	**N17,9°W**
	ΔH =	- 4,1'	←	← ← ←	ΔD.cosA =	- 4,1'		
	H_c =	**63° 25,9'**						

Commentaires : on se situe ici dans le cas de figure n° 2, l'angle à l'astre est donc supérieur à 90° et il convient de retenir le supplément de l'angle relevé en 2e lecture dans la table. On a d'autre part $A_Z = A_{Z1} - A_{Z2}$ et $|D_a| = d_1 - d_2 + 90°$. La hauteur étant inférieure d'environ 16° de la hauteur limite H_L, il n'est pas nécessaire de tenir compte d'une correction supplémentaire. La longitude du point auxiliaire est G_a = 135° 18,1' W. Le calcul direct effectué à la calculette, à partir du point auxiliaire, donne H_c = 63° 26,0' et Z = N17,8°W.

TABLE INDEX

↓φ, P →	**…**	**10°**	**11°**	**…**
…	…	…	…	…
18°	…	9° 30'	10° 30'	…
19°	…	9° 30'	10° 30'	…
…	…	…	…	…

TABLE PRINCIPALE

g_0 = 10° 15'			
φ ou H	P ou A	d_1 ou d_2	A_{Z1} ou A_{Z2}
…	…	…	…
18° 00'	10° 46,9'	18° 18,1'	86,7°
18° 15'	10° 47,9'	18° 33,3'	86,6°
…	…	…	…
63° 30'	23° 30,2'	65° 25,8'	68,7°
63° 45'	23° 43,4'	65° 41,7'	68,5°
…	…	…	…

ANNEXE 10-1

TABLAS de LÍNEAS de POSICIÓN de ALTURA

J. GARCIA

Description des tables :

Les tables de J. Garcia sont à triple argument :

- hauteur, latitude et déclinaison,
- ou hauteur, angle au pôle et déclinaison.

Les entrées se font par tableau, par ligne et par colonne.

Entrée tableau :

La hauteur H_0, argumentée de 5° à 83° avec un intervalle de 1°, constitue l'entrée tableau. Les tableaux d'une première partie de l'ouvrage sont relatifs à une déclinaison de même nom que la latitude, les tableaux de la seconde partie traitent du cas contraire ; ils sont repérés respectivement par les symboles + + ou + – figurant en marge. Chaque tableau est, le cas échéant, partagé en deux parties, l'une dans laquelle les arguments d'entrée sont la latitude et la déclinaison (l'élément calculé est l'angle au pôle), l'autre dans laquelle les arguments d'entrée sont l'angle au pôle et la déclinaison (l'élément calculé est la latitude). Il n'y a pas de recouvrement entre les deux parties des tableaux et l'utilisateur est simplement guidé par l'argumentation qui lui imposera l'une ou l'autre des méthodes.

Entrée ligne :

Ce sont les latitudes entières φ_1 et φ_2 ou les angles au pôle entier P_1 et P_2 qui constituent cette entrée. L'argumentation peut aller de 30° à 60° dans le cas de la latitude (volume II) ; concernant l'angle au pôle, elle part de 0° et peut s'étendre jusqu'à 50°. Dans les deux cas, l'intervalle d'argumentation est de 1°, 2° ou 3° selon les tableaux ou partie de tableaux.

Entrée colonne :

La déclinaison constitue l'entrée colonne ; elle est exprimée en degrés entiers, de 0° à 25°, avec un intervalle de 1°.

Résultat et interpolation :

Un groupe de 6 chiffres figure à chaque intersection ligne-colonne des tableaux. Les 4 premiers chiffres, imprimés en noir, représentent l'élément calculé, angle au pôle ou latitude suivant le cas, exprimé en degrés et minutes. Les deux derniers chiffres, imprimés en rouge, représentent la variation de l'élément consécutive à une variation de déclinaison de 10'. Enfin, dans le but d'améliorer la précision du calcul, J. Garcia indique :

- de diminuer toute valeur lue de 0,3' si le dernier chiffre est souligné,
- d'augmenter toute valeur lue de 0,2' s'il n'y a pas de soulignement.

Par exemple, un groupe numérique comme 540206 devra se lire : 54° 01,7', variation de l'élément de 5,7' pour une variation de déclinaison de 10'.

Autre exemple : 473316 : 47° 33,2', variation de l'élément de 15,7' pour une variation de déclinaison de 10'.

Le signe de la variation unitaire n'est pas indiqué ; il conviendra de déterminer, à la lecture du tableau, le sens de variation de l'élément tabulé selon le sens de variation de la déclinaison.

On représente ci-après deux extraits des tables :

H	φ	…	**D = 17°**	**D = 18°**	…
60° + +	30° 31° 32° 33° …	…	293806 291307 284407 281208 …	301506 295306 292807 285907 …	…

H	P	…	**D = 10°**	**D = 11°**	…
32° + –	… 29° 28° 26° 24° …	…	… 413111 420011 425511 434511 …	… 402511 405511 415111 424111 …	…

Exemples :

Exemple 1 : les données de calcul sont les suivantes :

Estime		Coordonnées horaires		Observation	
φ_e	30° 32’ N	AHvp	10° 36,0’	H_v	60° 12,0’
G_e	40° 18’ W	D	17° 15,0’ N		Soleil
$AHvg_e$ = 330° 18,0’					

La hauteur entière la plus voisine de H_v est H_0 = 60°. Pour cette hauteur, la lecture des tableaux conduit à utiliser la latitude en argument ligne, soit φ_1 = 30° et φ_2 = 31°. Le détail du calcul figure en page suivante ; la construction du lieu de position est représentée sur la figure A10-1 ci-dessous :

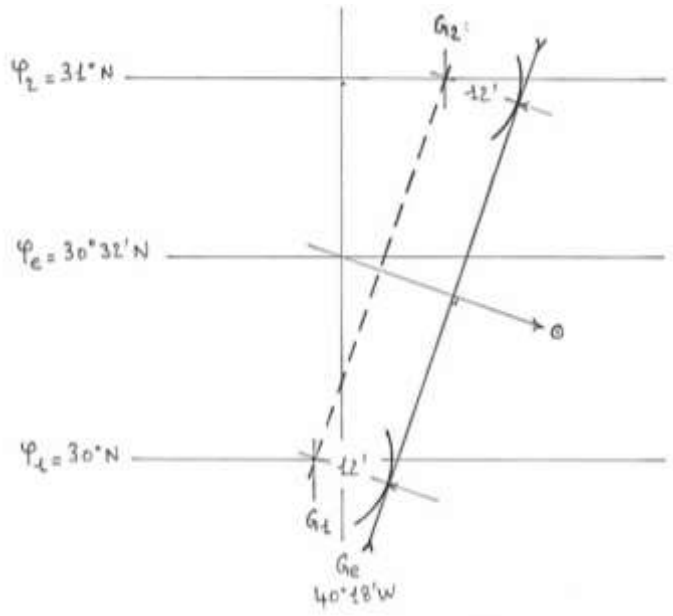


Fig : A10-1

A l'aide de l'extrait des tables figurant ci-dessus, on obtient :

P_{01} =	29° 38,2'	H_v =	60° 12'	P_{02} =	29° 13,2'
$\Delta P = 1,5.6,2$ =	9,3'	H_0 =	60° 00'	$\Delta P = 1,5.6,7$ =	10,1'
P_1 =	E 29° 47,5'	$H_v - H_0$ =	+ 12'	P_2 =	E 29° 23,3'
$AHvg_1$ =	330° 12,5'			$AHvg_2$ =	330° 36,7'
AHvp =	10° 36,0'			AHvp =	10° 36,0'
G_1 =	W 40° 23,5'			G_2 =	W 39° 59,3'

A titre comparatif, le calcul à partir du point estimé donne un intercept de + 17,8' et un azimut Z = 109,3°.

Exemple 2 : les données de calcul sont les suivantes :

Estime		Coordonnées horaires		Observation	
φ_e	42° 12' N	AHvp	77° 42,0'	H_v	31° 36,0'
G_e	50° 18' W	D	10° 24,0' S		Soleil
$AHvg_e$ = 27° 24,0'					

La hauteur entière la plus voisine de H_v est H_0 = 32°. Pour cette hauteur, la lecture des tableaux conduit à utiliser l'angle au pôle en argument ligne ; l'angle au pôle estimé étant P_e = 27° 24' W, ces arguments sont donc P_1 = 28° W et P_2 = 26° W.

A l'aide de l'extrait des tables figurant en page précédente, on obtient :

φ_{01} =	42° 00,2'	H_v =	31° 36'	φ_{02} =	42° 55,2'
$\Delta\varphi = 2,4.10,7$	- 25,7'	H_0 =	32° 00'	$\Delta\varphi = 2,4.10,7$	- 25,7'
φ_1 =	41° 34,5'	$H_v - H_0$ =	- 24'	φ_2 =	42° 29,5'
$AHvg_1$ =	28° 00'			$AHvg_2$ =	26° 00'
AHvp =	77° 42'			AHvp =	77° 42'
G_1 =	W 49° 42'			G_2 =	W 51° 42'

La construction du lieu de position est représentée sur la figure A10-2 ci-dessous :

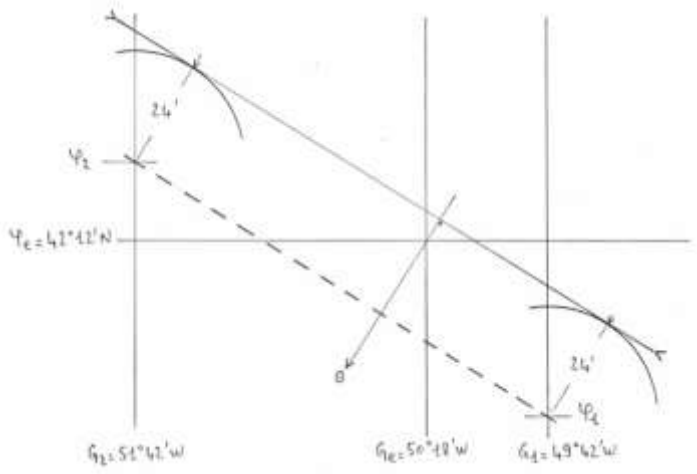


Fig : A10-2

A titre comparatif, le calcul à partir du point estimé donne un intercept de - 6,7' et un azimut Z = 212,1°.

ANNEXE 11-1

TABLE de F. BALL

Calcul de la hauteur selon le cas n°1 (utilisation naturelle de la table) :

L'intervalle d'argumentation étant de 1°, l'utilisation de la table est fondée sur l'emploi d'un point auxiliaire de calcul dont la latitude φ_a est le nombre entier de degré le plus voisin de la latitude estimée φ_e et dont la longitude G_a est telle que l'angle horaire local auxiliaire soit le nombre entier de degré le plus proche de l'angle horaire local estimé. La recherche de la hauteur auxiliaire se fera donc sur la base de ces deux nombres entiers qui définissent la page (latitude) et la ligne (westerly hour angle[80]) à considérer. On veillera ici à bien utiliser la page correspondant aux noms respectifs de la latitude et de la déclinaison (*same name* ou *contrary name*). La recherche en colonne se fera pour les deux valeurs entières de déclinaison encadrant la valeur considérée ; le calcul s'achèvera par celui de l'interpolation pour les minutes et dixièmes de la déclinaison.

Pour effectuer cette interpolation, on relève sur la ligne d'angle horaire, les deux valeurs de hauteur H' et H'' correspondant aux deux valeurs entières successives de déclinaison et on en forme la différence ΔH. Cette différence correspond à 1°, ou 60', de variation de déclinaison. Le calcul de la partie proportionnelle, pour les minutes de déclinaison $mm._m$, s'effectue à l'aide de la table III de l'ouvrage de Ball qui donne le résultat du calcul de $\Delta H.mm._m/60$.

Suivant le sens de variation de la hauteur lorsque la déclinaison augmente en valeur absolue, cette quantité est à ajouter ou à retrancher à la valeur de H relevée à partir de la partie entière de la déclinaison.

Exemple 1 :

Estime		Coordonnées horaires		Observation	
φ_e	49° 35' N	AHvp	322° 30,0'	H_v	20° 50,0'
G_e	4° 10' W	D	9° 10,0' S		Soleil
$AHvg_e$ = 318° 20,0'					

Point auxiliaire : φ_a = 50° N, $AHvg_a$ = 318°, soit $G_a = AHvp - AHvg_a$ = 4° 30' W.

L'angle horaire étant exprimé en heures et minutes dans les tables de Ball, nous considèrerons donc ici $AHvg_a$ = 318°/15 = 21 h 12 m.

L'extrait de table nécessaire est reproduit ci-après. Pour une déclinaison de 9°, on lit H' = 20° 36,5' et pour une déclinaison de 10°, nous avons H'' = 19° 43,1', soit une différence ΔH = 53,4', en valeur absolue. Le nombre de minutes et dixièmes de la déclinaison étant $mm._m$ = 10,0', la partie proportionnelle est donc de : 53,4.10/60 = 8,9' à laquelle on donnera le signe « moins » car, dans ce cas, la hauteur diminue lorsque la déclinaison augmente en valeur absolue.

La hauteur auxiliaire calculée est donc : H_a = 20° 36,5' – 8,9' = 20° 27,6'.

L'intercept est, à partir du point auxiliaire : $H_v - H_a$ = + 22,4'.

[80] Expression indiquant que l'angle horaire local est compté vers l'W à partir du méridien supérieur de l'observateur.

TRUE ALTITUDE OF BODY

LATITUDE 50°					
Westerly Hour Angle	DECLINATION – *contrary name to* – LATITUDE				Westerly Hour Angle
	...	9°	10°	...	
...	...	...	...	...	...
21 h 16 m	...	21° 03,4’	20° 09,9’	...	2 h 44 m
21 h 12 m	...	20° 36,5’	19° 43,1’	...	2 h 48 m
21 h 08 m	...	20° 09,0’	19° 15,9’	...	2 h 52 m
...	...	...	...	...	...

Interpolations :

Nous n’avons pas reproduit ici la table d’interpolation (table III) qui se présente sous la forme usuelle d’un tableau à double argument avec :

- en entrée colonne, les minutes et dixièmes de déclinaison mm.$_m$ à intervalle d’une demi-minute,
- en entrée ligne la différence tabulaire de hauteur ΔH à intervalle d’une minute.

On remarque donc que pour garder la précision de calcul du dixième de minute, il faut à nouveau interpoler la partie proportionnelle ; cette dernière interpolation se fait « à vue ».

Calcul de la hauteur selon le cas n° 2 (permutation des entrés ligne et colonne) :

Dans leur version initiale de 1907, les tables de Ball étaient limitées à 24° en entrée « colonne », c’est-à-dire, dans leur utilisation normale, à 24° en déclinaison. Pour une déclinaison de valeur supérieure (mais restant inférieure à 60°), il est encore possible de résoudre le calcul de hauteur si, toutefois, la latitude est inférieure à 24° : il suffit de permuter les entrées latitude et déclinaison. On fera alors une première entrée à la page correspondant à la partie entière de la déclinaison dans la colonne correspondant à la latitude auxiliaire et sur la ligne relative à l’angle horaire local auxiliaire ; on note une première valeur H’ de la hauteur. On fait ensuite une seconde entrée, selon la même procédure, à la page correspondant à la partie entière de la déclinaison augmentée de un degré ; on note une seconde valeur H’’ de la hauteur. On veillera à bien utiliser les pages correspondant aux signes respectifs de la latitude et de la déclinaison (*same name* ou *contrary name*). Il reste à interpoler la hauteur entre les deux valeurs notées en fonction du nombre de minutes et dixièmes de la déclinaison. L’interpolation se fait comme dans le cas n° 1.

Exemple 2 :

Estime		Coordonnées horaires		Observation	
φ_e	19° 45’ N	AHap	349° 13,0’	H_v	40° 56,0’
G_e	40° 17’ W	D	45° 54,2’ N		La Chèvre
$AHag_e$ = 308° 56,0’ = 20 h 35 m 44 s					

On adopte comme éléments auxiliaires : φ_a = 20° N, $AHag_a$ = 309° = 20 h 36 m (G_a = 40° 13’ W).

1re lecture :

TRUE ALTITUDE OF BODY

LATITUDE 45°					
Westerly Hour Angle	DECLINATION – *same name as* – LATITUDE				Westerly Hour Angle
	...	19°	20°	...	
...	...	...	...	...	...
20 h 36 m	...	40° 36,9’	41° 18,0’	...	3 h 24 m
...	...	...	...	...	...

2e lecture :

TRUE ALTITUDE OF BODY

LATITUDE 46°					
Westerly Hour Angle	DECLINATION – *same name as* – LATITUDE				Westerly Hour Angle
	...	19°	20°	...	
...	...	...	...	...	...
20 h 36 m	...	40° 21,3’	41° 03,4’	...	3 h 24 m
...	...	...	...	...	...

Les tables donnent : H’ = 41° 18,0’ et H’’ = 41° 03,4’. On a donc $\Delta H = H' - H'' = 14{,}6'$ et pour $mm._m = 54{,}2'$, une partie proportionnelle de 13,2’ (négative car H diminue lorsque D augmente). D’où une hauteur auxiliaire H_a = 41° 18,0’ – 13,2’ = 41° 04,8’ et un intercept de -8,8’.

Calcul d’azimut (H < 24°) :

L’azimut de l’astre peut être déterminé directement avec la table grâce à la formule donnant l’azimut par la hauteur. On entre, à la page correspondant à la latitude auxiliaire, dans la colonne correspondant à la valeur arrondie au degré le plus proche de la hauteur. On descend cette colonne jusqu’à trouver une valeur numérique aussi proche que possible de celle de la déclinaison ; on interpole éventuellement à vue entre éléments. La ligne correspondante donne une valeur angulaire qui, convertie en degrés, est une valeur approchée de l’azimut.

Les règles à observer sont les suivantes :

a) φ_a et D sont de même nom : utiliser les pages « *same name as* » ; l’azimut trouvé est alors mesuré à partir du pôle élevé vers l’E ou vers l’W suivant la valeur de l’angle horaire local ;
b) φ_a et D sont de noms contraires : utiliser les pages « *contrary name to* » ; l’azimut trouvé est alors mesuré à partir du pôle abaissé vers l’E ou vers l’W suivant la valeur de l’angle horaire local.

Suite de l’exemple 1 :

Les données sont : φ_a = 50° N, H_a = 20° 27,6’ ≈ 20,5°, D = 9° 10’ S.

La table donne :

TRUE ALTITUDE OF BODY

LATITUDE 50°					
Westerly Hour Angle	DECLINATION – *contrary name to* – LATITUDE				Westerly Hour Angle
	...	20°	21°	...	
...	...	...	...	...	...
21 h 04 m	...	9° 55,9’	9° 02,4’	...	2 h 56 m
21 h 00 m	...	9° 30,2’	8° 36,9’	...	3 h 00 m
20 h 56 m	...	9° 04,0’	8° 10,9’	...	3 h 04 m
...	...	...	...	...	...

L’azimut correspond ici, approximativement, à la lecture « 3 h 00 m », soit 45°. L’angle horaire local étant de 318°, l’astre est à l’E ; latitude et déclinaison sont de noms contraires, l’azimut est compté du pôle abaissé, soit S dans ce cas. On a donc : Z = S45°E = 135°.

Nota : selon ce procédé, l’azimut est compté de 0° à 180°, vers l’E ou vers l’W ; l’angle cherché se trouve systématiquement dans la colonne d’extrême droite de la table dont l’argumentation va de 0 h à 12 h.

Calcul d’azimut (H quelconque) :

La méthode ci-dessus n’est plus applicable si la hauteur est supérieure à 24°. F. Ball préconise alors, à partir de ses tables, une autre méthode, approchée, qui permet le calcul quelle que soit la hauteur, la déclinaison (ou la latitude) restant par ailleurs inférieure à 24° en valeur absolue.

Sur la figure A11-1, on a représenté le triangle de position de l’astre PZA. Si on fait varier, à latitude et déclinaison constantes, l’angle horaire (ou l’angle au pôle) d’une petite quantité ΔP, le point Z vient en B et la hauteur de l’astre varie de la quantité ΔH, repérée sur la figure par le petit arc CZ.

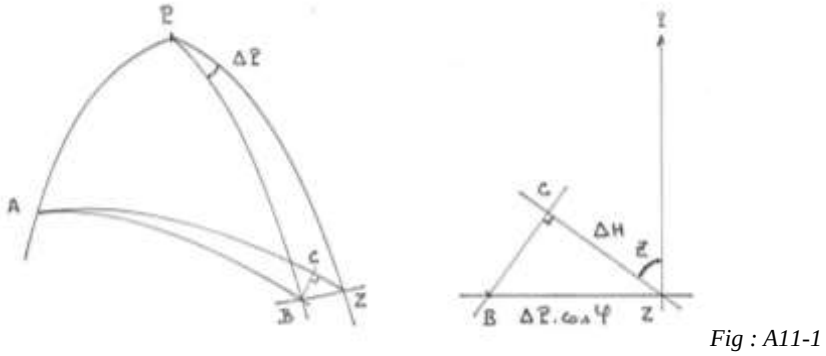


Fig : A11-1

Si ΔP est de faible valeur, on peut considérer le triangle curviligne BCZ, rectangle en C, comme plan et il vient alors :

$$\cos \widehat{BZC} = \sin Z = \frac{\Delta H}{\Delta P . \cos \varphi}$$

Pour calculer l’azimut, il suffit donc de connaître, au voisinage de l’angle horaire considéré, et pour une variation unitaire de celui-ci, la variation correspondante de la hauteur.

On peut également utiliser, à angle horaire et déclinaison constants, une variation unitaire de latitude Δφ et la variation correspondante de hauteur ΔH (figure A11-2).

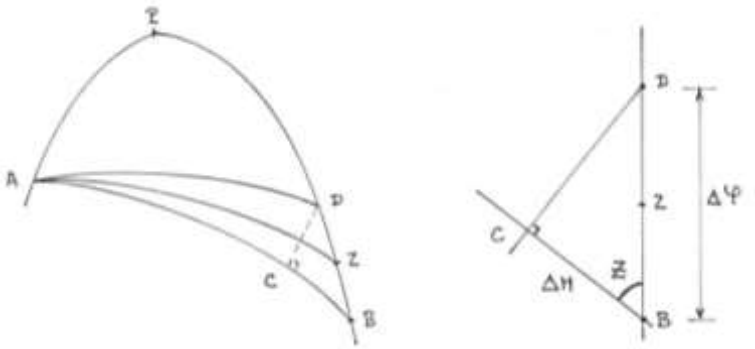


Fig : A11-2

A partir du petit triangle curviligne BDC, rectangle en C, et considéré comme plan, on obtient alors :

$$\cos \widehat{DBC} = \cos Z = \frac{\Delta H}{\Delta \varphi}$$

Dans les deux cas présentés, F. Ball choisit de prendre une variation unitaire de 2° (ou 120') centré sur la valeur considérée d'angle horaire ou de latitude. On évaluera donc ΔH en minutes directement à partir des données de la table.

Les formules sont donc :

$$\sin Z = \frac{\Delta H}{120.\cos \varphi} \quad \text{ou} \quad \cos Z = \frac{\Delta H}{120}$$

La première formule est à éviter au voisinage du premier vertical (Z voisin de 90°), la seconde, au voisinage du méridien (Z voisin de 0°). Avec ces formules, l'azimut est déterminé par quadrant et les règles de détermination sont les suivantes :

a) si <u>latitude et déclinaison sont de noms contraires</u>, l'azimut est toujours compté à partir du pôle abaissé ;
b) si <u>latitude et déclinaison sont de même nom</u> et si la <u>déclinaison est supérieure à la latitude</u>, l'azimut à toujours le nom du pôle élevé ;
c) si <u>latitude et déclinaison sont de même nom</u> et si la <u>latitude est supérieure à la déclinaison</u>, il faut placer l'astre par rapport au premier vertical ; l'azimut sera du nom du pôle abaissé si, par rapport au premier vertical, l'astre est dans l'hémisphère du méridien supérieur et le nom du pôle élevé dans le cas contraire.

<u>Exemple 3</u> :

Estime		Coordonnées horaires		Observation	
φ_e	45° 54' N	AHvp	84° 36,0'	H_v	38° 20,5'
G_e	33° 24' W	D	16° 18,0' N		Soleil
$AHvg_e$ = 51° 12,0' = 3 h 24 m 48 s					

On adopte comme éléments auxiliaires : φ_a = 46° N, $AHvg_a$ = 51° = 3 h 24 m (G_a = 33° 36' W).

L'extrait de table nécessaire est reproduit ci-après :

TRUE ALTITUDE OF BODY

LATITUDE 46°					
Westerly Hour Angle	DECLINATION – *same name as* – LATITUDE				Westerly Hour Angle
	...	16°	17°	...	
...	...	...	...	...	...
20 h 40 m	...	38° 52,0’	39° 35,5’	...	3 h 20 m
20 h 36 m	...	38° 12,4’	38° 55,8’	...	3 h 24 m
20 h 32 m	...	37° 32,7’	38° 15,9’	...	3 h 28 m
...	...	...	...	...	...

La déclinaison étant inférieure à 24°, la hauteur est calculée selon la procédure la plus simple, décrite dans le cas n° 1. On obtient, en lecture directe, une hauteur de 38° 12,4’ à laquelle il faut ajouter une partie proportionnelle de 13,0’. La hauteur auxiliaire est donc de 38° 25,4’ et l’intercept de -4,9’.

L’azimut sera calculé de façon approchée en adoptant une déclinaison arrondie de 16°. Pour une variation unitaire d’angle horaire de 8 minutes (ou 2°), la variation correspondante de hauteur est ΔH = 38° 52,0’ – 37° 32,7’ = 79,3’.

Le calcul d’azimut est alors le suivant :

$$\sin Z = \frac{\Delta H}{120.\cos \varphi_a} = \frac{79{,}3}{120.\cos 46°} \quad \text{d'où } Z = 72°$$

L’angle horaire local étant inférieur à 180°, l’astre est dans l’W ; il est de plus situé entre le méridien supérieur et le premier vertical ; l’azimut est donc S, soit Z = S72°W = 252°.

L’azimut peut aussi être calculé en utilisant une variation unitaire de latitude. ΔH est alors déterminé en recherchant les hauteurs pour un angle horaire de 51° et une déclinaison de 16° pour les latitudes 45° et 47°. On obtiendra ici H’ = 38° 30,6’ et H’’ = 37° 53,4’, soit un ΔH = 37,2’. La formule d’azimut donne :

$$\cos Z = \frac{\Delta H}{120} = \frac{37{,}2}{120} \quad \text{soit } Z = S71{,}9°W \approx 252°$$

Pour effectuer ces calculs d’azimut F. Ball a inclus dans son ouvrage trois courtes tables (indexées VI.A, VI.B et VII) ainsi qu’une table de logarithmes des nombres (indexée VIII) qui permettent le calcul d’azimut par logarithmes avec les deux formules données dans ce paragraphe.

ANNEXE 11-2

TABLES de LITTLEHALES HO203 et HO204

Principe général :

Les tables HO203 et HO204 ont été conçues pour construire la droite de hauteur consécutive à une observation à partir d'un point situé sur un parallèle auxiliaire dont la latitude φ_0 est le nombre entier de degrés le plus proche de la latitude estimée à l'instant de l'observation. En fonction de la latitude auxiliaire φ_0 choisie et des valeurs entières de la déclinaison D_0 et de la hauteur H_0 les plus voisines des valeurs réelles considérées, la table donne l'angle au pôle P_0 et l'azimut Z_0 de l'astre ainsi que leurs éléments de variation selon la déclinaison. On interpole ensuite ces deux valeurs en fonction des minutes de déclinaison en veillant au signe des variations ; on obtient l'angle au pôle P et l'azimut Z de l'astre dont la hauteur est H_0 ; de cet angle au pôle, on déduit une longitude auxiliaire G_0. Sur la carte, on porte le point auxiliaire de coordonnées φ_0 et G_0 par où passe le cercle de hauteur H_0 de l'astre. H_0 est donc la hauteur que l'on aurait calculée à partir du point auxiliaire. On porte à partir de ce point la direction de l'astre (ou son azimut), on calcule l'intercept $H_v - H_0$ que l'on reporte dans le sens convenable et on trace la droite de hauteur correspondante.

Extrait de la table HO203 :

LATITUDE 21°. DECLINATION CONTRARY NAME TO LATITUDE

TRUE ALTITUDE	15°				16°			
	Hour Angle h. m. s.	Diff. for 1' dec. s	Azimuth °	Diff. for 1' dec. °	Hour Angle h. m. s.	Diff. for 1' dec. s	Azimuth °	Diff. for 1' dec. s
…	…	…	…	…	…	…	…	…
24°	3 45 28	2,6	118,3	0,022	3 42 52	2,7	119,6	0,022
25°	3 40 35	2,7	119,0	0,022	3 37 55	2,8	120,3	0,022
26°	3 35 40	2,7	119,7	0,022	3 32 56	2,8	121,1	0,022
…	…	…	…	…	…	…	…	…

Exemple :

A l'aide des données figurant dans l'extrait de table ci-dessus, déterminer les coordonnées du point observé résultant de deux observations quasi simultanées d'étoiles dont les éléments figurent ci-après :

Point estimé	φ_e = 20° 38' S	G_e = 90° 10' E
α Taureau, ALDEBARAN (dans l'W du méridien)		
H_v = 25° 53,4'	AHap = 322° 50,0'	D = 16° 21,4' N
β Lion, DENEBOLA (dans l'E du méridien)		
H_v = 25° 09,7'	AHap = 214° 25,3'	D = 14° 59,4' N

Les calculs peuvent se résumer comme suit :

ALDEBARAN, pour φ_0 = 21° S, D_0 = 16° N (CONTRARY), H_0 = 26°			
Angle au pôle P_0 = Interpolation pour 21,4' =	3 h 32 m 56 s - 1 m 00 s	Azimut Z_0 = Interpolation pour 21,4' =	S121,1°W + 0,5°
Angle au pôle P = AHag = AHap =	W 3 h 31 m 56 s 52° 59,0' 322° 50,0'	Z = H_v = H_0 =	S121,6°W 25° 53,4' 26° 00,0'
G =	E 90° 09,0'	Intercept =	- 6,6'

DENEBOLA, pour φ_0 = 21° S, D_0 = 15° N (CONTRARY), H_0 = 25°			
Angle au pôle P_0 = Interpolation pour - 0,6' =	3 h 40 m 35 s + 2 s	Azimut Z_0 = Interpolation pour - 0,6' =	S119,0°E 0°
Angle au pôle P = AHag = AHap =	E 3 h 40 m 37 s 304° 50,8' 214° 25,3'	Z = H_v = H_0 =	S119,0°E 25° 09,7' 25° 00,0'
G =	E 90° 25,5'	Intercept =	+ 9,7'

La construction du point est représentée sur la figure A11-3 extraite des tables HO 203 :

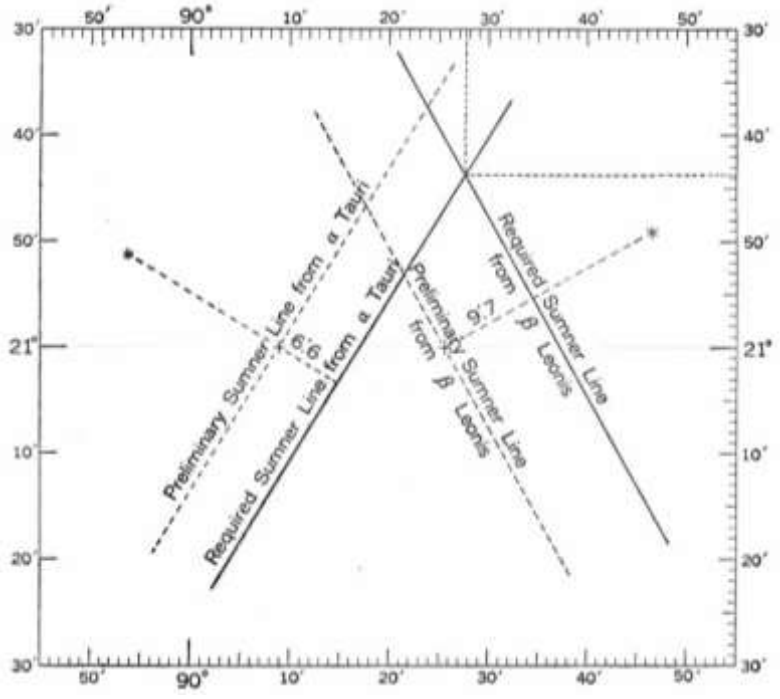


Fig : A11-3

Les coordonnées géographiques du point, arrondies à la minute, sont : φ = 20° 44' S, G = 90° 28' E

Nota : les droites représentées en tireté et repérées « Preliminary Sumner Line » passent par les points auxiliaires et sont caractéristiques des hauteurs argumentées H_0 ; leur tracé n'est pas utile.

ANNEXE 11-3

TABLES HO214

Le point auxiliaire et l'interpolation :

La table HO214 donne les valeurs des éléments de la droite de hauteur calculées à partir des coordonnées d'un point auxiliaire tel que la latitude et l'angle au pôle sont des nombres entiers de degrés. La déclinaison est prise au demi-degré entier le plus proche de la valeur considérée et il sera nécessaire de corriger la hauteur trouvée de l'effet du « résidu » de déclinaison, c'est-à-dire de la différence entre l'argument d'entrée choisi et la valeur réelle de déclinaison ; cette différence, ou résidu, ne saurait excéder 15'. Si, de plus, on souhaite ramener l'observation au méridien estimé ou au point estimé, il convient d'évaluer un ou deux termes correctifs supplémentaires résultant d'une variation d'angle au pôle (variation de longitude) et d'une variation de latitude.

D'une façon générale, la hauteur H est donnée par la formule :

$$\sin H = \sin \varphi \,.\, \sin D + \cos \varphi \,.\, \cos D \,.\, \cos P$$

Expression dans laquelle on note φ la latitude, D, la déclinaison et P l'angle au pôle de l'astre. La différentiation de cette expression donne, tous calculs faits et en admettant que les variations sont petites :

$$\Delta H = \cos A \,.\, \Delta D - \cos \varphi \,.\, \sin Z \,.\, \Delta P + \cos Z \,.\, \Delta \varphi = \Delta H_1 + \Delta H_2 + \Delta H_3$$

Cette expression, dans laquelle A et Z représentent respectivement l'angle à l'astre et l'azimut, donne la variation de la hauteur ΔH consécutive à une variation de déclinaison ΔD, une variation de l'angle au pôle ΔP et une variation de latitude Δφ. Toutes les variations sont ici exprimées en minutes et dixièmes.

Le premier terme $\Delta H_1 = \cos A \,.\, \Delta D$ représente la variation de hauteur consécutive à la variation de déclinaison ΔD. Dans l'utilisation de la table HO214, ΔD est le résidu de déclinaison défini plus haut ; cos A est donné dans la table pour chaque valeur des arguments sous le nom de Δd (voir extrait de la table reconstitué pour traiter l'exemple ci-après) ; on peut écrire que cette quantité correspond à la variation de hauteur résultant d'une variation de déclinaison de 1'. La prise en compte de cette première correction ΔH_1 est obligatoire, quel que soit le point de calcul. Si on désire ramener la hauteur au méridien estimé (le point à partir duquel on construira la droite sera alors situé à l'intersection du parallèle auxiliaire et du méridien estimé), on tiendra compte du second terme correctif $\Delta H_2 = -\cos \varphi \,.\, \sin Z \,.\, \Delta P$ qui représente la variation de hauteur consécutive à une variation d'angle au pôle ΔP. Dans l'utilisation de la table HO214, ΔP est la différence entre les angles au pôle estimé et auxiliaire ; le coefficient $\cos \varphi \,.\, \sin Z$ est de même donné dans la table pour chaque valeur d'argument sous le nom de Δt (voir extraits de table reconstitués ci-après) qui représente la variation de hauteur consécutive à une variation d'angle au pôle de 1'. Enfin, si on désire ramener la hauteur au point estimé, on tiendra compte des trois termes correctifs dont le troisième, $\Delta H_3 = \cos Z \,.\, \Delta \varphi$, représente la variation de hauteur consécutive à une variation de latitude Δφ. Cette variation est la différence entre latitudes estimée et auxiliaire. La valeur absolue de ΔH_3 est donnée dans une table particulière placée en fin de chaque volume en fonction de l'azimut Z et de la valeur de Δφ. A l'aide des éléments fournis par la table HO214, les deux premiers termes correctifs sont évalués en valeur absolue. Leurs signes se déduisent ensuite de l'examen des sens de variation de la hauteur selon les sens de variations de la déclinaison puis de l'angle au pôle. La règle de signe relative à la correction de latitude est plus délicate et est énoncée ainsi en bas de table :

- azimut > 90° : si la latitude estimée est supérieure à la latitude auxiliaire, ΔH_3 est négatif ; si la latitude estimée est inférieure à la latitude auxiliaire, ΔH_3 est positif ;
- azimut < 90° : la règle est inversée.

Nota : le triangle de position étant toujours construit à partir du pôle élevé de l'observateur, les latitudes considérées sont toujours positives ; l'azimut dont il s'agit est l'angle au zénith A_z compté à partir du pôle élevé de 0° à 180° vers l'E ou l'W.

Les concepteurs de la table précisent qu'il n'est pas nécessaire en pratique d'interpoler l'azimut. Pour tracer la droite de hauteur, on arrondira la valeur trouvée au demi-degré entier le plus proche.

Exemple :

Les données de calcul sont les suivantes :

Estime		Coordonnées horaires		Observation	
φ_e	44° 15,0' S	AHap	37° 24,8'	H_v	26° 12,0'
G_e	31° 43,0' E	D	16° 32,6' S		Soleil
$AHag_e = 69°\ 07{,}8'\ W = P_e$					

Latitude auxiliaire : $\varphi_a = 44°$ S

Angle au pôle auxiliaire : $P_a = 69°$ W, longitude auxiliaire : $G_a = 31°\ 35{,}2'$ E

Déclinaison auxiliaire : $D_a = 16°\ 30'$ S, résidu : 2,6'.

La table donne pour une latitude de 44°, dans le tableau « Declination **SAME** name as Latitude » :

H.A.	16° 00'			16° 30'			17° 00'		
	Alt.	Az.		Alt.	Az.		Alt.	Az.	
°	° '	Δd	Δt °	° '	Δd	Δt °	° '	Δd	Δt °
68	26 46.6	66	72 93.3	27 06.5	66	72 92.9	27 26.3	66	72 92.5
69	26 03.5	66	72 92.6	26 23.4	66	72 92.2	26 43.2	66	72 91.8
70	25 20.3	66	72 91.9	25 40.2	66	72 91.5	26 00.0	66	72 91.1

La lecture de la table donne immédiatement : H = 26° 23,4' et Z = S92,2°W = 272,2°.

Il convient de corriger la hauteur du résidu de déclinaison de 2,6'. La variation de hauteur Δd relevée dans la table pour une variation de 1' de déclinaison est de 66, ce qu'il faut lire 0,66'. On remarque également que la hauteur augmente lorsque D augmente en valeur absolue (à angle horaire constant). La correction est donc positive et est égale à : 0,66.2,6 = + 1,7'.

La hauteur calculée est $H_c = 26°\ 23{,}4' + 1{,}7' = 26°\ 25{,}1'$. L'intercept est de – 13,1' et le point déterminatif se situe donc à 13,1' du point auxiliaire, dans la direction opposée à celle de l'astre.

Si on souhaite ramener cette hauteur au méridien estimé, il faut calculer la correction résultant de l'écart en angle au pôle : on a $\Delta P = 7{,}8'$ et $\Delta t = 72$ (table ci-dessus), soit $\Delta H_2 = -\ 5{,}6'$. La hauteur calculée devient : $H'_c = 26°\ 25{,}1' - 5{,}6' = 26°\ 19{,}5'$; l'intercept est alors de – 7,5'.

Si on souhaite enfin ramener la hauteur au point estimée, on applique pour terminer la correction résultant de la variation de latitude : on a $\Delta\varphi = 15{,}0'$ soit $\Delta H_3 = \Delta\varphi.\cos Z = -\ 0{,}6'$ (table spéciale).

La hauteur estimée est donc : $H_e = 26°\ 19{,}5' - 0{,}6' = 26°\ 18{,}9'$; l'intercept, par rapport au point estimé, est de - 6,9'. Ce dernier résultat est confirmé exactement par un calcul direct.

A noter que la réduction de la hauteur au point estimé par le calcul fait perdre tout le bénéfice de l'usage du point auxiliaire qui conduit à la construction rapide du lieu de position. L'intercept par rapport au point estimé peut être lu directement sur le canevas.

ANNEXE 11-4

PUBLICATION 229

Disposition des tables :

La table donne l'ensemble des résultats de calculs effectués pour toutes les valeurs entières possibles d'angle horaire local, de latitude et de déclinaison, quel que soit leurs noms respectifs.

Considérons, dans un lieu de latitude φ donnée, un astre d'angle au pôle P fixé ; les configurations possibles, représentées en figure A11-4, sont les suivantes :

- lorsque la déclinaison est de même nom que la latitude, l'astre est, par exemple, en A_1 et les éléments sont à rechercher sur la page de gauche libellée « latitude same name as declination » ; les deux valeurs d'angle horaire local correspondant (P et 360° - P) sont indiquées en haut et en bas de page ;
- la déclinaison s'annule et change de signe en K et le haut de la page de droite donne les éléments calculés lorsque l'astre est compris entre les points K et L situé sur l'horizon HH' du lieu (hauteur nulle) ; cette partie supérieure de la page de droite est libellée « latitude contrary name to declination » ; les valeurs considérées d'angle horaire local figurent en haut de page ;
- enfin, lorsque l'astre est en A_2, au-dessous de l'horizon du lieu de zénith Z, sa hauteur est négative ; si on prend maintenant P' comme pôle élevé, l'angle au pôle considéré est supérieur à 90°, supplémentaire au précédent et, naturellement, latitude et déclinaison sont de même nom ; la hauteur est positive et les éléments calculés sont donnés dans la partie inférieure de la page de droite, les deux valeurs d'angle horaire local étant indiquées en bas de page accompagnées de l'inscription « latitude same name as declination » ;
- la « Contrary/Same Line » sépare les deux parties de la page de droite.

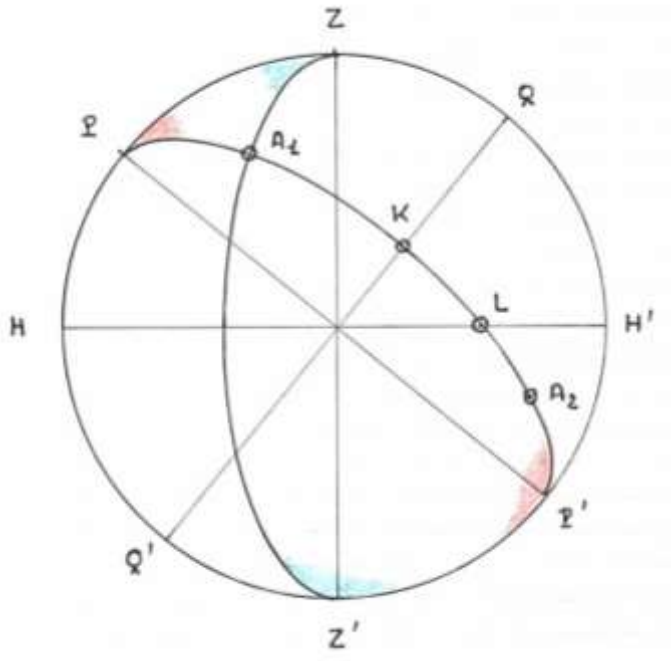


Fig : A11-4

En définitive, la table est disposée de la façon suivante :

Page de gauche (volume 4) :

30°, 330° LHA			**LATITUDE SAME NAME AS DECLINATION**		
	45°	**…**	**49°**	**…**	**52°**
Dec. °	H_c d Z ° ′ ′ °		H_c d Z ° ′ ′ °		H_c d Z ° ′ ′ °
0	37 45.7 +53.6 140.8		34 37.3 +55.0 142.6		32 13.2 +55.9 143.8
…	…		…		…
37	66 09.0 +28.2 099.0		65 13.4 +36.7 107.7		64 09.9 +41.9 113.6
38	66 37.2 *+26.3*● 096.8	…	65 50.1 +35.1 105.8	…	64 51.8 +40.8 111.9
39	67 03.5 *+24.2*● 094.5		66 25.2 +33.5 103.7		65 32.6 +39.4 110.2
40	67 27.7 *+22.1*● 092.2		66 58.7 +31.8 101.7		66 12.0 +38.1 108.3
…	…		…		…
90	45 00.0 -52.1 000.0		49 00.0 -52.1 000.0		52 00.0 -52.1 000.0
	45°	**…**	**49°**	**…**	**52°**
30°, 330° LHA			**LATITUDE SAME NAME AS DECLINATION**		

Page correspondante de droite :

			LATITUDE CONTRARY NAME TO DECLINATION		**LHA 30°, 330°**
	45°	**…**	**49°**	**…**	**52°**
Dec. °	H_c d Z ° ′ ′ °		H_c d Z ° ′ ′ °		H_c d Z ° ′ ′ °
0	37 45.7 -53.8 140.8		34 37.3 -55.0 142.6		32 13.2 -55.9 143.8
…	…		…		…
34	06 26.8 -56.1 155.3		02 48.5 -56.7 155.5		00 04.7 -57.1 155.5
35	05 30.7 -56.1 155.7		01 51.8 -56.6 155.8		00 52.4 +57.0 024.2
36	04 34.6 -56.1 156.1		00 55.2 -56.7 156.1		01 49.4 +57.1 023.9
37	03 38.5 -56.1 156.4	…	00 01.5 +56.7 023.5	…	02 46.5 +57.1 023.6
38	02 42.4 -56.1 156.8		00 58.2 +56.7 023.2		03 43.6 +57.1 023.3
39	01 46.3 -56.2 157.1		01 54.9 +56.6 022.9		04 40.7 +57.0 022.9
40	00 50.1 -56.1 157.5		02 51.5 +56.7 022.6		05 37.7 +57.1 022.6
41	00 06.0 +56.1 022.2		03 48.2 +56.7 022.2		06 34.8 +57.0 022.3
…	…		…		…
90	45 00.0 +51.8 000.0		49 00.0 +51.8 000.0		52 00.0 +51.8 000.0
	45°	**…**	**49°**	**…**	**52°**
			LATITUDE SAME NAME AS DECLINATION		**LHA 150°, 210°**

Sur cet extrait, la « Contrary/Same Line » passe entre 40 et 41 degrés de déclinaison pour une latitude de 45° et « monte » d'une colonne à l'autre au fur et à mesure que la latitude augmente.

Les règles de détermination de l'azimut sont rappelées à chaque page de la façon suivante :

Latitude	LHA	Zn
Nord	LHA > 180°	$Z_n = Z$
	LHA < 180°	$Z_n = 360° - Z$
Sud	LHA > 180°	$Z_n = 180° - Z$
	LHA < 180°	$Z_n = 180° + Z$

Z_n désigne l'azimut compté de 0° à 360° à partir du N alors que Z, fourni par la table, est calculé de 0° à 180° à partir du pôle élevé.

Interpolation de la hauteur en fonction de la déclinaison :

La table HO229 donne une valeur de hauteur calculée pour des valeurs entières des arguments d'entrée, notamment la déclinaison. Recherchant les éléments de la droite de hauteur à partir du point auxiliaire, il convient de corriger la hauteur lue dans la table du résidu de la déclinaison, c'est-à-dire du nombre de minutes et dixièmes qui caractérise la valeur considérée ; on note $mm._m$ ce nombre.

Pour un triplet d'arguments (angle horaire, latitude et déclinaison), la table HO229 donne directement la variation de hauteur, notée d, résultant d'une augmentation de la valeur absolue de la déclinaison de 1° ; d est algébrique et permet d'effectuer facilement l'interpolation linéaire à l'aide d'une table qui donne le résultat de l'opération $d.mm._m/60$ (un extrait de cette table est reproduit ci-après). Dans la très large majorité des cas, une variation linéaire de la hauteur en fonction de la déclinaison peut être admise au regard de la précision cherchée et l'interpolation linéaire est alors légitime ; l'erreur maximale à craindre est alors inférieure à 0,25'. Cependant, au voisinage des points où la hauteur, en fonction de la déclinaison, passe par un maximum, la quantité d varie rapidement (d'autant plus rapidement que la hauteur est grande) et change de signe. On ne peut plus alors considérer la variation de hauteur comme linéaire et il sera nécessaire de tenir compte des différences secondes pour évaluer un terme correctif du 2e ordre. Le recours aux différences secondes est clairement indiqué dans la table HO229 : les valeurs correspondantes de d sont alors imprimées en italiques suivies d'un point. Le terme correctif du 2e ordre est mis en table en fonction de la double différence seconde (DSD) et du résidu de déclinaison. Dans le document HO229, la table des corrections du second ordre est accolée à la table d'interpolation linéaire (voir l'extrait représenté dans l'exemple ci-après).

Exemple :

Les données de calcul sont les suivantes :

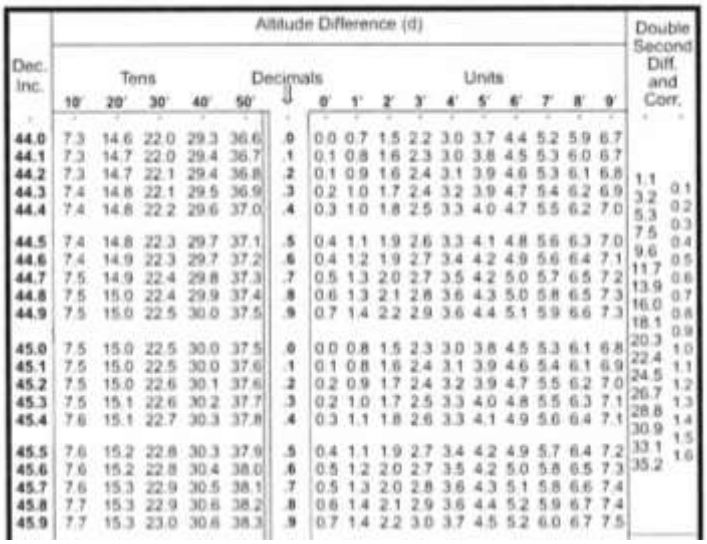
Estime		Coordonnées horaires		Observation	
φ_e	45° 10,0' N	AHap	000° 03,4'	H_v	66° 48,7'
G_e	30° 15,0' W	D	38° 45,2' N		Véga
$AHag_e$ = 329° 48,4'					

On adopte une latitude auxiliaire φ_a = 45° N et un angle horaire auxiliaire de 330° ; la longitude auxiliaire est donc G_a = 30° 03,4' W. On relève, dans l'extrait de table représenté ci-dessus (Latitude SAME name as declination) pour un angle horaire de 330°, une latitude de 45° et une déclinaison de 38° :

H = 66° 37,2' d = *+26,3'*● Z = 96,8°

Le taux de variation de déclinaison étant écrit en italique, il convient d'appliquer la correction du second ordre.

La double différence seconde est ici égale à d(39°) – d(37°), soit 24,2' – 28,2' = - 4,0'. On a reproduit ci-dessous un extrait de la table d'interpolation figurant dans le document HO229 nécessaire à l'évaluation de la variation linéaire de hauteur ΔH ainsi qu'à son terme correctif du second ordre.



Dec. Inc.	Altitude Difference (d)																Double Second Diff. and Corr.
	Tens					Decimals	Units										
	10'	20'	30'	40'	50'		0'	1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'	
44.0	7.3	14.6	22.0	29.3	36.6	.0	0.0	0.7	1.5	2.2	3.0	3.7	4.4	5.2	5.9	6.7	1.1 0.1
44.1	7.3	14.7	22.0	29.4	36.7	.1	0.1	0.8	1.6	2.3	3.0	3.8	4.5	5.3	6.0	6.7	3.2 0.2
44.2	7.3	14.7	22.1	29.4	36.8	.2	0.1	0.9	1.6	2.4	3.1	3.9	4.6	5.3	6.1	6.8	5.3 0.3
44.3	7.4	14.8	22.1	29.5	36.9	.3	0.2	1.0	1.7	2.4	3.2	3.9	4.7	5.4	6.2	6.9	7.5 0.4
44.4	7.4	14.8	22.2	29.6	37.0	.4	0.3	1.0	1.8	2.5	3.3	4.0	4.7	5.5	6.2	7.0	9.6 0.5
44.5	7.4	14.8	22.3	29.7	37.1	.5	0.4	1.1	1.9	2.6	3.3	4.1	4.8	5.6	6.3	7.0	11.7 0.6
44.6	7.4	14.9	22.3	29.7	37.2	.6	0.4	1.2	1.9	2.7	3.4	4.2	4.9	5.6	6.4	7.1	13.9 0.7
44.7	7.5	14.9	22.4	29.8	37.3	.7	0.5	1.3	2.0	2.7	3.5	4.2	5.0	5.7	6.5	7.2	16.0 0.8
44.8	7.5	15.0	22.4	29.9	37.4	.8	0.6	1.3	2.1	2.8	3.6	4.3	5.0	5.8	6.5	7.3	18.1 0.9
44.9	7.5	15.0	22.5	30.0	37.5	.9	0.7	1.4	2.2	2.9	3.6	4.4	5.1	5.9	6.6	7.3	20.3 1.0
45.0	7.5	15.0	22.5	30.0	37.5	.0	0.0	0.8	1.5	2.3	3.0	3.8	4.5	5.3	6.1	6.8	22.4 1.1
45.1	7.5	15.0	22.5	30.0	37.6	.1	0.1	0.8	1.6	2.4	3.1	3.9	4.6	5.4	6.1	6.9	24.5 1.2
45.2	7.5	15.0	22.6	30.1	37.6	.2	0.2	0.9	1.7	2.4	3.2	3.9	4.7	5.5	6.2	7.0	26.7 1.3
45.3	7.5	15.1	22.6	30.2	37.7	.3	0.2	1.0	1.7	2.5	3.3	4.0	4.8	5.5	6.3	7.1	28.8 1.4
45.4	7.6	15.1	22.7	30.3	37.8	.4	0.3	1.1	1.8	2.6	3.3	4.1	4.9	5.6	6.4	7.1	30.9 1.5
45.5	7.6	15.2	22.8	30.3	37.9	.5	0.4	1.1	1.9	2.7	3.4	4.2	4.9	5.7	6.4	7.2	33.1 1.6
45.6	7.6	15.2	22.8	30.4	38.0	.6	0.5	1.2	2.0	2.7	3.5	4.2	5.0	5.8	6.5	7.3	35.2
45.7	7.6	15.3	22.9	30.5	38.1	.7	0.5	1.3	2.0	2.8	3.6	4.3	5.1	5.8	6.6	7.4	
45.8	7.7	15.3	22.9	30.6	38.2	.8	0.6	1.4	2.1	2.9	3.6	4.4	5.2	5.9	6.7	7.4	
45.9	7.7	15.3	23.0	30.6	38.3	.9	0.7	1.4	2.2	3.0	3.7	4.5	5.2	6.0	6.7	7.5	

Evaluation de ΔH : l'entrée se fait à gauche avec le nombre de minutes et dixièmes de la déclinaison, soit 45,2' ; l'évaluation se fait en deux temps, en premier lieu avec les dizaines de d (20), puis en second lieu avec les unités et décimales (6,3), en restant dans la zone de la table qui fait face à l'entrée de 45,2' ; on obtient ici ΔH = 15,0 + 4,8 = 19,8'.

Evaluation de la correction du 2e ordre : la correction est donnée sur la partie droite du tableau ; on lit une correction de 0,2' pour une double différence seconde comprise entre 3,2' et 5,3' ; on notera que cette petite table est une « critical table », les valeurs d'arguments étant exprimées à chaque fois que la fonction augmente (ou diminue) de 0,1' ronde. Cette dernière correction est toujours positive.

En définitive, la hauteur calculée est H_c = 66° 37,2' + 19,8' + 0,2' = 66° 57,2' et l'intercept de – 8,5' à partir du point auxiliaire ; l'azimut est N (pôle élevé) et E (AHag > 180°). On remarque que, dans ce cas, ce dernier varie dans une large mesure avec la déclinaison et que l'interpolation à vue est nécessaire ; on adoptera donc Z = 095°.

Cas limites et précision des tables :

Le souci du respect du niveau de précision fixé a conduit les concepteurs de la publication HO229 à expliciter et fournir les éléments de calcul relatifs aux points suivants :

- écarts entre droite et courbe de hauteur en fonction de la hauteur et de la distance au point déterminatif,
- interpolations pour la réduction au point estimé et méthode à suivre sous les hautes latitudes,
- cas particulier de l'interpolation de la hauteur au voisinage de la « Contrary/Same Line » dans le cas de l'observation d'un astre au voisinage de l'horizon,
- cas particulier du traitement des hauteurs supérieures à 86°.

Leur étude, qui impliquerait des développements trop longs, ne sera pas envisagée ici, renvoyant le lecteur intéressé aux instructions du document en libre accès sur divers sites Internet dont celui de la National Geospatial Intelligence Agency/Marine Safety Information.

Les éléments calculés figurant dans la table HO229 peuvent être entachés d'une erreur maximale de 0,05' pour la hauteur et 0,05° pour l'azimut. L'erreur maximale résultant de l'usage de la table d'interpolation est de 0,14' pour la correction d'interpolation linéaire et de 0,12' pour celle du second ordre.

ANNEXE 11-5

PUBLICATION 249

VOLUME I

Conception et disposition de la table :

La table est calculée pour une année donnée dont le millésime est multiple de 5 ; elle contient les éléments de correction qui permettent son utilisation sur un intervalle de 9 ans. L'édition consultée a été calculée à partir de la position moyenne du point vernal en 2010 et est utilisable entre 2006 et 2014 inclusivement.

Cette table donne, pour toutes valeurs entières de l'angle horaire sidéral local, de 0° à 360°, et pour toutes valeurs entières de latitude comprises entre 69° S et 69° N, les coordonnées horizontales calculées (H_c et Z) de 7 étoiles sélectionnées pour leur éclat et leur répartition azimutale. L'ensemble des éléments figure, pour chaque valeur de latitude, sur une double page dont un extrait figure ci-dessous. Lorsque la latitude est comprise entre 70° et 89°, l'intervalle d'argumentation de l'angle horaire sidéral local est de 2° et les éléments figurent alors sur une simple page.

Au total, 41 étoiles ont été sélectionnées parmi lesquelles 19 sont de première grandeur (magnitude inférieure à 1,5) et 17 sont de deuxième grandeur. Les noms des étoiles de première grandeur sont imprimés en majuscule dans les tableaux ; pour chaque sélection de 7 étoiles, trois sont marquées d'un diamant (♦) indiquant que ces trois étoiles sont convenablement réparties sur l'horizon pour une bonne détermination géométrique du point..

LAT 48°N

LHA ♈	♦ Mirfak Hc	Zn	Alpheratz Hc	Zn	♦ ALTAIR Hc	Zn	Rasalhague Hc	Zn	♦ ARCTURUS Hc	Zn	Alkaid Hc	Zn	Kochab Hc	Zn
270	13 26	024	19 50	068	44 24	140	54 11	190	36 41	257	49 34	296	57 01	338
271	13 42	025	20 27	069	44 49	141	54 03	192	36 01	258	48 58	297	56 47	338
272	14 00	026	21 05	069	45 14	142	53 54	194	35 22	259	48 23	297	56 32	338
273	14 17	026	21 42	070	45 38	144	53 44	195	34 43	260	47 47	297	56 16	338
274	14 35	027	22 20	071	46 02	145	53 33	197	34 03	261	47 11	298	56 01	338
275	14 54	027	22 58	071	46 24	146	53 21	198	33 23	262	46 36	298	55 46	337
276	15 12	028	23 36	072	46 46	148	53 08	200	32 44	262	46 01	299	55 30	337
277	15 31	029	24 14	073	47 07	149	52 54	202	32 04	263	45 25	299	55 15	337
278	15 51	029	24 53	073	47 28	150	52 38	203	31 24	264	44 50	300	54 59	337
279	16 10	030	25 31	074	47 47	152	52 22	205	30 44	265	44 16	300	54 43	337
280	16 30	030	26 10	075	48 06	153	52 05	206	30 04	266	43 41	300	54 27	337
281	16 51	031	26 49	075	48 24	155	51 47	208	29 24	266	43 06	301	54 11	337
282	17 12	031	27 28	076	48 40	156	51 28	209	28 44	267	42 32	301	53 55	336
283	17 33	032	28 07	077	48 56	157	51 07	211	28 04	268	41 58	302	53 39	336
284	17 54	033	28 46	077	49 11	159	50 47	212	27 23	269	41 23	302	53 23	336
	♦ Mirfak		Alpheratz		♦ ALTAIR		Rasalhague		♦ ARCTURUS		Alkaid		Kochab	
285	18 16	033	29 25	078	49 25	160	50 25	214	26 43	269	40 50	302	53 07	336
286	18 38	034	30 04	079	49 38	162	50 02	215	26 03	270	40 16	303	52 51	336
287	19 01	034	30 44	079	49 50	163	49 39	216	25 23	271	39 42	303	52 34	336
288	19 23	035	31 23	080	50 01	165	49 15	218	24 43	272	39 09	304	52 18	336
289	19 47	035	32 03	081	50 11	166	48 50	219	24 03	272	38 35	304	52 02	336
290	20 10	036	32 42	081	50 20	168	48 24	220	23 23	273	38 02	305	51 45	336
291	20 34	036	33 22	082	50 28	169	47 58	222	22 43	274	37 29	305	51 29	336
292	20 58	037	34 02	083	50 35	171	47 31	223	22 03	275	36 57	306	51 12	336
293	21 22	038	34 42	083	50 41	172	47 03	224	21 23	275	36 24	306	50 56	336
294	21 47	038	35 22	084	50 46	174	46 35	225	20 43	276	35 52	306	50 40	336
295	22 11	039	36 02	085	50 49	176	46 06	227	20 03	277	35 19	307	50 23	336
296	22 37	039	36 42	085	50 52	177	45 36	228	19 23	277	34 47	307	50 07	336
297	23 02	040	37 22	086	50 53	179	45 06	229	18 43	278	34 16	308	49 50	336
298	23 28	040	38 02	087	50 54	180	44 35	230	18 03	279	33 44	308	49 34	336
299	23 54	041	38 42	088	50 53	182	44 04	231	17 24	280	33 13	309	49 18	336

La table comprend ensuite :

1) des tableaux de correction de la hauteur en fonction du déplacement de l'observateur et du déplacement apparent de l'astre :
2) un tableau de conversion des unités d'arc en unités de temps,
3) un tableau permettant le calcul approché de l'angle horaire sidéral à Greenwich (AHsp ou GHAγ) en fonction de la date et de l'heure UT pour la durée de validité de la table,
4) un tableau relatif à l'observation de l'étoile Polaire,
5) les éléments de calcul de la réfraction astronomique et de la correction de la force de Coriolis (sextant à bulle),
6) un tableau donnant les coordonnées équatoriales des étoiles pour l'année de calcul de la table,
7) des tableaux de correction des effets de la précession et de la nutation pour la durée de validité de la table[81].

Les éléments 1) et 5) sont essentiellement conçus pour la navigation aérienne ; les éléments 2), 3), 4) et 6) font double emploi avec ceux figurant dans les Éphémérides nautiques ou le Nautical Almanac mais permettent, le cas échéant, de se dispenser de leur usage. L'élément 7 permet de tenir compte de la précession des équinoxes et de la nutation qui entraînent une variation des coordonnées équatoriales des étoiles sélectionnées. La correction est globale, en fonction de la date, de la latitude et de l'angle horaire sidéral local et se présente sous la forme d'un vecteur de déplacement du point (ou de la droite de hauteur) ; les tableaux donne la distance et la direction dans laquelle il convient d'effectuer ce déplacement (voir l'extrait reproduit ci-après).

Il est nécessaire de disposer d'un tableau de correction des hauteurs d'étoiles prises à l'horizon de la mer (type table VIII des Éphémérides Nautiques).

Utilisation et exemple :

Le volume I de la table HO249 sert simultanément à la préparation du point d'étoiles, au crépuscule ou à l'aube, et au calcul des éléments des différentes droites de hauteur d'où l'on extraira le point. La procédure de calcul et l'ensemble des opérations sont décrites dans l'exemple suivant.

Le 25 octobre 2013, pour 17 h 30 de l'heure du bord (fuseau +3), le navire aura pour position estimée :

$$\varphi_e = 48° 15' \text{ N}, G_e = 45° 10' \text{ W}$$

Il fait route au 240° sur le fond à la vitesse de 18 nœuds ; l'élévation de l'œil est de 20 m.

Pour ce jour, les Éphémérides nautiques permettent de calculer l'heure de fin du crépuscule civil qui est à 20 h 24 m UT. A ce moment, les étoiles les plus brillantes et la ligne d'horizon seront simultanément visibles ; dans les minutes qui suivront, on apercevra dans la lunette du sextant des étoiles moins brillantes et, simultanément, la ligne d'horizon deviendra de plus en plus floue.

Pour l'instant déterminé de la fin du crépuscule, on calcule, toujours avec les Éphémérides, l'angle horaire sidéral local approché qui est de 295° ; avec la donnée arrondie de la latitude de 48° N, l'extrait ci-dessus de la table HO249 donne l'ensemble des étoiles sélectionnées observables et on relève que Mirfak, Altaïr et Arcturus, marquées d'un ♦, donneront trois droites d'un bon recoupement.

Au voisinage de l'instant calculé de fin du crépuscule, on se prépare à l'observation de la première étoile en calant l'alidade du sextant à la hauteur tabulée H_c et en recherchant l'étoile dans la direction de son azimut. On s'attachera à commencer les observations par les étoiles les plus brillantes dans un secteur autre que celui de l'azimut du coucher du Soleil (on fera l'inverse à l'aube).

[81] Soit 2006-2014 pour l'édition consultée. En 2012 est parue l'édition relative à l' « époque 2015 », valide de 2011 à 2019.

Les éléments relevés et de calcul figurent dans le tableau ci-dessous :

		ARCTURUS	**ALTAIR**	**MIRFAK**	**KOCHAB**
1	UT =	20 h 24 m 05 s	20 h 26 m 47 s	20 h 29 m 32 s	20 h 32 m 55 s
2	H_o =	20° 08’	50° 53’	23° 04’	50° 00’
3	AHso =	334° 22,1’	334° 22,1’	334° 22,1’	334° 22,1’
	+ ΔAH =	6° 02,2’	6° 42,8’	7° 24,2’	8° 15,1’
4	AHsp =	340° 24,3’	341° 04,9’	341° 46,3’	342° 37,2’
	- G_a =	- 45° 24,3’	- 45° 04,9’	- 44° 46,3’	- 45° 37,2’
5	LHAγ = AHsg =	295° 00,0’	296° 00,0’	297° 00,0’	297° 00,0’
6	H_c =	**20° 03’**	**50° 52’**	**23° 02’**	**49° 50’**
	Z_n =	**277°**	**177°**	**040°**	**336°**

L’heure UT des observations et la hauteur observée correspondante sont indiquées en ligne 1 et 2 (on suppose dans cet exemple que l’erreur instrumentale du sextant est nulle). La ligne 3 est relative au calcul de l’angle horaire sidéral à Greenwich à l’aide des Éphémérides. En ligne 4 figure la longitude auxiliaire G_a propre à chaque observation ; l’angle horaire sidéral local apparaît en ligne 5. Il constitue l’argument d’entrée en ligne dans la table ouverte à la page 48° N, latitude auxiliaire. En ligne 6 figurent les éléments lus dans la table pour chaque étoile observée.

Calcul des intercepts :

H_o =	20° 08’	50° 53’	23° 04’	50° 00’
- C =	-11’	- 9’	- 10’	- 9’
H_v =	19° 57’	50° 44’	22° 54’	49° 51’
- H_c =	20° 03’	50° 52’	23° 02’	49° 50’
Intercept =	- 6’	- 8’	- 8’	+ 1’

La correction C est extraite de la table VIII des Éphémérides et arrondie à la minute la plus proche.

Les observations ne sont pas simultanées et doivent être transportées pour 17 h 30 bord, soit 20 h 30 UT. Les éléments de transports sont indiqués dans le tableau ci-dessous :

	ARCTURUS	ALTAIR	MIRFAK	KOCHAB
Intervalle de temps	6 min	3 min	0	- 3 min
Distance	1,8 mille	0,9 mille	0	- 0,9 mille
Route	240°	240°	240°	240°

La construction du point est représentée en figure A11-5. On y remarque les quatre points auxiliaires sur le parallèle de latitude 48° N ainsi que les vecteurs de transport correspondants.

Le point est tout d’abord fixé à l’intersection moyenne des quatre droites de hauteur. Les observations étant datées de 2013, il convient d’effectuer la correction de précession dont les éléments, fonction de la latitude et de l’angle horaire sidéral local, figurent sur l’extrait de table reproduit en page suivante ; le point obtenu doit être déplacé d’environ 1,4 mille dans le 060°.

CORRECTION FOR PRECESSION AND NUTATION

LHA ♈	North latitudes							South latitudes						LHA ♈
	N 80°	N 70°	N 60°	N 50°	N 40°	N 20°	0°	S 20°	S 40°	S 50°	S 60°	S 70°	S 80°	
						2013								
0	1.4 026	1.7 041	2.0 051	2.3 057	2.6 061	3.0 066	3.1 067	2.9 065	2.5 060	2.2 055	1.8 047	1.5 035	1.3 017	0
30	1.5 050	2.0 059	2.3 064	2.6 067	2.9 069	3.1 071	3.1 070	2.7 067	2.0 060	1.7 052	1.3 038	1.1 016	1.0 348	30
60	1.7 072	2.1 076	2.5 078	2.8 079	3.0 080	3.1 080	2.9 080	2.4 077	1.6 070	1.1 062	0.7 041	0.5 350	0.8 310	60
90	1.7 094	2.2 093	2.5 093	2.8 092	3.0 092	3.1 092	2.9 092	2.3 093	1.4 095	0.9 098	0.4 109	0.2 238	0.7 261	90
120	1.7 116	2.1 111	2.4 107	2.7 105	3.0 104	3.1 103	3.0 104	2.5 107	1.7 115	1.3 124	0.9 143	0.7 178	0.9 215	120
150	1.5 138	1.9 128	2.2 121	2.5 117	2.8 114	3.1 112	3.1 112	2.8 114	2.2 121	1.8 128	1.5 139	1.2 157	1.1 181	150
180	1.3 163	1.5 145	1.8 133	2.2 125	2.5 120	2.9 115	3.1 113	3.0 114	2.6 119	2.3 123	2.0 129	1.7 139	1.4 154	180
210	1.0 192	1.1 164	1.3 142	1.7 128	2.0 120	2.7 113	3.1 110	3.1 109	2.9 111	2.6 113	2.3 116	2.0 121	1.6 130	210
240	0.8 230	0.5 190	0.7 139	1.1 118	1.6 110	2.4 103	2.9 100	3.1 100	3.0 100	2.8 101	2.5 102	2.1 104	1.7 108	240
270	0.7 279	0.2 302	0.4 071	0.9 082	1.4 085	2.3 087	2.9 088	3.1 088	3.0 088	2.8 088	2.5 087	2.2 087	1.7 086	270
300	0.9 325	0.7 002	0.9 037	1.3 056	1.7 065	2.5 073	3.0 076	3.1 077	3.0 076	2.7 075	2.4 073	2.1 069	1.7 064	300
330	1.1 359	1.2 023	1.5 041	1.8 052	2.2 059	2.8 066	3.1 068	3.1 068	2.8 066	2.5 063	2.2 059	1.9 052	1.5 042	330
360	1.4 026	1.7 041	2.0 051	2.3 057	2.6 061	3.0 066	3.1 067	2.9 065	2.5 060	2.2 055	1.8 047	1.5 035	1.3 017	360

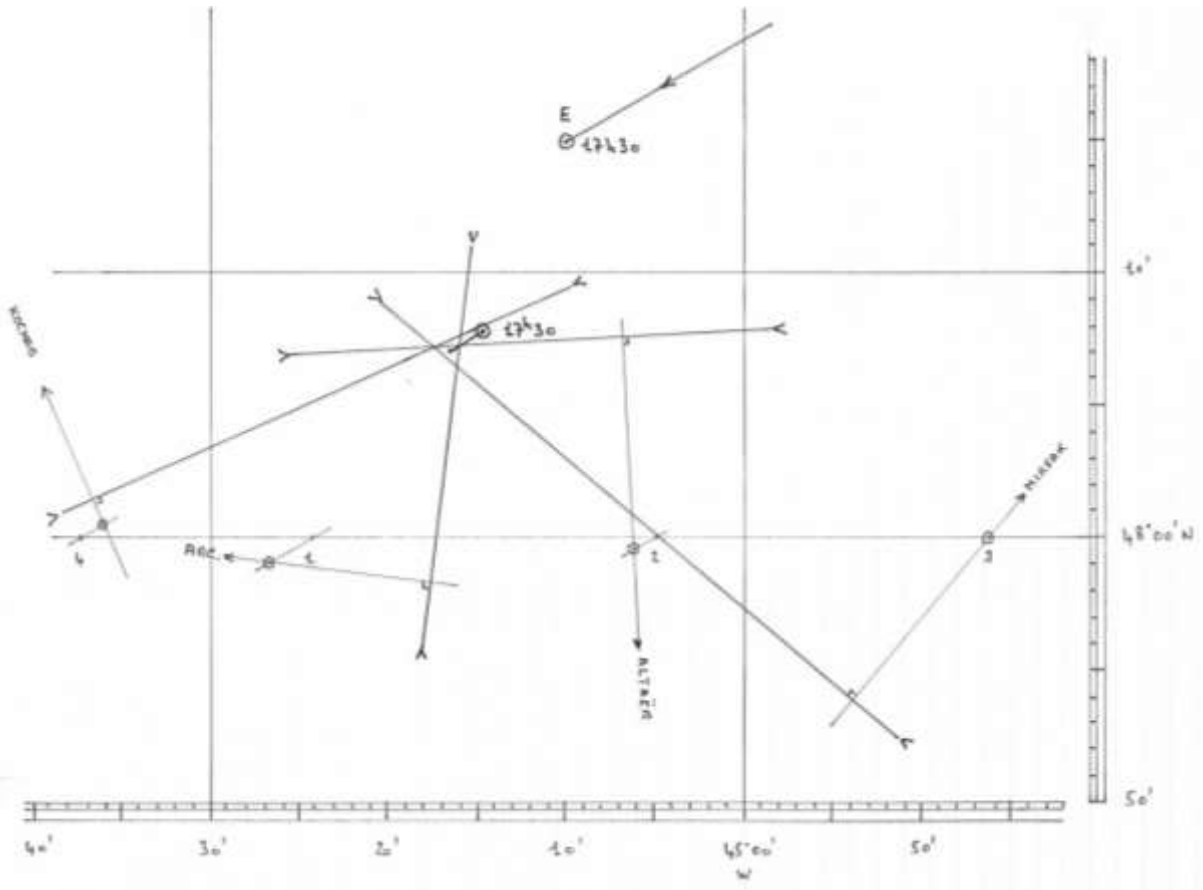


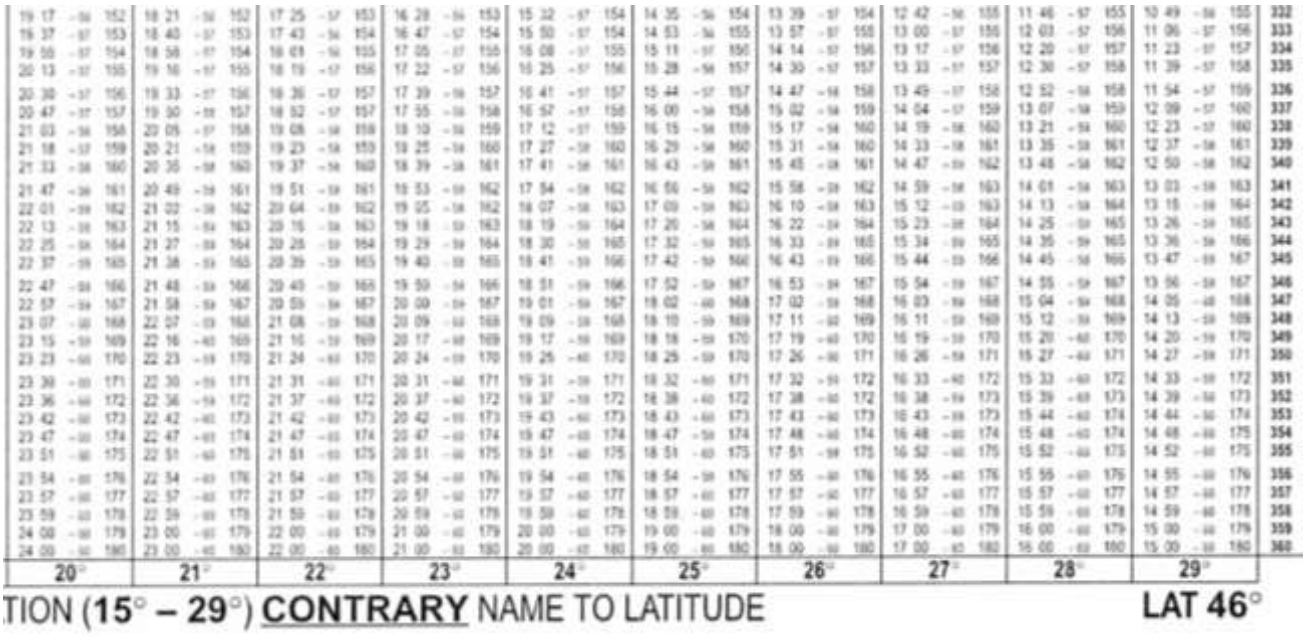
Fig : A11-5

En définitive, le point obtenu a pour coordonnées : φ = 48° 08’ N, G = 45° 15’ W. Il est situé à 8 milles du point estimé (E) dans le 204°, soit approximativement à 5 milles à gauche de la route et à 6 milles en avance sur l’estime.

VOLUMES II & III

Conception et disposition de la table :

Comme pour toutes les tables de ce type, les arguments d’entrée latitude, déclinaison et angle horaire local, sont des nombres entiers ; les intervalles d’argumentation sont partout de 1°, sauf pour l’angle horaire local à partir d’une latitude de 70° où cet intervalle est de 2°. Chaque page est dévolue à un nombre de degré entier de la latitude (Nord ou Sud) ; quatre pages sont affectées à la latitude 0°, six pour chaque latitude comprise entre 1° et 47°, huit pour chaque latitude comprise entre 48° et 69°, entre quatre et six pour chaque latitude comprise entre 70° et 89°. La déclinaison est l’argument d’entrée en colonne (ou l’argument horizontal). Pour une latitude donnée, une moitié des pages est relative aux déclinaisons comprises entre 0° et 14°, l’autre moitié aux déclinaisons comprises entre 15° et 29°. A chaque fois, deux cas sont considérés : déclinaisons de même nom (SAME) ou de nom contraire (CONTRARY) à la latitude. Enfin, l’angle horaire local de l’astre est l’argument d’entrée en ligne (ou l’argument vertical). Les valeurs d’angle horaire comprises entre 0° et 180° sont indiquées sur la partie gauche de la page, leurs compléments à 360° en partie droite. Pour chaque triplet d’argument d’entrée, la table donne la hauteur calculée H_c à la minute près, l’azimut Z au degré près, compté à partir du pôle élevé, et la quantité d, variation de la hauteur pour une variation de déclinaison de 60’ ou 1°. Les tableaux sont tronqués dès lors que la hauteur calculée devient inférieure à des valeurs comprises entre – 5° et – 7°. Un extrait de la table est représenté ci-dessous.



Les volumes II et III comportent des tableaux propres à la navigation aérienne identiques à ceux figurant dans le volume I : corrections pour le déplacement de l’observateur, le déplacement de l’astre, la réfraction astronomique, la force de Coriolis. Un tableau permet le calcul approché de l’angle horaire à Greenwich et de la déclinaison du Soleil sur une période de longue durée[82] ; ces données permettent, le cas échéant, de se passer des Éphémérides

[82] 1981 à 2016 pour l’édition consultée (tirage 1992 pour le volume II et 1997 pour le volume III).

nautiques pour traiter les observations du Soleil. Enfin figure, sous la forme d'un carton mobile, la table d'interpolation de la hauteur en fonction des minutes de déclinaison.

Utilisation et exemple :

La procédure d'utilisation est identique à celle de la table HO 229, avec une précision moindre, puisque la hauteur calculée fournie par la table HO 249 est arrondie à la minute.

Exemple, pour le mois de janvier 2013 :

Estime		Coordonnées horaires		Observation	
φ_e	46° 12' N	AHvp	10° 25'	H_o	20° 48'
G_e	30° 39' W	D	20° 32' S		Soleil (bord infr)
$AHvg_e = 339° 46'$				e	20 m

Latitude auxiliaire : $\varphi_a = 46° N$

Angle horaire local auxiliaire : $AHag_a = 340°$

Longitude auxiliaire : $G_a = 30° 25' W$

La table est ouverte aux pages correspondant à une latitude de 46°, de nom contraire à la latitude (voir l'extrait ci-dessus). On lit directement, pour une déclinaison de 20° et un angle horaire de 340° :

$$H_c = 21° 33', d = - 58', Z = 160°$$

Etant situé en latitude N, le pôle N est le pôle élevé ; l'angle horaire local étant supérieur à 180°, le Soleil est dans l'E : l'azimut est donc N160°E soit $Z_n = 160°$. Dans le tableau ci-dessous figurent :

1re colonne : interpolation de la hauteur avec $\Delta H = d.32/60$ (table d'interpolation de la hauteur) ; on remarquera que la correction s'effectue toujours à partir de la partie entière de la déclinaison considérée, en valeur absolue (comme pour la table HO 229) ;

2e colonne : correction de la hauteur observée au mois de janvier (table VII des Ephémérides ou équivalent) ; la hauteur vraie obtenue H_v est arrondie à la minute ;

3e colonne : calcul de l'intercept $H_v - H_c$.

$H_c =$	21° 33'	$H_o =$	20° 48,0'	$H_v =$	20° 54'
$+ \Delta H =$	- 31'	$+ C_1 =$	+ 5,7'	$- H_c =$	21° 02'
		$+ C_2 =$	+ 0,3'		
$H_c =$	**21° 02'**	**$H_v =$**	**20° 54'**	**Int. =**	**- 8'**

Le point déterminatif est donc situé à 8 milles dans le 340° du point auxiliaire.

ANNEXE 12-1

ÉLÉMENTS de CONSTRUCTION de L'ABAQUE de WEIR

Démarche géométrique de P. Weir :

Le point de départ de la recherche de P. Weir est la projection orthogonale de la sphère locale dans le plan de l'horizon. Dans cette projection, pour une latitude donnée, l'équateur et les parallèles diurnes des astres sont représentés par des ellipses non concentriques et non superposables ; les cercles horaires sont de même représentés par une famille d'ellipses. Ce canevas, sur lequel on peut placer l'image de l'astre et en mesurer l'azimut, est particulier à la latitude pour lequel il est établi. Un travail équivalent serait à reproduire pour un certain nombre de valeurs discrètes de la latitude afin de disposer d'un document utilisable dans toutes les zones de navigation usuelles. L'ensemble est donc long à mettre au point, encombrant et peu commode puisqu'il faudra en général interpoler entre deux latitudes. P. Weir cherchait essentiellement à résoudre le problème de l'azimut : il s'est donc affranchi des considérations relatives à la hauteur de l'astre ce qui lui a permis d'utiliser des transformations géométriques simples conduisant à l'obtention d'un diagramme utilisable sous toutes les latitudes et pour toutes les déclinaisons[83] figurant sur une feuille unique. La représentation finalement obtenue est alors un abaque de calcul et non plus une projection directe des éléments de la sphère locale.

Considérons un lieu de latitude φ quelconque et la sphère locale correspondante représentée en figure A12-1 en coupe selon le plan du méridien. On note sur la figure QQ' la trace de l'équateur et (C) la trace du parallèle diurne (en tireté) d'un astre de déclinaison D. La projection, dans le plan de l'horizon, du grand cercle équateur est une ellipse (E_Q), concentrique à la sphère locale (centre O), dont le demi-grand axe est égal au rayon (unité) ; le demi-petit axe a pour longueur sin φ. Grand axe et petit axe (qq') sont respectivement portés par les axes EW et NdS de la sphère locale. Si on sait placer la projection X_Q d'un astre X de déclinaison nulle (l'équateur en est le parallèle diurne) sur l'ellipse correspondante, il sera facile d'en mesurer l'azimut Z_X avec un rapporteur sur la feuille de papier matérialisant le plan de projection (plan de l'horizon). La projection du parallèle diurne (C) dans le plan de l'horizon est une ellipse notée (E_φ). On remarque que cette ellipse (en tireté) n'est pas superposable à l'ellipse précédente (E_Q). P. Weir imagine donc d'abord un « parallèle diurne » (C') qui aurait même rayon que l'équateur sans que l'azimut et l'angle au pôle ne soient altérés. Un diamètre est MM' et la projection de (C') dans le plan de l'horizon est une ellipse (E'_φ), de petit axe mm' égal à qq', superposable à (E_Q). Si on sait placer la projection B' d'un astre sur cette ellipse, son azimut Z_B sera obtenu en lisant avec un rapporteur l'angle $\widehat{\mathrm{NdOB}}$.

Le dispositif impose, pour plusieurs valeurs discrètes de la latitude, un jeu d'ellipses construites pour une série de valeur de déclinaison. Compte tenu du fait que la distance entre ellipses superposables est égale à qm, soit $\tan \mathrm{D} \cdot \cos \varphi$, Weir effectue la translation qui conduit à la superposition de (E'_φ) avec (E_Q). La position correspondante de l'astre vient en B_Q. Pour effectuer la mesure de l'azimut, il faut déplacer le centre de mesure de l'angle de O en A tel que $\mathrm{OA} = \tan \mathrm{D} \cdot \cos \varphi$. Ayant placé A et B_Q, l'azimut pourra se mesurer avec un rapporteur en lisant la valeur de l'angle $\widehat{\mathrm{NdAB}}_Q$. La translation du centre de mesure de O en A est fonction de la déclinaison D et de la latitude φ. Ceci conduit à utiliser des échelles de mesure de cette translation calculées selon les deux paramètres. Pour pallier à cet inconvénient, P. Weir imagine alors de donner au rayon de la sphère locale d'un lieu de latitude φ la valeur sec φ. Dans ces conditions, la distance qm entre les ellipses (E_Q) et ($E'\varphi$) est égale à $\tan \mathrm{D} \cdot \cos \varphi \cdot \sec \varphi = \tan \mathrm{D}$: la translation de O vers A (comme de B' vers B_Q) est maintenant indépendante de la latitude et il sera aisé de graduer l'axe NdS directement en valeurs de déclinaison. On obtient donc en définitive une famille d'ellipses, pour chaque valeur de latitude, dont le demi-grand axe est sec φ et le demi-petit axe tan φ.

[83] Jusqu'à 65° avec une extension possible jusqu'à 78°.

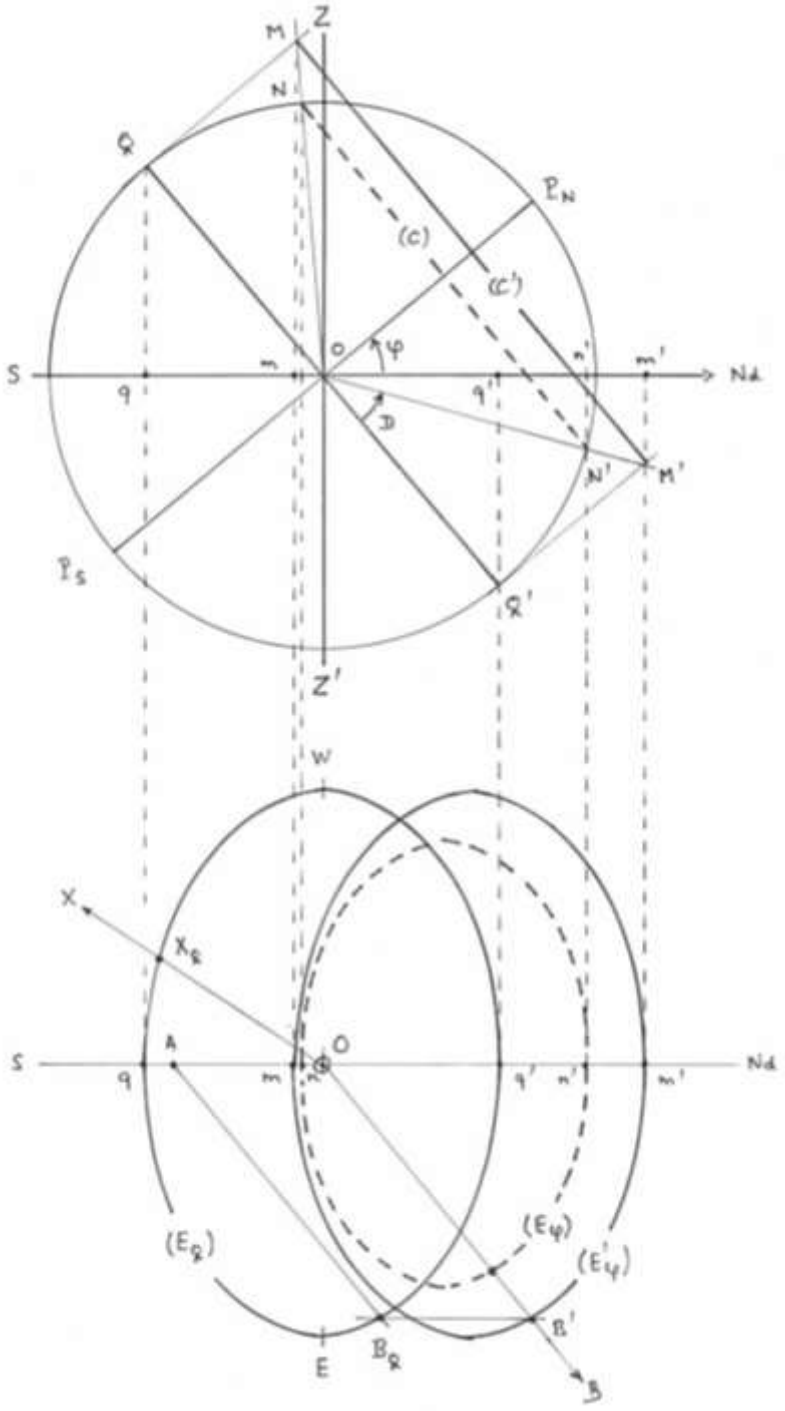


Fig : A12-1

Le tracé des images des cercles horaires, selon les valeurs de l'angle horaire, a ensuite été fait point par point, sans que Weir puisse démontrer que les courbes correspondantes sont des branches d'hyperboles.

Démarche analytique :

On explicite ci-après la démonstration proposée par Charles Cornet ; l'azimut A_z est calculé à partir de la formule des cotangentes (formule dite de l'azimut par l'heure) :

$$\sin\varphi.\cos P = \tan D.\cos\varphi - \cot A_z.\sin P$$

Cette relation peut s'écrire, en divisant membre à membre par cosφ :

$$\tan\varphi\,.\cos P = \tan D - \frac{\sin P}{\cos\varphi}.\cot A_z$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'axes x'Ox et y'Oy. Soit un point D de l'axe y'Oy dont l'ordonnée est tan D et la droite (Δ) passant par D et faisant l'angle α avec l'axe x'Ox. Cette droite a pour équation : $y - \tan D = x.\tan\alpha$. En admettant que cette droite fasse l'angle A_z avec l'axe y'Oy comme indiqué sur la figure A12-2, on peut écrire : $A_z = 90° + \alpha$, $y - \tan D = -x.\cot A_z$, soit :

$$y = \tan D - x.\cot A_z$$

Dans le repère défini ci-dessus, considérons le point A de coordonnées :

$$x = \frac{\sin P}{\cos\varphi} \;\; ; \;\; y = \tan\varphi.\cos P$$

Compte tenu de la relation de départ entre A_z et les variables d'entrée φ, D et P (formule des cotangentes), les coordonnées du point A vérifient l'équation de la droite (Δ). On peut ensuite écrire :

$$\sin P = \frac{x}{\sec\varphi} \;\; ; \;\; \cos P = \frac{y}{\tan\varphi}$$

Soit donc :

$$(\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2 = 1 = \frac{x^2}{(\sec\varphi)^2} + \frac{y^2}{(\tan\varphi)^2}$$

Ce qui est l'équation d'une famille d'ellipses (E) dans le repère défini ci-dessus.

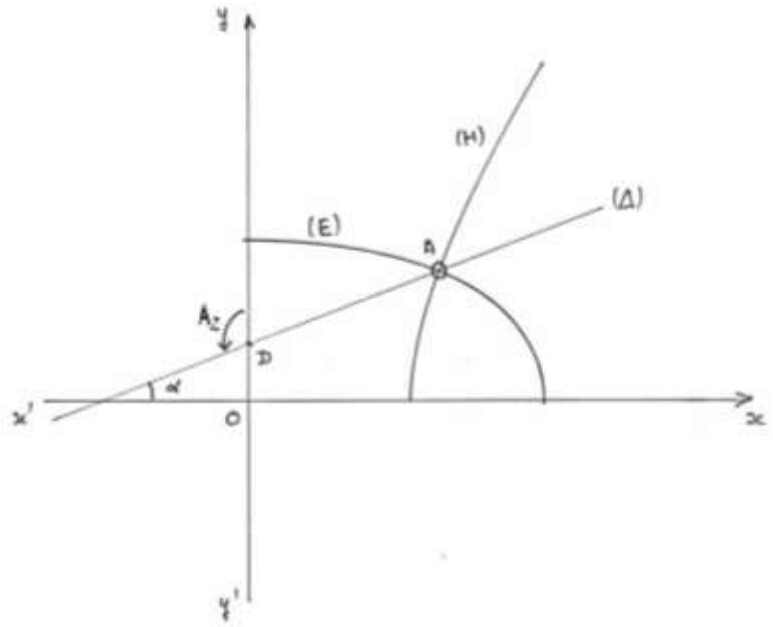


Fig : A12-2

On a de même :

$$\sec\varphi = \frac{x}{\sin P} \quad ; \quad \tan\varphi = \frac{y}{\cos P}$$

Soit aussi :

$$(\sec\varphi)^2 - (\tan\varphi)^2 = 1 = \frac{x^2}{(\sin P)^2} - \frac{y^2}{(\cos P)^2}$$

Ce qui est l'équation d'une famille d'hyperboles (H).

L'ensemble des problèmes d'azimut se traitant dans le premier quadrant avec des règles de signe simples, il suffira de construire le quart d'ellipse et la demi-branche d'hyperbole situés dans ce quadrant. Pour une latitude φ et un angle au pôle P donnés, le point A se situe à l'intersection du quart d'ellipse et de la demi-branche d'hyperbole correspondante. On vérifie que ces coniques sont homofocales (OF = 1) et sont de plus orthogonales. Le graphique d'azimut est ensuite construit de la façon suivante :

- l'axe y'Oy est gradué directement en tan D,
- on trace la famille de quarts d'ellipse pour différentes valeurs de la latitude (de 10 en 10° par exemple),
- on trace ensuite la famille de demi-branches d'hyperboles pour différentes valeurs de l'angle au pôle P (de 2 en 2 minutes).

La mesure de l'azimut A_z s'effectue ensuite comme indiqué sur la figure A12-2.

Une démonstration analogue figure dans « Note on Captain's Weir Paper » du professeur P. G. Tait.

ANNEXE 12-2

ABAQUE d'AZIMUT de HUGON

Formule utilisée :

La formule dite des cinq éléments qui donne l'azimut en fonction de l'heure et de la hauteur s'écrit :

$$\cos H . \cos A_z = \sin D . \cos \varphi - \cos D . \sin \varphi . \cos P$$

Lors de l'étude des tables de Hugon (chapitre 8), on avait posé :

$$X = \left(\cos \frac{P}{2}\right)^2 , Y = \left(\sin \frac{P}{2}\right)^2 , \text{soit } X + Y = 1 \text{ et } X - Y = \cos P$$

On pose de plus :

$$L = \cos H . \cos A_z$$

La relation s'écrit :

$$L = (X + Y). \sin D . \cos \varphi - (X - Y). \sin \varphi . \cos D$$

en ordonnant en X et Y :

$$L = X. [\sin D. \cos \varphi - \sin \varphi . \cos D] + Y. [\sin D . \cos \varphi + \sin \varphi . \cos D]$$

$$L = X. \sin(D - \varphi) + Y. \sin(D + \varphi)$$

ce qui est de la forme :

$$L = \alpha . X + \beta . Y$$

On sait de plus que X et Y peuvent s'écrire :

$$X = \left(\cos \frac{P}{2}\right)^2 = \frac{1 + \cos P}{2} ; Y = \left(\sin \frac{P}{2}\right)^2 = \frac{1 - \cos P}{2}$$

La relation s'écrit donc finalement :

$$L = \frac{\alpha + \beta}{2} + (\alpha - \beta). \frac{\cos P}{2}$$

Exemple :

Données du calcul :

Angle au pôle	Déclinaison	Latitude	Hauteur
P = 65° 08' W	D = 27° 28,5' N	φ = 38° 03,5' N	H = 35° 19'

D – φ = - 10° 35' ; D + φ = 65° 32'.

La construction est représentée en figure A12-3 ci-après et donne A_z = N80,5°W = 279,5°.

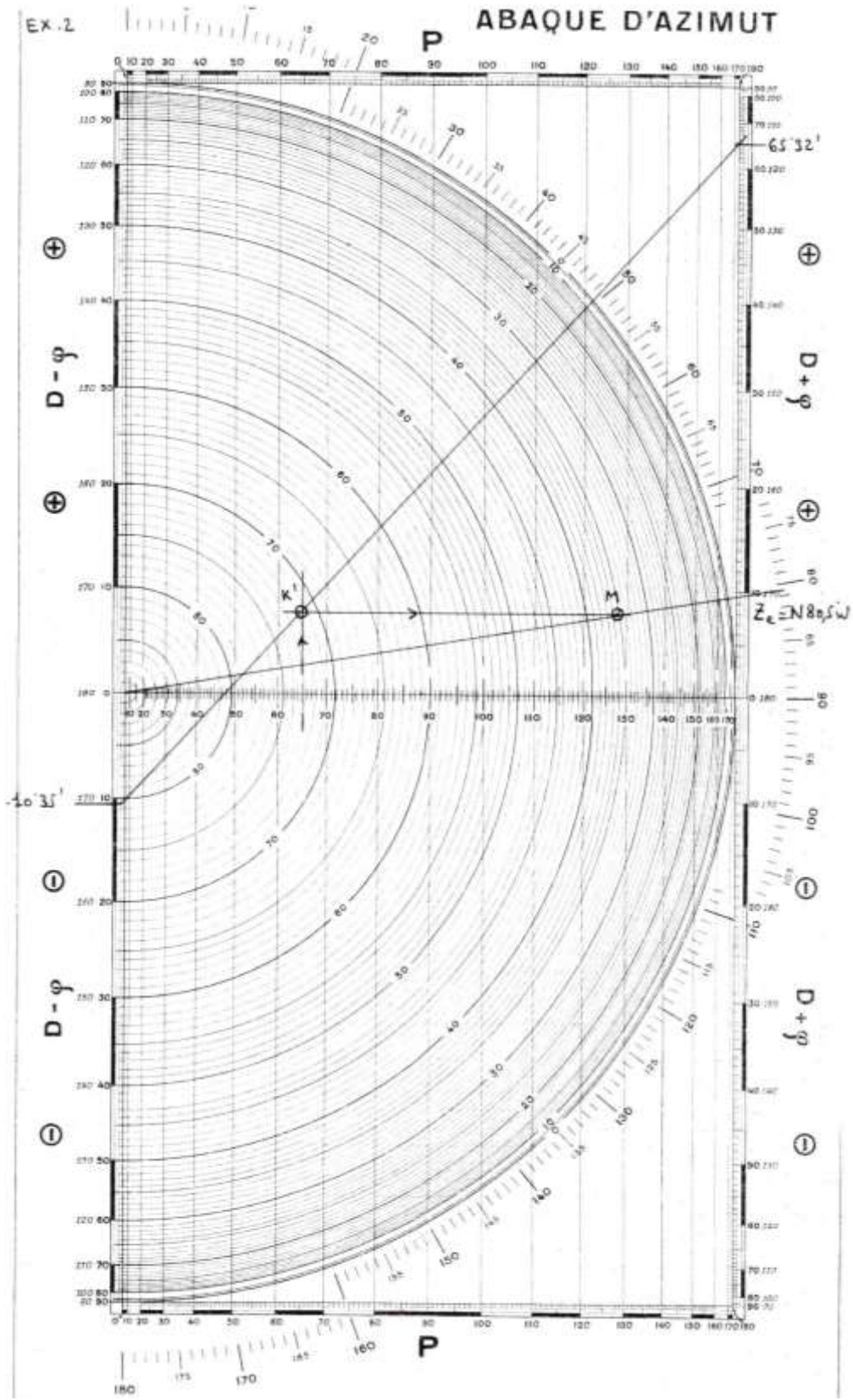


Fig ; A12-3

ANNEXE 12-3

ABAQUE d'OCAGNE

Formulation utilisée :

Le triangle de position de l'astre est construit à partir du pôle élevé et on utilise les symboles usuels pour identifier les différents arcs et angles de ce triangle sphérique ; la latitude est toujours positive, la déclinaison est positive si elle est de même nom que la latitude, négative dans le cas contraire. La hauteur H est calculée par la formule fondamentale :

$$\sin H = \sin \varphi \,.\, \sin D + \cos \varphi \,.\, \cos D \,.\, \cos P$$

que l'on transforme en faisant apparaître exclusivement la fonction haversine ; N désignant la distance zénithale, on obtient finalement :

$$\mathrm{hav}(N) = \mathrm{hav}(\varphi - D) + \mathrm{hav}(P).\left[\mathrm{hav}\left(180° - (\varphi + D)\right) - \mathrm{hav}(\varphi - D)\right]$$

Considérons maintenant le plan rapporté à un repère orthonormé d'axes Ox et Oy dans lequel les coordonnées d'un point sont :

$$x = \mathrm{hav}(P) \;\text{ et }\; y = \mathrm{hav}(N)$$

en posant :

$$m = \mathrm{hav}\left(180° - (\varphi + D)\right) - \mathrm{hav}(\varphi - D) \;\text{ et }\; p = \mathrm{hav}(\varphi - D)$$

l'équation s'écrit :

$$y = m.x + p$$

Dans le repère défini, c'est l'équation d'une droite d'ordonnée à l'origine p et de coefficient directeur m (figure A12-4).

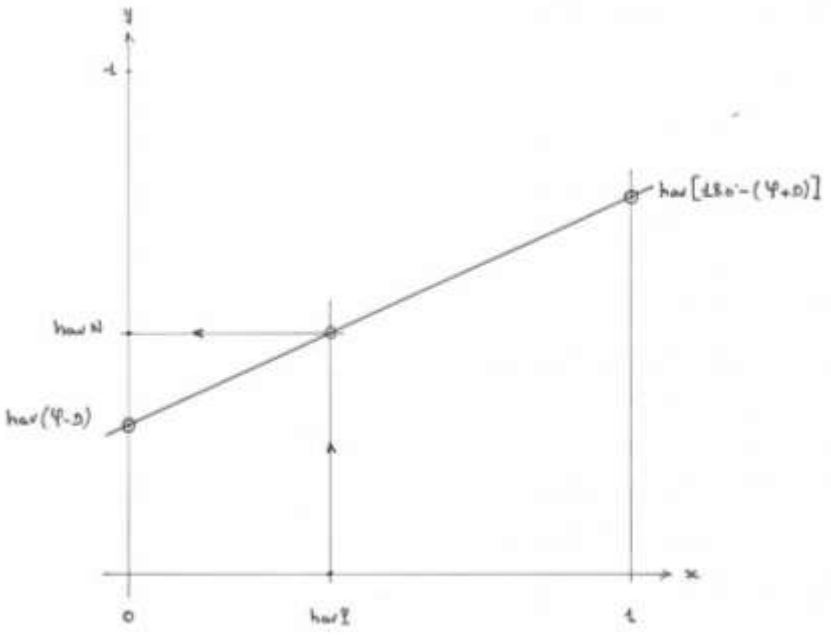


Fig : A12-4

Si les axes sont directement gradués selon les valeurs angulaires considérées, la construction de la droite donne directement N, donc H, en fonction de P.

La hauteur H étant déterminée, l'azimut Z peut se calculer en utilisant la formule :

$$\sin D = \sin\varphi \,.\, \sin H + \cos\varphi \,.\, \cos H \,.\, \cos Z$$

Cette expression devient, après avoir substitué la distance polaire δ à la déclinaison (δ = 90° - D), et par identification à la formule obtenue précédemment pour la hauteur :

$$\mathrm{hav}(\delta) = \mathrm{hav}(\varphi - H) + \mathrm{hav}(Z).\left[\mathrm{hav}\left(180° - (\varphi + H)\right) - \mathrm{hav}(\varphi - H)\right]$$

Le même abaque peut donc être utilisé pour déterminer l'azimut Z sachant qu'ici la droite sera tracée à partir des paramètres φ et H, la variable d'entrée étant δ.

Construction de l'abaque :

La construction de l'abaque se résume ainsi :

- définition d'un système d'axes perpendiculaires,
- adoption d'une unité de longueur,
- graduation des axes de 0° à 180° selon la fonction haversine et tracé du carroyage correspondant.

L'abaque représenté en figure 12-10 du texte est construit à l'origine sur une feuille de format A3 ; l'unité de longueur est de 250 mm. A partir de cette valeur on gradue les axes de 0° à 180° :

- N, δ, (φ – D) et (φ – H) en échelle verticale ascendante à gauche,
- P en échelle horizontale inférieure, Z en échelle horizontale supérieure,
- (φ + D) et (φ + H) en échelle verticale descendante à droite.

Le calcul de position des graduations, tous les 5° donne les résultats suivants :

α	hav(α)	x ou y (mm)	Δx ou Δy (mm/°)	α	hav(α)	x ou y (mm)	Δx ou Δy (mm/°)
0°	0	0	0	50°	0,179	44,7	1,67
5°	0,002	0,5	0,19	55°	0,213	53,3	1,79
10°	0,008	1,9	0,38	60°	0,250	62,5	1,89
15°	0,017	4,3	0,56	65°	0,289	72,2	1,98
20°	0,030	7,5	0,75	70°	0,329	82,2	2,05
25°	0,047	11,7	0,92	75°	0,371	92,6	2,11
30°	0,067	16,7	1,09	80°	0,413	103,3	2,15
35°	0,090	22,6	1,25	85°	0,456	114,1	2,17
40°	0,117	29,2	1,40	90°	0,500	125,0	2,18
45°	0,146	36,6	1,54				

Δx et Δy représentent, pour la valeur considérée de la variable α, l'écartement en mm entre deux graduations distantes de 1°. Il est évident qu'avec l'échelle adoptée un carroyage tous les degrés est irréalisable sauf, éventuellement, dans la partie centrale du diagramme. L'expression de Δx (ou de Δy) est obtenue par dérivation des expressions donnant x ou y en mm :

$$x = 250.\mathrm{hav}(\alpha) \;\; ; \;\; \Delta x = 250.\frac{\sin\alpha}{2}.\frac{\pi}{180} \;\; \text{car} \;\; \Delta\alpha = 1° = \frac{\pi}{180}\ \text{rad}$$

Les graduations correspondant à l'intervalle $[90°, 180°]$ sont obtenues sachant que hav(180° - α) = 1 - hav(α). Le diagramme est de format carré, le carroyage étant ici tracé tous les 5°.

ANNEXE 12-4

ABAQUE de FAVÉ et ROLLET de L'ISLE, TABLES GRAPHIQUES de CONSTAN

FORMULATION UTILISÉE

Soit PZE le triangle de position de l'astre construit sur la sphère terrestre représentée en figure A12-5 à partir du pôle élevé P. On considère la décomposition de ce triangle selon la hauteur sphérique issue de l'astre E, dont le pied est K. On note :

- φ, la latitude et λ la colatitude (λ = 90° - φ) ; φ et λ sont positives et inférieures à 90° ;
- D, la déclinaison de l'astre, positive si elle est de même nom que la latitude, négative dans le cas contraire ;
- P, l'angle au pôle compté de 0° à 180° vers l'E ou vers l'W ;
- a, la hauteur sphérique EK ;
- b, la latitude du point K ;
- B, la somme algébrique λ + b ;
- H et Z, la hauteur de l'astre et son azimut compté ici de 0° à 180° vers l'E ou vers l'W.

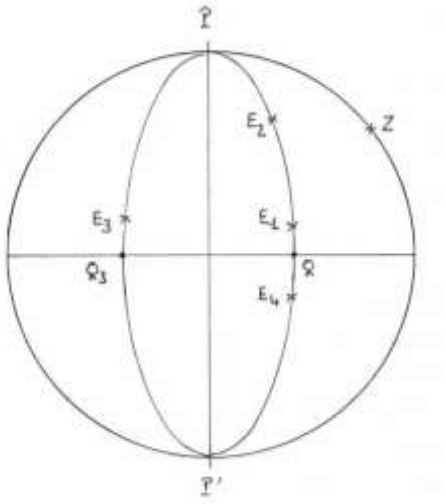


Fig : A12-5

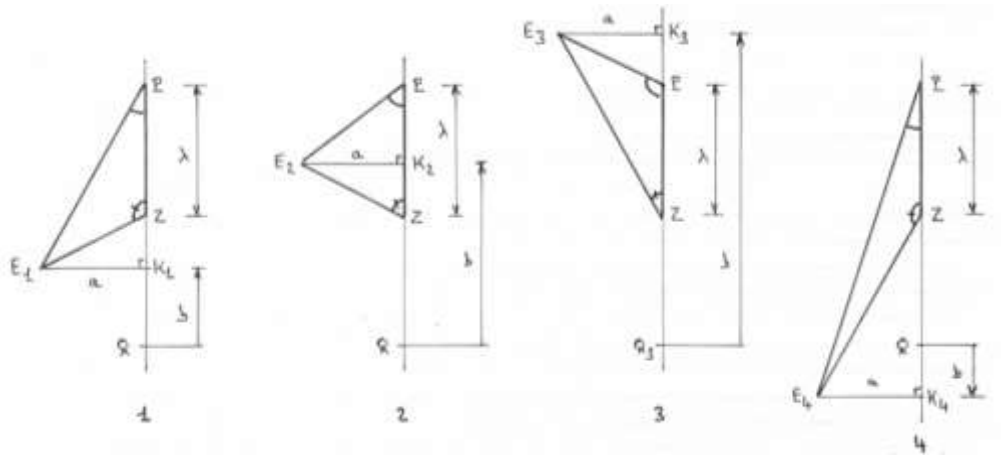


Fig : A12-6

Suivant la position de la projection K (pied de la hauteur sphérique) de l'astre E sur le méridien du lieu Z, on distingue les quatre configurations usuelles du triangle résumées indiquées en figure A12-6 ci-dessus. On établit les formules de calcul respectivement dans les triangles PKE et ZKE :

$$\sin D = \sin b . \cos a \quad \text{et} \quad \cot P = \cos b . \cot a$$

$$\sin H = \sin B . \cos a \quad \text{et} \quad \cot Z = \cos B . \cot a$$

Ces formules, identiques deux à deux, sont applicables dans tous les cas de figure, les déterminations des différents arcs étant fixées dans le tableau ci-après.

Cas	1	2	3	4
P	$< 90°$	$< 90°$	$> 90°$	$< 90°$
b	$< 90°$	$< 90°$	$> 90°$	$-90° < b < 0°$
$B = \lambda + b$	$< 90°$	$> 90°$	$> 90°$	$< 90°$
Z	$> 90°$	$< 90°$	$< 90°$	$> 90°$

Dans le plan, on définit un repère orthonormé d'axes Oa et Ob et, dans ce repère, on construit les courbes représentatives de :

$$\sin D = \sin b . \cos a \quad \text{et} \quad \cot P = \cos b . \cot a$$

pour une valeur donnée de la déclinaison D et une valeur donnée de l'angle au pôle P et de son supplément, en faisant varier a de 0° à 90° et b de 0° à 180°. On obtient deux courbes que l'on représente sur la figure A12-7 :

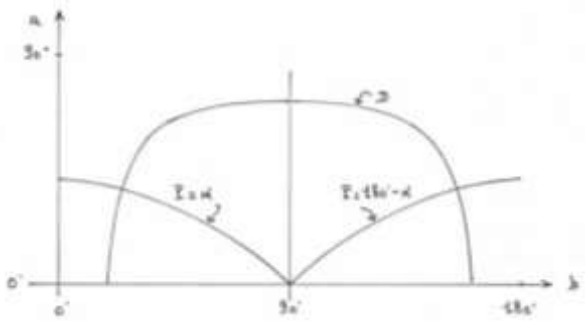


Fig : A12-7

Ces courbes sont symétriques par rapport à la droite verticale représentative de b = 90°. L'abaque pourra donc être tracé sur l'intervalle $[0°, 90°]$ en abscisses, la graduation horizontale étant doublée par une graduation en valeurs supplémentaires. Dans ces conditions, les courbes relatives à P porteront aussi l'indication des valeurs supplémentaires. Les deux réseaux de courbes construits pour des valeurs discrètes de la déclinaison et de l'angle au pôle régulièrement espacées de 10' constituent l'abaque de Favé et Rollet de l'Isle.

Les tables graphiques de P. Constan sont construites à partir des formules :

$$\sin a = \sin P . \cos D \quad \text{et} \quad \cot b = \cos P . \cot D$$

$$\sin a = \sin Z . \cos H \quad \text{et} \quad \cot(\lambda + b) = \cos Z . \cot H$$

Ces formules sont applicables dans tous les cas de figure avec les règles de détermination des arcs fixées plus haut. On définit de même dans le plan un repère d'axes OP et OD et on y construit les courbes représentatives de :

$$\sin a = \sin P . \cos D \quad \text{et} \quad \cot b = \cos P . \cot D$$

pour des valeurs fixées de a et b, D et P variant respectivement de 0° à 90° et de 0° à 180°, on obtient deux courbes symétriques par rapport à la droite verticale d'abscisse P = 90° représentées en figure A12-8. L'abaque pourra donc être tracé sur l'intervalle [0°, 90°] en abscisses, la graduation horizontale étant doublée par une graduation en valeurs supplémentaires. Dans ces conditions, les courbes relatives à b porteront aussi l'indication des valeurs supplémentaires. Les deux réseaux de courbes construits pour des valeurs discrètes de a et b régulièrement espacées de 1° constituent les tables graphiques de P. Constan.

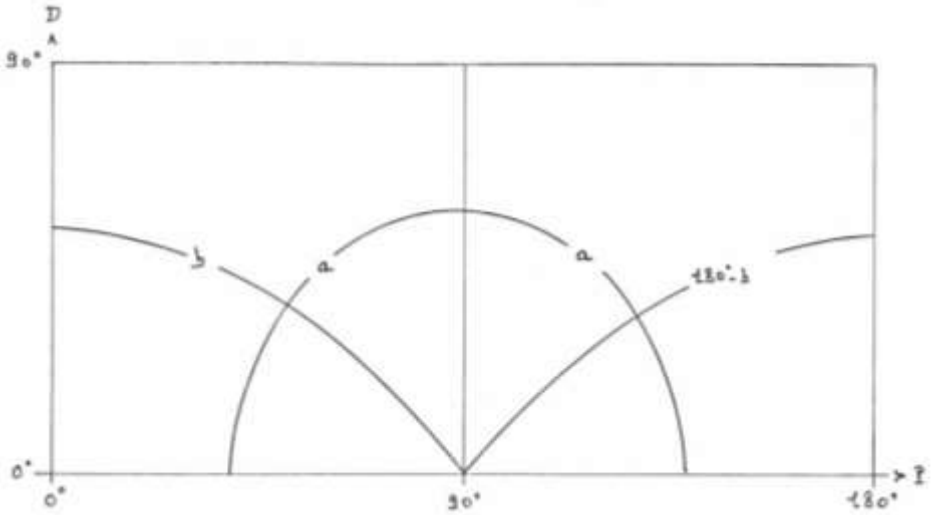


Fig : A12-8

ANNEXE 13-1

CIRCUMMÉRIDIENNES, FORMULATIONS UTILISÉES

Formulation exacte :

En figure A13-1, le triangle de position de l'astre PZA est construit à partir du pôle élevé ; ces éléments connus sont l'angle au pôle estimé P_e, le côté PA (distance polaire, 90° - D) et le côté ZA (distance zénithale vraie, ξ_v = 90° - H_v) ; l'élément à déterminer est la latitude φ du point Z. PZQ étant la trace du méridien de l'observateur on construit la hauteur sphérique issue du point A dont le pied est K et on porte sur le méridien les points A' tel que PA' = PA = 90° - D et A'' tel que ZA'' = ZA = ξ_v = 90° - H_v.

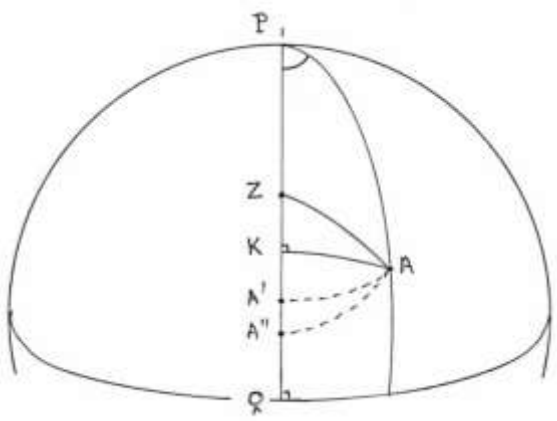


Fig : A13-1

Dans le cas de figure représenté, la latitude du lieu φ = QZ peut s'écrire :

$$\varphi = ZA'' + QA' - A'A'' = \xi_v + D - A'A''$$

A'A'' est la réduction r cherchée ; elle se décompose comme suit :

$$A'A'' = KA'' - KA' = (ZA'' - ZK) - (PA' - PK) = (ZA - ZK) - (PA - PK)$$

ZA et PA sont connus et PK et ZK s'évaluent à l'aide des formules de trigonométrie sphérique appliquées aux triangles rectangles PKA et ZKA. Plusieurs possibilités de calcul sont offertes ; on peut ainsi résoudre en premier lieu le triangle PKA, avec les éléments connus P_e et D, pour trouver les arcs KA et PK puis le triangle ZKA connaissant KA et H_v pour trouver l'arc ZK. On obtient :

$$\sin KA = \sin P_e . \cos D \ ; \ \tan PK = \cos P_e . \cot D \ ; \ \cos ZK = \frac{\sin H_v}{\cos KA}$$

C'est le procédé retenu par J. T. Towson qui nécessite deux tables.

On peut aussi commencer par calculer précisément l'azimut de l'astre A_z à l'aide de l'analogie des sinus puis, à l'aide d'une table unique donnant un côté de l'angle droit en fonction de la cohypothénuse et de l'angle adjacent, évaluer les côtés cherchés PK et ZK ; le premier est obtenu en fonction de P_e et de D, le second en fonction de A_z et H_v. On obtient alors :

$$\tan PK = \cos P_e . \cot D \ ; \ \tan ZK = -\cos A_z . \cot H_v$$

C'est le procédé retenu par H. S. Blackburne ainsi que par les auteurs du Brown's Nautical Almanac.

L'autre cas de figure, dans lequel le point K est situé entre P et Z se traite de la même façon en adoptant une distance zénithale négative puisque, dans ce cas, on tourne le dos au pôle élevé et en adoptant pour la réduction la somme des arcs KA' et KA''.

La méthode, construite à partir de formules exactes, est applicable sans restriction dès lors que l'azimut par quadrant est inférieur à 45°.

Formulations approchées :

La réduction au méridien, notée r, est la correction à apporter à la distance zénithale vraie ξ_v, issue de la mesure, pour évaluer directement, par addition algébrique avec la déclinaison D de l'astre, la latitude φ de l'observateur lorsque l'astre est proche du méridien. On écrit ainsi :

$$\varphi = \xi_v - r + D$$

Développement de Delambre :

Les différents symboles utilisés ayant leur signification usuelle, la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique relative à l'angle en P et à son côté opposé peut se mettre sous la forme :

$$\cos \xi_v = \cos(\varphi - D) - 2.\cos\varphi\,.\cos D\,.\left(\sin\frac{P_e}{2}\right)^2$$

Sachant que $\xi_v = |\varphi - D| + r$, l'expression devient :

$$\cos[|\varphi - D| + r] = \cos|\varphi - D| - 2.\cos\varphi\,.\cos D\,.\left(\sin\frac{P_e}{2}\right)^2$$

En développant, on obtient :

$$(1 - \cos r).\cot|\varphi - D| + \sin r = \frac{2.\cos\varphi\,.\cos D}{\sin|\varphi - D|}.\left(\sin\frac{P_e}{2}\right)^2$$

Admettons maintenant que la réduction r, en radians, soit petite et écrivons :

$$\sin r = r \quad \text{et} \quad 1 - \cos r = \frac{r^2}{2}$$

On pose de plus, pour simplifier l'écriture :

$$a = \frac{\cos\varphi\,.\cos D}{\sin|\varphi - D|}$$

L'équation s'écrit alors :

$$\frac{r^2}{2}.\cot|\varphi - D| + r = 2a.\left(\sin\frac{P_e}{2}\right)^2$$

En première approximation, négligeons le terme en r^2, petit devant le terme en r, on obtient :

$$r_1 = 2a.\left(\sin\frac{P_e}{2}\right)^2$$

On replace cette première approximation dans l'équation, ce qui donne :

$$r = 2a.\left(\sin\frac{P_e}{2}\right)^2 - 2a^2.\cot|\varphi - D|.\left(\sin\frac{P_e}{2}\right)^4 = r_1 + r_2$$

Cette expression est le développement de Delambre. La réduction r est ici exprimée en radians ; pour obtenir sa valeur en minutes ou secondes d'arc, il convient de multiplier le résultat respectivement par 10800/π ou par 648000/π. Le deuxième terme de la réduction peut aussi s'écrire, en radians :

$$r_2 = -\frac{r_1^2}{2}.\cot|\varphi - D| = -\frac{r_1^2}{2}.\tan H_0$$

H_0 étant la hauteur que l'on aurait mesurée si l'astre avait été dans le plan du méridien estimé. La formulation, en l'état, permet d'effectuer le calcul du terme principal de la réduction, r_1 ainsi que du terme complémentaire r_2 .

Formule de Hilleret :

En 1875, P. Hilleret, publie sa « Théorie générale des circumméridiennes » et propose une formule de calcul de la réduction à partir d'un développement limité ; si on limite le développement à l'ordre 4, on obtient :

$$r = a.\frac{P_e^2}{2} - a.\frac{P_e^4}{24}.[1 + 3a.\cot|\varphi - D|]$$

expression dans laquelle r et P_e sont exprimés en radians. Comme il est d'usage d'exprimer ces quantités respectivement en secondes d'arc et minutes de temps, on pose :

$$k = \frac{900^2.arc1''}{2} \quad \text{avec} \quad arc1'' = \frac{\pi}{180.60.60} \quad \text{et} \quad \alpha = k.a = 1{,}9635.\frac{\cos\varphi.\cos D}{\sin|\varphi - D|}$$

et la formule s'écrit enfin :

$$r = \alpha.P_e^2 - \alpha.arc1''.[k + 3\alpha.\cot|\varphi - D|].\frac{P_e^4}{6}$$

La réduction est ici finalement exprimée en secondes d'arc ; une simple division par 60 en donnera la valeur en minutes et dixièmes.

Remarque : on arrive naturellement au même résultat en utilisant le développement de Delambre et en posant, en radians :

$$\left(\sin\frac{P_e}{2}\right)^2 = \frac{P_e^2}{4} - \frac{P_e^4}{48} \quad \text{et} \quad \left(\sin\frac{P_e}{2}\right)^4 = \frac{P_e^4}{16}$$

Les formules utilisées pour calculer la réduction au méridien conduisent à évaluer deux termes dont l'un, celui du 4e degré, prend une valeur négligeable tant que l'angle au pôle reste inférieur à une certaine valeur que l'on définira. Dans ces conditions, on peut écrire, à hauteur d'une approximation fixée à l'avance, que $r = r_1$, ou encore :

$$r = \alpha.P_e^2$$

Pratiquement toutes les tables courantes de navigation donnent la valeur du coefficient α des circumméridiennes en fonction de la latitude et de la déclinaison, le calcul de la réduction s'effectuant ensuite soit « à la main », soit à l'aide d'une autre table à double argument donnant le résultat du produit, soit encore avec une règle à calculs.

Formulations faisant intervenir l'azimut :

En transformant la relation donnant $r = \alpha.P_e^2$ et en faisant notamment apparaître l'azimut à l'aide de l'analogie des sinus dans le triangle de position, on arrive à une autre relation approchée :

$$r = \frac{15}{2}.\cos\varphi.\sin A_{zQ}.P_e \approx 15.\cos\varphi.\sin A_{zQm}.P_e$$

Dans cette expression, l'angle au pôle est exprimé en minutes d'heure et la réduction en minutes d'arc. A_{zQm}, azimut moyen, représente l'azimut calculé pour le demi-angle au pôle considéré. La relation est équivalente à celle établie précédemment à condition que l'azimut soit suffisamment petit pour pouvoir admettre $\sin A_{zQ} \approx A_{zQ}$ (radians). Cette formule sera mise en table par H. B. Goodwin et figure dans le Brown's Nautical Almanac.

Formule de calcul de l'azimut circumméridien :

L'angle au pôle estimé P_e étant petit (en radians), on peut utiliser une formule approchée pour calculer l'azimut par quadrant. L'expression s'établit à partir de la formule de l'azimut par l'heure et la hauteur – analogie des sinus dans le triangle de position – puis en exprimant la hauteur en fonction du coefficient α, de la déclinaison et de la latitude estimée ; on obtient :

$$A_{zQ} = \frac{1}{8} . \frac{\alpha . P_e}{\cos \varphi}$$

Dans cette expression, A_{zQ} est exprimé en degrés, α en secondes d'arc et P_e en minutes de temps. A_{zQ} est E si l'observation précède le passage au méridien, W dans le cas contraire ; le caractère N ou S se détermine suivant les valeurs et noms respectifs de la latitude et de la déclinaison.

ANNEXE 13-2

ANGLE AU PÔLE LIMITE

Limitation par approximation de l'angle au pôle :

La réduction est ici évaluée par son seul terme principal $\alpha.P^2$; le problème consiste à déterminer la valeur maximale P_L que peut prendre l'angle au pôle P, affecté d'une incertitude ΔP, induisant une incertitude maximale Δr fixée sur le résultat.

Par différentiation, on a $P_L = \Delta r/(2\alpha.\Delta P)$. Avec les valeurs fixées par W. H. Rosser (ΔP = 0,5 min et Δr = 60''), et compte tenu des unités utilisées, l'angle au pôle limite est $P_L = 60/\alpha$; il peut être simplement mis en table en fonction de valeurs de α. H. Dyèvre (tables 900 et 902) se basera sur une valeur maximale du produit $\alpha.P_L$ qu'il fixera à 0,6 correspondant à une variation maximale de la réduction r de 0,6' (ou 36'') pour une variation d'angle au pôle d'une demi-minute.

Limitation fonction de la négligence du 2e terme de la réduction :

Si on limite l'évaluation de la réduction au calcul de son seul terme principal, l'erreur qui en résulte sur le résultat ne peut excéder la valeur maximale que peut prendre le terme suivant dans le développement. La théorie développée par Hilleret en 1875 conduit à une formule de calcul de l'angle au pôle limite dans laquelle les paramètres sont le coefficient α et la valeur maximale de déclinaison que peut prendre l'astre, D_0. Fixant ensuite le degré d'approximation admissible sur la réduction, il est possible de mettre en table, en fonction de α et pour D_0 donnée, les valeurs correspondantes d'angle au pôle limite P_L ; cet angle au pôle est donné par la formule :

$$P_L^4 = \frac{60.900^2}{\alpha^3.\left[\frac{k^2}{3.\alpha^2} + (\sec D_0)^2 + \frac{k}{\alpha}.\tan D_0\right]}$$

Cette formule est obtenue en fixant l'incertitude admissible sur r à 1' ; elle est mise en table dans l'ouvrage de G. Friocourt (table XXIX), pour le Soleil avec D_0 = 24° (la signification de k est donnée en annexe 13-1).

Quelques valeurs d'angle au pôle limite :

Le tableau ci-dessous donne les valeurs d'angle au pôle limite, en minutes d'heure, en fonction du coefficient α exprimé en secondes d'arc données par quelques tables :

α	36''	12''	7,2''	4,5''	3''	1,8''	1,2''	0,9''
Tables 900-902	1	3	5	8	12	20	30	40
T. de Raper et de Rosser	2	5	8	13	20	33	50	67
T. XXIX de Friocourt	5	12	18	24	32	45	56	65

Les tables 900-902 ainsi que les tables figurant dans les traités de Raper et de Rosser donnent l'angle au pôle limite sur la base d'une incertitude sur l'heure (ou sur l'angle au pôle) ΔP et de l'incertitude maximale correspondante sur la réduction, Δr. Pour les tables 900-902, Δr est fixée à 1,2' pour un ΔP de 1 minute ; pour les tables de Raper et Rosser, Δr est fixée à 2', pour un même ΔP.

On remarque que ces dernières conditions sont plus restrictives que celles fixées par la table XXIX de Friocourt.

ANNEXE 13-3

SÉRIE de HAUTEURS CIRCUMMÉRIDIENNES

On effectue une série de plusieurs hauteurs (au moins 5) et on note H_v la hauteur vraie du Soleil résultant d'une mesure effectuée peu avant (ou après) son passage au méridien ; à cet instant, sa déclinaison est D et son angle au pôle estimé P_e ; connaissant également la latitude estimée φ_e, il est possible de calculer, à l'aide d'une table appropriée la réduction au méridien r et d'écrire que la latitude circumméridienne φ a pour expression : $\varphi = D \pm [90° - (H_v + r)]$. On adoptera le signe - si l'observation se fait face au pôle élevé, le signe + dans le cas contraire (rappelons qu'avec cette convention, la latitude est toujours positive, la déclinaison est positive si elle est du nom de la latitude, négative dans le cas contraire). On a donc, par exemple dans le cas d'une observation face au pôle abaissé :

$$H_v + r = (D - \varphi) + 90°$$

Soit, en passant aux variations :

$$\Delta(H_v + r) = (\Delta D - \Delta\varphi)$$

Sur l'intervalle de temps nécessaire à l'exécution des mesures (moins d'une heure), la variation de déclinaison du Soleil en fonction du temps est constante, de même que la variation de latitude du navire si les éléments d'estime sont invariants. Il en résulte que la variation de hauteur « réduite » H_v + r est également constante. Dans ces conditions, la courbe représentative de la hauteur réduite en fonction du temps, donc de l'angle au pôle du Soleil, est une droite dont la pente résulte de ΔD et de $\Delta\varphi$. La variation horaire de déclinaison s'évalue dans les Éphémérides nautiques en déterminant la différence tabulaire qui n'excède pas 1,0' par heure ; la variation horaire de latitude est de la forme $\Delta\varphi$ = v.cos R, v étant la vitesse fond du navire, en nœuds, et R la route fond suivie.

On construit ensuite un graphique sur lequel on porte les angles au pôle estimés P_e en abscisse et les hauteurs réduites en ordonnée ; on place ensuite les points représentatifs des observations. Ces points devraient tous être alignés sur une droite de pente ($\Delta D - \Delta\varphi$). Du fait des erreurs de mesure, les points forment un nuage dans lequel on cherchera à tracer la droite de régression dont la pente est celle calculée.

La hauteur méridienne H_o cherchée se lit à l'intersection de la droite de régression et de l'axe des ordonnées (angle au pôle nul) ; on déduit de cette hauteur la latitude méridienne et on construit la droite correspondante, orientée E-W sur la carte ou le canevas de Mercator.

La méthode est très simple à appliquer et permet de faire concourir plusieurs observations pour déterminer la latitude méridienne sans pour autant être astreint à observer à l'instant précis du passage au méridien estimé.

Remarques :

1. On s'attachera, si possible, à répartir les mesures de part et d'autre du passage au méridien.
2. La réduction au méridien r pourra se déterminer avec une même valeur du coefficient α, calculé avec la latitude estimée et la déclinaison pour l'heure du passage au méridien.
3. Les hauteurs relevées ayant des valeurs voisines, leurs éléments de correction (instrument, réfraction, dépression, parallaxe, demi-diamètre) sont identiques : on construira donc le graphique pour des hauteurs instrumentales réduites et on effectuera une correction unique pour la hauteur instrumentale réduite méridienne lue sur le graphique.

Exemple : le 10 avril, le navire faisant route à 18 nœuds au 141°, la latitude estimée à midi est φ_e = 45° 10' N et la déclinaison du Soleil est D = 8° 02,6' N ; l'erreur instrumentale du sextant est ε = +1,5' et l'élévation de l'œil de 16 m.

On observe une série de hauteurs du bord inférieur du Soleil dont les éléments sont disposés dans le tableau ci-dessous :

N°	P_e	H_i (bord infr)	r	H_i + r
1	0 h 05 m E	52° 45,5'	+ 0,9'	52° 46,4'
2	0 h 03 m E	52° 48,5'	+ 0,3'	52° 48,8'
3	0 h 01 m E	52° 46,3'	0	52° 46,3'
4	0 h 01 m W	52° 49,1'	0	52° 49,1'
5	0 h 03 m W	52° 48,1'	+ 0,3'	52° 48,4'
6	0 h 05 m W	52° 49,8'	+ 0,9'	52° 50,7'
7	0 h 07 m W	52° 47,2'	+ 1,9'	52° 49,1'

Le coefficient α peut se calculer directement par la formule $\alpha = 1{,}9635.\cos\varphi_e.\cos D/\sin|\varphi_e - D|$ ou avec une table. On obtient α = 2,27'' ; la réduction s'obtient ensuite en formant $r = \alpha.P_e^2$.

Le pôle élevé est le pôle N et, au cours des observations, on fait face au Sud ; on est donc dans le cas où $\varphi = D + [90° - (H_v + r)]$ (la distance zénithale N_v est positive) et où $\Delta H = \Delta D - \Delta\varphi$.

On relève dans les Éphémérides ΔD = +1,0' par heure et on évalue Δφ = v.cos R = -14,0' par heure. Dans cet exemple, nous avons ΔH = ΔD – Δφ = +15,0' par heure ou encore de 1,5' pour 6 minutes. On construit ensuite le graphique ci-dessous (figure A13-2) sur lequel on reporte le nuage de points et où on trace à vue la droite de régression de pente 1,5'/6 minutes.

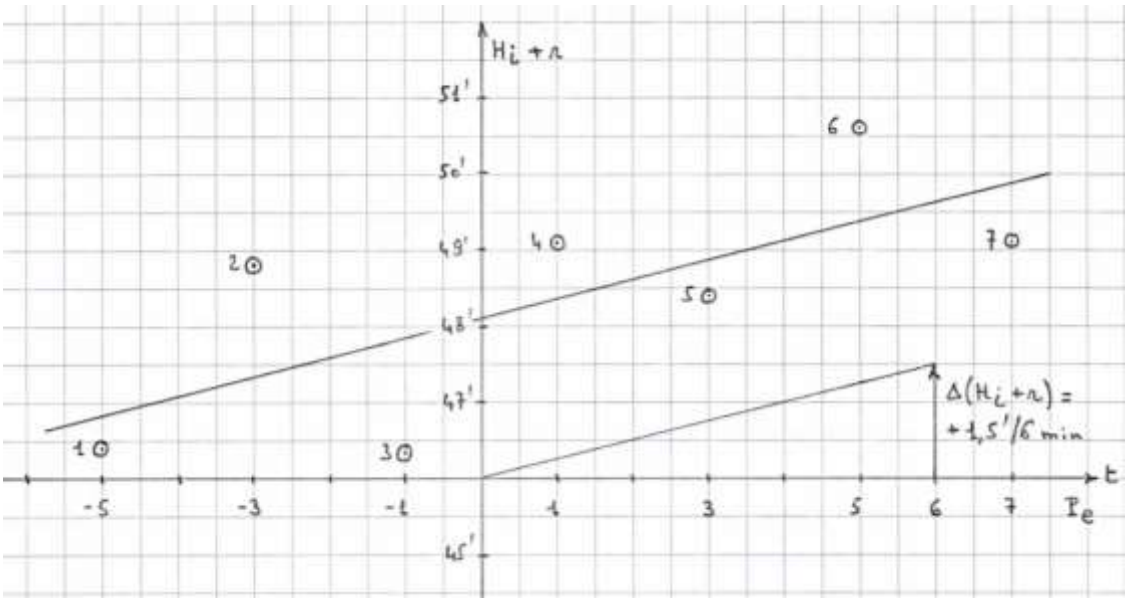


Fig : A13-2

On relève, pour l'instant du passage au méridien, une hauteur instrumentale du bord inférieur du Soleil de 52° 48,1'. Après corrections (ε + T VII des E.N.), la hauteur vraie du centre du Soleil est H_v = 52° 57,9'. La distance zénithale méridienne est donc ξ_v = 37° 02,1' et la latitude est enfin :

$$\varphi = \xi_v + D = 45° 04{,}7' \text{ N}.$$

ANNEXE 13-4

TABLES DE CALCUL DES CIRCUMMÉRIDIENNES

ANALYSE et ESSAI d'INVENTAIRE

Tables de J.- Ch. de Borda (1787) :

La table X figurant dans « Description et usage du cercle de réflexion » donne le coefficient α en fonction de la latitude comprise entre 0° et 80° et la distance polaire de l'astre comprise entre 66° et 114° ; l'intervalle d'argumentation est de 2° et α est exprimé au dixième de seconde d'arc près. La table XI donne le carré de l'angle au pôle.

Tables de Ch. Guépratte (1816) :

Charles Guépratte, directeur de l'observatoire de la marine à Brest, publia en 1816 un ouvrage d'astronomie nautique et de navigation accompagné d'un important recueil de tables permettant de résoudre les problèmes de navigation traités dans la première partie. L'ouvrage, et les tables, furent réédités en 1823 et 1839 :

Table XXXII : donnant le changement en hauteur pendant la dernière minute qui précède, et la première minute qui suit le passage au méridien. La table résout la formule : $\alpha = 1{,}9635.\cos\varphi.\cos D/\sin|\varphi - D|$. Les arguments d'entrée sont la latitude (de 0° à 70°) et la déclinaison (de 0° à 24°) ; ces arguments sont exprimés en valeurs entières, avec un intervalle d'argumentation de 1° ; le résultat est le coefficient α des circumméridiennes, exprimé en secondes d'arc et dixièmes.

Table XXXIII : elle donne le carré de l'angle au pôle estimé P_e^2.

Tables de J. Inman (1821) :

Les « Nautical Tables designed for the use of british seamen » permettent le calcul des deux termes r_1 et r_2 de la réduction au méridien, la formulation utilisée, en admettant que $|\varphi - D| \approx 90° - H_v$, étant la suivante :

$$\sin\frac{r_1}{2} = \frac{\cos\varphi.\cos D}{\sin|\varphi - D|}.\mathrm{hav}(P_e) \quad ; \quad r_2 = \frac{-r_1^2}{2}.\tan H_v$$

La table 1 donne, en fonction de la latitude (estimée) φ et de la déclinaison D : $\log[\cos\varphi.\cos D/\sin|\varphi - D|]$. Latitude et déclinaison sont exprimées en degrés entiers, de 0° à 64°. Le logarithme est donné avec trois décimales.

La table 2 est à simple entrée et donne, en fonction de l'angle au pôle P_e : $\log[\mathrm{hav}(P_e)]$. L'angle au pôle estimé est exprimé de 0 à 2 h 10 m avec un intervalle d'argumentation de 6 s. Le logarithme est de même donné avec trois décimales.

La somme des deux logarithmes donne $\log\sin(r_1/2)$. La table 3 permet d'extraire r_1 à partir de ce logarithme ; r_1 est exprimé en minutes et dixièmes.

La table 4 permet d'évaluer le second terme de la réduction, r_2, en fonction de r_1 et de la hauteur vraie de l'astre H_v.

Enfin, une table, non indexée, indique, en fonction de la latitude et de la déclinaison « (…) *the approximate hour angle at which bodies of various declinations fall within the range of the above tables*. ». On y remarque que la déclinaison est limitée à 24°.

Tables de H. Raper (1840) :

« The Practice of Navigation and Nautical Astronomy », maintes fois réédité, comporte des tables relatives au calcul de la latitude circumméridienne.

La table 47 donne l'angle au pôle limite P_L calculé à partir d'une incertitude sur l'heure de 1 minute et d'une incertitude maximale correspondante de 2' (ou 120'') sur le premier terme de la réduction r_1.

La table 48 donne, pour des hauteurs inférieures à 85°, la valeur de r_1 pour laquelle r_2 atteint 1'. Cette table, dont l'unique entrée est la hauteur H_v, est construite à partir de la formule $|r_2| = (r_1^2 . \tan H_v)/2$ (en radians) et qui amène à $r_1 = 82{,}9186/\sqrt{\tan H_v}$ si on pose r_2 = 1' et que l'on exprime r_1 en minutes d'arc. Le résultat fourni par cette table, comparé à la valeur que l'on va trouver pour r_1, indique la nécessité, ou non, du calcul de r_2.

Les tables 49 et 50 donnent des éléments du calcul de la réduction, en fonction de l'angle au pôle estimé P_e exprimé en minutes et secondes entre 0 et 31 minutes :

$$T49 : \frac{2}{\text{arc}1''} . \left(\sin \frac{P_e}{2}\right)^2 \quad ; \quad T50 : \frac{2}{\text{arc}1''} . \left(\sin \frac{P_e}{2}\right)^4$$

Pour calculer la réduction r = r_1 + r_2 (avec r_2 négative), ces éléments doivent être multipliés respectivement par $a = \cos\varphi . \cos D / \sin|\varphi - D|$ et par $a^2 . \cot|\varphi - D|$; le calcul se fait plutôt par logarithmes.

D'une autre façon, la table 69 donne $\log(\sin P_e/2)^2$ et la table 70 donne $\log(2 . \cos\varphi . \cos D / \sin|\varphi - D|)$. L'addition de ces deux logarithmes donne alors directement la valeur du logarithme de r_1 en radians, ou, plus pratiquement, de sin r_1 puisque r_1 a une faible valeur. Cette dernière quantité est enfin extraite d'une table des logarithmes sinus.

Le cas échéant (voir résultat donné par la table 48), on calculera r_2 pour préciser la valeur de la réduction finale à appliquer.

Tables de J. Th. Towson (1849) :

La première édition des « Tables for the Reduction of Ex-Meridian Altitudes » paraît en 1849 et une seconde est publiée en 1851 par ordre des « Lords Commissioners of the Admiralty ». John Towson utilise la formulation exacte mise au point par J. Robertson qu'il adapte pour faire apparaître deux quantités correctives C_1 et C_2 (ou KA' et KA'', voir l'annexe 13-1 et la figure A13-1) constitutives de la réduction au méridien.

La table 1 donne, en fonction de l'angle au pôle et de la déclinaison un nombre entier appelé « index number » (IN), représentatif de l'arc KA, et, directement, la correction C_1 en minutes et secondes d'arc. Les valeurs de déclinaison, exprimée de 0° 30' à 23° 20', figurent en entrées colonne, avec un intervalle d'argumentation de 0,5°, sauf pour la dernière valeur de 23° 20'. IN figure en entrée ligne, exprimé de 1 à 108. Aux intersections lignes/colonnes figurent l'angle au pôle et la correction C_1. La disposition de la table 1 est conforme à l'extrait reproduit ci-après.

Les valeurs d'angle au pôle varient de 2 m 50 s à 45 m 23 s ; elles ne sont pas distribuées régulièrement du fait que l'argument d'entrée est IN.

IN	DECLINATION					
	13°		14°		15°	
	Hour Angle	C_1	Hour Angle	C_1	Hour Angle	C_1
	m s	’ ”	m s	’ ”	m s	’ ”
…	…	…	…	…	…	…
19	12 40	1 10	12 45	1 15	12 49	1 20
20	13 00	1 14	13 04	1 19	13 08	1 24
21	13 19	1 17	13 24	1 23	13 28	1 28
…	…	…	…	…	…	…

La table 2 donne, en fonction de la hauteur H, en entrée colonne, et de IN caractéristique de l’arc KA, en entrée ligne, la correction C_2 exprimée en minutes et secondes d’arc. La hauteur est exprimée de 6° à 74° avec un intervalle d’argumentation de 0,5°.

La procédure d’utilisation est simple sachant de plus que l’auteur recommande de ne pas chercher à interpoler :

- entrer en table 1 avec la valeur de déclinaison arrondie au demi-degré entier le plus proche,
- rechercher, dans la colonne, la valeur d’angle au pôle la plus voisine de l’angle au pôle estimé considéré et relever les valeurs de C_1 et de IN correspondant,
- entrer en table 2 avec la valeur de la hauteur arrondie au demi-degré entier le plus proche et la valeur de IN et relever C_2,
- appliquer à la hauteur les corrections $\pm C_1 + C_2$ et en déduire la distance zénithale réduite ξ_R puis la latitude $\varphi = \xi_R + D$.

Les formules utilisées sont exactes mais, par construction, l’utilisation de la table est limitée aux petites valeurs de l’angle au pôle.

Tables de V. – M. Caillet (1854) :

Vincent-Marie Caillet est l’auteur, en 1854, d’un recueil de tables de logarithmes des nombres et des rapports trigonométriques accompagné d’un ensemble de tables astronomiques et nautiques. L’ensemble comporte plusieurs tables destinées au calcul précis de la latitude circumméridienne.

V. Caillet décompose la réduction au méridien sous la forme :

$$r = a.A - b.B \pm c.C \text{ avec } a = 2.\frac{\left(\sin {}^{P}/_{2}\right)^2}{\text{arc}1''},\quad b = 2.\frac{\left(\sin {}^{P}/_{2}\right)^4}{\text{arc}1''},\quad c = 2.\frac{\left(\sin {}^{P}/_{2}\right)^6}{\text{arc}1''}$$

les coefficients A, B et C étant des fonctions de la latitude φ et de la déclinaison D.

La table XL, partagée en deux parties donne, en fonction de la latitude et de la déclinaison, les valeurs de l’angle au pôle pour lesquelles le terme b.B atteint 55’’ et le terme c.C atteint 5’’ ; pour le plus petit des deux angles trouvés, l’erreur sur la réduction r ne pourra excéder 60’’ ou 1’. Cette table fixe ainsi l’intervalle de temps pendant lequel on pourra poser r = a.A sans erreur sensible en pratique.

La table XLI donne, en fonction de l’angle au pôle, exprimé en minutes et secondes, les quantités a et b exprimées en secondes d’arc.

La table XLIbis donne, en fonction de l’angle au pôle, exprimé de même en minutes et secondes les logarithmes de a et b avec quatre décimales. L’angle au pôle est exprimé de 0 à 1 h 10 m avec un intervalle d’argumentation de 1s, pour log a et de 10 s pour log b.

La table XLII donne le logarithme de $A = \cos\varphi.\cos D / \sin|\varphi - D|$ en fonction de la latitude et de la déclinaison exprimées en degrés entiers. La latitude est exprimée de 0° à 75° et la déclinaison de 0° à 90°.

Les tables XLIII et XLIV permettent de calculer les logarithmes de B et C en fonction de la latitude et de la déclinaison.

La réduction r est enfin calculée, terme à terme, par logarithmes. Si on se limite au premier terme, on obtient :

$$\log r = \log a + \log A$$

Après avoir vérifié que l'angle au pôle est inférieur à la limite fixée par la table XL, on travaillera exclusivement avec les tables XLIbis et XLII qui donneront ensuite r en secondes d'arc.

Tables de J.-F. Callet, E. Boitard et A. Ansart-Deusy (1855) :

Jean-François Callet (1744-1798) est l'auteur d'une table de logarithmes à 7 décimales qui fut éditée de nombreuses fois sous sa forme originale ou sous une forme simplifiée (tables « portatives »). En 1855, cette table fut complétée d'un recueil de tables nautiques conçues par E. Boitard, professeur d'hydrographie, et A. Ansart-Deusy, lieutenant de vaisseau. Cet ouvrage fit l'objet de plusieurs tirages par l'imprimeur Firmin-Didot (1855, 1863, 1871 etc).

La table XXVI de cet ouvrage donne le coefficient α des circumméridiennes en fonction de valeurs entières de la latitude et de la déclinaison, la latitude étant exprimée de 0° à 65° et la déclinaison de 0° à 24° (intervalle d'argumentation commun de 1°) ; α est exprimé en seconde d'arc et centièmes.

Les instructions d'emploi de la table XXVI permettent d'évaluer une limite à l'angle au pôle de l'astre observé. Si ε représente la valeur maximale du terme d'ordre 4 que l'on va négliger, l'angle au pôle de l'astre doit être tel que :

$$P_e^4 < \frac{2.\varepsilon}{\alpha.\mathrm{arc}1''.(\alpha.\tan H_v)}$$

Soit encore :

$$P_e < \sqrt[4]{\frac{2.\varepsilon}{\mathrm{arc}1''.\tan H_v}}.\sqrt{\frac{1}{\alpha}}$$

Ayant fixé ε = 60'', une petite table donne le nombre correspondant au premier radical en fonction de la hauteur. Ayant relevé α, il faut ensuite en prendre la racine carrée puis diviser le nombre trouvé dans la table par cette racine pour obtenir l'angle au pôle limite.

Tables de P. Hilleret (1875) :

À la suite de la seconde partie de son mémoire sur la Théorie générale des circumméridiennes, P. Hilleret présente notamment deux tables relatives au calcul de la latitude circumméridienne.

La table 1 donne, en fonction des valeurs entières de latitude (de 0° à 70°) et de déclinaison (de 0° à 24°) :

- la valeur du coefficient α des circumméridiennes exprimé en secondes d'arc et centièmes,
- la valeur T, exprimée en minutes et centièmes, de l'angle au pôle pour lequel le second terme, d'ordre 4, vaut 10''.

La table donne donc :

$$\alpha = k.a \quad \text{avec} \quad k = \frac{1}{2}.900^2.\text{arc}1'' \quad \text{et} \quad a = \frac{\cos\varphi.\cos D}{\sin|\varphi - D|}$$

puis T tel que :

$$\left(\sin\frac{T}{2}\right)^4 = \frac{10''.\text{arc}1''}{2.a^2.\cot|\varphi - D|}$$

Pour obtenir l'angle au pôle limite P_L, traditionnellement fixé pour un terme d'ordre 4 de 60'', on effectuera :

$$P_L = T.\sqrt[4]{6} \approx 1{,}565.T$$

La table 3 donne le terme d'ordre 4 de la réduction, r_2, en fonction du rapport P_e/P_L. Cette table est construite sachant que pour un angle au pôle P_L, le terme d'ordre 4 de la réduction est de 60''. On forme donc le rapport :

$$\frac{r_2}{60''} \approx \left(\frac{P_e}{P_L}\right)^4$$

L'argument d'entrée est le rapport P_e/P_L exprimé en unité et centièmes, de 0 à 2,00 ; r_2 est donnée en minutes et secondes d'arc.

En définitive, les tables de Hilleret permettent :

- de déterminer α,
- d'évaluer l'angle au pôle limite P_L,
- d'évaluer, le cas échéant, le second terme de la réduction, r_2.

Pour finir, le terme principal de la réduction, $r_1 = \alpha.P_e^2$ devra être calculé à la main ou par logarithmes.

Tables de A. C. Johnson (fin XIXe siècle) :

Brief and Simple Methods of Finding Latitude and Longitude.

Cet opuscule (18 pages + 9 pages de tables) fut publié en 1884 ; il y est exposé une méthode de calcul de la latitude résultant d'une seule observation du Soleil « *off the meridian* » à partir de la formule :

$$\text{vers}(\varphi - D) = \text{vers}(N_v) - \cos\varphi.\cos D.\text{vers}(P_e)$$

A. C. Johnson préconise un calcul expéditif avec une seule itération. Pour effectuer les opérations, l'opuscule comporte une table des versines à 4 décimales (il donne en fait 10^4.vers(x)). Après avoir déterminé vers(P_e), on doit effectuer les produits avec les deux cosinus à l'aide d'une table de point en deux étapes :

- entrer dans la table de point avec vers(P_e) comme distance et la latitude estimée φ_e comme angle de route puis relever le produit cos φ_e.vers(P_e) ;
- entrer à nouveau dans la table avec ce produit comme disance et D comme angle de route puis relever le produit final.

On relève ensuite, dans la table des versines, vers(N_v) puis on calcule la différence donnant vers(φ – D) d'où l'on déduit la valeur cherchée de la latitude. Le résultat est approché et on peut, naturellement, l'affiner en calculant une seconde itération. Johnson se satisfait du résultat avec une seule itération tant que l'angle au pôle n'excède pas 1 h à 1 h 20 m.

On Finding the Latitude and Longitude in Cloudy Weather.

Dans cet opuscule d'une soixantaine de pages, la table III permet le calcul de la réduction au méridien limitée au seul terme r_1.

r_1 étant exprimée en minutes d'arc, la formulation adoptée est de la forme :

$$r_1 = \frac{2.\cos\varphi.\sec H_v.\cos D.\mathrm{hav}(P_e)}{\mathrm{arc1}'} \qquad (\text{rappelons que } \sin|\varphi - D| \approx \cos H_v)$$

On pose $N = \cos\varphi.\sec H_v$ et, puisque la déclinaison reste « petite » (elle est limitée à 28°), $\cos D \approx 1 - D^2/2$ avec D en radians. Si on pose $X = 2.N.\mathrm{hav}(P_e)/\mathrm{arc1}'$, la réduction peut s'écrire :

$$r_1 = X - \frac{X}{2}.(D.\mathrm{arc1°})^2 \qquad (\mathrm{arc1°} = \pi/180)$$

expression dans laquelle la déclinaison est exprimée en degrés.

La partie supérieure de la table III donne le coefficient N, avec deux décimales, en fonction de la hauteur (comprise entre 8° et 64°) et de la latitude (comprise entre 0° et 60°) ; les intervalles d'argumentation sont de 2°.

La partie inférieure de la table III donne le terme principal de la réduction, X, en fonction de l'angle au pôle et du coefficient N. L'angle au pôle est exprimé en minutes, de 5 à 35 minutes avec un intervalle d'argumentation de 1 minute ; N est exprimé de 0,50 à 2,00 avec un intervalle de 0,05. X est donné en minutes d'arc et dixièmes.

En bordure droite de la table III, un tableau donne le second terme de la réduction, en fonction de la déclinaison, exprimée tous les 2° et limitée à 28°, et de X exprimé toutes les 5' jusqu'à 30'.

Un tableau complémentaire permet de traiter les observations :

- prises en des lieux de latitude comprise entre 60° et 80°,
- ou dont la hauteur est comprise entre 64° et 80°.

L'opuscule ne comporte pas de tableau relatif à un angle au pôle limite. On remarquera simplement que l'angle au pôle est limité à 35 minutes par la disposition de la table et que l'examen du tableau donnant X permet de relever, pour N fixé, son taux de variation par rapport à celui de l'angle au pôle.

Tables de C. Brent, A. F. Walter & G. Williams (1886) :

Les « Ex-Meridian Altitude Tables » ont été conçues par Charles Brent, Captain, Royal Navy, et Albert F. Walter et George Williams, tous deux Naval Instructor de la Royal Navy. Elles furent, de même, rééditées plusieurs fois (7e édition en 1914). Le petit ouvrage (91 pages) comporte une instruction d'emploi détaillée, illustrée de nombreux exemples suivis de quelques pages d'explications et de considérations sur « The Sumner Problem » et « The New Navigation ». Si on suit un ordre chronologique, c'est, semble-t-il, la première table dans laquelle le lieu de position associé à une observation circumméridienne est clairement défini ; la formule de calcul de l'azimut par l'heure et la hauteur (analogie des sinus) y est recommandée car il n'y a pas, au voisinage du méridien, d'ambiguïté possible, tout au moins tant que la hauteur est inférieure à 80°. La formule n'est pas mise en table mais les auteurs indiquent, à partir d'un exemple, comment tracer, de manière approchée, la droite de hauteur circumméridienne sans recourir au calcul d'azimut.

Trois tables sont consacrées au calcul de la latitude circumméridienne :

Table II : donnant les valeurs de l'angle au pôle limite P_L, en fonction de la latitude (de 5° en 5°, de 0° à 60°) et de la déclinaison (même intervalle d'argumentation, de 0° à 70°) ; pour cette valeur d'angle au pôle, le second terme de la réduction, r_2, atteint une minute d'arc.

Table III : donnant le coefficient α, en secondes d'arcs et centièmes, en fonction de la latitude (de 0° à 60°) et de la déclinaison (de 0° à 70°) ; l'intervalle d'argumentation est de 30'.

Table IV : donnant la valeur du premier terme de la réduction au méridien, $r_1 = \alpha . P_e^2$, en fonction de l'angle au pôle (argumenté jusqu'à 1 h 30) et du coefficient α. La réduction est exprimée en minutes et secondes d'arc.

La table I est relative à la correction des hauteurs du Soleil et des étoiles. La table V indique l'heure du passage au méridien de 60 étoiles, de quatre en quatre jours pendant toute l'année. Cette table, calculée pour une époque moyenne, a été conçue pour sélectionner les étoiles voisines du méridien à l'aube ou au crépuscule et ainsi traiter leurs observations selon la méthode des circumméridiennes.

Tables de J. Bairnson (1888) :

James Bairnson publia ses « Ex-Meridian Tables, being the shortest method yet offered to the public » probablement vers 1888. Elles furent de même rééditées, ou firent l'objet de réimpressions, à plusieurs reprises.

Cette table est constituée de paires de tableaux (l'un pour φ et D de même nom, l'autre pour le cas contraire) pour chaque valeur entière de la latitude comprise entre 0° et 65°. Chaque tableau a pour arguments d'entrée la déclinaison (tous les degrés entiers de 0° à 23°) et l'angle au pôle de 4 en 4 minutes. Les tableaux donnent directement, en minutes et secondes d'arc, la valeur de la réduction cherchée, limitée à son premier terme r_1 et calculée selon la formule :

$$r_1 = \frac{2a}{arc1'} . \left(\sin \frac{P_e}{2}\right)^2 \quad \text{avec} \quad a = \frac{\cos \varphi . \cos D}{\sin|\varphi - D|}$$

Les cases des tableaux ne sont renseignées que si le second terme de la réduction, r_2, reste inférieur à une valeur qui, sur la base d'un sondage sur quelques points, semble comprise entre 0,5' et 1'. Une table des angles au pôle limite n'est donc pas nécessaire.

On donne ci-dessous un extrait d'un tableau de la table de Bairnson.

LATITUDE 38°							
Declination same name as Latitude							
17°	18°	19°	20°	21°	22°	23°	P
' "	' "	' "	' "	' "	' "	' "	min
01 06	01 09	01 12	01 16	01 19	01 24	01 28	4
04 24	04 36	04 48	05 02	05 16	05 34	05 52	8
09 55	10 21	10 47	11 24	11 51	12 32	13 12	12
17 37	18 24	19 10	20 08	21 05	22 17	23 28	16
27 31	28 44	29 56					20
							24
							28

Pour une déclinaison de 21° et un angle au pôle de 20 minutes, le terme r_2, calculé à l'aide de la formule :

$$r_2 = \frac{2.a^2}{arc1'} . \cot|\varphi - D| . \left(\sin \frac{P_e}{2}\right)^4$$

atteint la valeur de 0,52'.

Tables de Georges Friocourt (1899) :

Les Tables de Logarithmes et de Navigation de Georges Friocourt constituent un outil d'usage général dont la seconde partie est constituée d'un ensemble de tables de navigation dont trois peuvent être utilisées pour le calcul de la latitude circumméridienne :

Table XXIX : donnant les valeurs de l'angle au pôle limite relatif aux observations du Soleil (déclinaison inférieure à 24°). Cet angle au pôle P_L est donné en fonction du coefficient α, selon la formule :

$$P_L^4 = \frac{60.900^2}{\alpha^3.\left[\frac{k^2}{3.\alpha^2} + \frac{k}{\alpha}.\tan D_0 + (\sec D_0)^2\right]}$$

a et k ayant les expressions définies en annexe 13-1 ; α est ici exprimé en secondes d'arc et D_0 est fixée à 24°. Pour toute valeur d'angle au pôle inférieur à P_L, le second terme de la réduction, r_2, est inférieur à 1' et sera considéré comme négligeable (D < 24°).

Table XXX : donnant les valeurs du coefficient α, en secondes d'arc et centièmes en fonction de la latitude et de la déclinaison, exprimées pour toutes valeurs entières, respectivement de 0° à 70° et de 0° à 29°.

Table XXXII : cette table a été conçue à l'origine par É. Guyou pour construire un arc de la courbe de hauteur (C) au voisinage du méridien de l'astre. Elle donne l'angle au pôle P en fonction du coefficient α et de la distance verticale MH entre la courbe et son parallèle limite. Cette distance verticale MH n'étant autre que la réduction αP^2 cherchée, on entrera dans la table, en ligne, avec α jusqu'à trouver une valeur d'angle au pôle aussi voisine que possible de l'angle au pôle estimé P_e. L'argument de la colonne considérée, MH, est la réduction cherchée.

Nota 1 : cette table XXXII est reproduite d'après la table XVI de l'ouvrage de Guyou : « Les Problèmes de Navigation et la Carte Marine » (1896).

Nota 2 : la table n'ayant pas été conçue pour le calcul de la réduction, il est souvent apparu plus simple d'effectuer le produit $\alpha.P^2$ « à la main » ou par logarithmes.

Tables de H. S. Blackburne (à partir de 1903) :

H. S. Blackburne publia, à partir de 1903 deux ouvrages principaux : « Tables for Azimuths, Great-Circle Sailing and Reduction to the Meridian » puis « Tables of Calculated Hour-Angles and Altitude Azimuth Tables » ; des tables de calcul de la réduction au méridien y figurent sous deux formes :

1) Table donnant la réduction unitaire calculée en fonction du coefficient Pagel ou des termes A et B des tables d'azimut ABC (voir chapitre 14) ; l'expression de la réduction unitaire est alors :

$$\text{réduction pour 1 min} = \frac{15}{2.(A + B)}$$

La réduction à appliquer à la hauteur mesurée de l'astre résulte du produit de cette réduction unitaire par l'angle au pôle exprimé en minutes ; la table est précédée de la donnée des angles au pôle limites. D'autres formules, de conception voisine, ont également été utilisées ; elles ont évolué d'une édition à l'autre.

2) Table permettant de calculer la réduction lorsque l'angle au pôle excède la valeur limite. Le principe d'évaluation de la réduction consiste à effectuer préalablement un calcul précis de l'azimut, par exemple à l'aide de la formule :

$$\sin A_z = \frac{\sin P \,.\cos D}{\cos H}$$

que l'on calculera par logarithmes. En reprenant les notations utilisées dans l'annexe 13-1, la table résout successivement les deux formules constituées des mêmes opérations :

$$\tan PK = \cos P_e . \cot D \quad \text{et} \quad \tan ZK = \cos A_z . \cot H_v$$

La table donne directement les quantités $|D - (90° - PK)|$ (en fonction de P_e et D) puis $|90° - H_v - ZK|$ (en fonction de A_z et H_v) dont la somme (ou la différence) constitue la réduction au méridien.

Tables de P. Bossen et D. Mars (1904, 1909 et 1913) :

Publiées pour la première fois aux Pays-Bas en 1904 sous le titre de « Zeevaartkundige Tafelen voor Circum-meridiaan » (Nautical Tables for Ex-Meridian Observations), ces tables, mises au point par deux professeurs de navigation à Amsterdam, permettent le calcul de la réduction au méridien résultant de ses deux termes, en P^2 et en P^4, élargissant ainsi le champ d'application de la méthode ; elles donnent également accès à l'azimut de l'astre, fournissant ainsi l'ensemble des éléments de construction de la droite de hauteur circumméridienne. Ces tables ont essentiellement été conçues pour les observations d'étoiles : à l'instar des ouvrages de H. S. Blackburne (voir chapitre 14), on y trouve tous les éléments nécessaires à la préparation d'observations d'étoiles au voisinage des méridiens supérieur et inférieur. Ces tables furent rééditées en 1909 et 1913.

Tables de A. Rust (1908 et 1918) :

Armistead Rust publia en 1908 un recueil de tables : « Ex-Meridian Altitude, Azimuth and Star-Finding Tables ». Concernant le calcul des observations circumméridiennes, A. Rust a repris les dispositions et la présentation des tables de J. Bairnson en élargissant le domaine d'utilisation en déclinaison qui est porté à l'intervalle $[0°, 71°]$. Ainsi, en envisageant les deux cas de noms respectifs de la latitude et de la déclinaison, 6 paires de tableaux sont nécessaires pour chaque degré entier de latitude, chaque tableau couvrant un intervalle de 12° en déclinaison. Les éléments calculés résultent du produit $\alpha . P^2$ et donnent donc le premier terme, r_1, de la réduction. A. Rust y précise ensuite les valeurs du coefficient α, en secondes d'arc, et de son logarithme, la valeur de l'angle au pôle limite qui correspond, sensiblement, à une valeur du second terme de la réduction de 45'' et la hauteur méridienne H_0 correspondant à la latitude et la déclinaison de la colonne du tableau. On obtient ainsi, en reprenant l'extrait de la table de Bairnson et en le renseignant avec les éléments calculés par Rust :

LATITUDE 38°							
Declination same name as Latitude							
17°	18°	19°	20°	21°	22°	23°	P
' "	' "	' "	' "	' "	' "	' "	min
01 06	01 09	01 11	01 15	01 18	01 23	01 28	4
04 24	04 35	04 48	05 01	05 16	05 33	05 52	8
09 54	10 19	10 47	11 17	11 52	12 29	13 12	12
17 38	18 21	19 09	20 03	21 04	22 11	23 28	16
27 32	28 40	29 56	31 20	32 56	34 40	36 40	20
39 39	41 47	43 05	45 07	47 25	49 55	52 48	24
53 58	56 11	58 41	61 25	64 33	67 57	71 52	28
70 29	73 23	76 38	80 13	…	…	…	32
…	…	…	…	…	…	…	36
…	…	…	…	…	…	…	40
4,13	4,30	4,49	4,70	4,94	5,20	5,50	α''
0,61595	0,63347	0,65225	0,67210	0,69373	0,71600	0,74036	logα
28	27	26	25	24	23	22	P_L min
69°	70°	71°	72°	73°	74°	75°	H_0

A. Rust donne ensuite un diagramme permettant d'évaluer, le cas échéant, le second terme de la réduction, r_2, en fonction de la hauteur méridienne H_0 et du premier terme de cette réduction, r_1, selon la formule :

$$\sin r_2 = \frac{1}{2}.(\sin r_1)^2.\tan H_0$$

Le recueil comporte deux tables permettant d'affiner le calcul de latitude en interpolant dans les tableaux et en tenant compte de la différence entre latitude de calcul (estimée) et latitude réelle ; l'auteur précise que leur usage n'est requis que si on désire un calcul de haute précision.

Dans son ouvrage « Practical tables for Navigators and Aviators » (1918), A. Rust fait figurer une table permettant le calcul du premier terme de la réduction en fonction de l'azimut de l'astre et de la latitude. Cette table est analogue à celle proposée notamment par H. B. Goodwin.

Tables de Percy L. H. Davis (1918) :

Ces tables ont été publiées pour la première fois en 1918 sous le titre de Davis' Ex-Meridian Tables ; elles ont été rééditées en 1952. Elles comportent en première partie les tableaux donnant la réduction au méridien en fonction de la latitude, la déclinaison et l'angle horaire (110 pages) et en seconde partie les tableaux donnant l'azimut de l'astre en fonction de ces mêmes arguments (92 pages) ; la présentation de cette seconde partie est identique à celles des tables d'azimut de Burdwood et Davis. Les présentes tables permettent donc de calculer l'ensemble des éléments d'une droite de hauteur circumméridienne. L'argumentation est limitée à 34° pour la déclinaison, à 64° pour la latitude et à 75 minutes pour l'angle au pôle. La tabulation distingue les cas de latitude et déclinaison de même nom et de noms contraires.

P. L. H. Davis utilise une formulation voisine de celle de Cornelis Douwes simplifiée par Inman (également employée par A. C. Johnson in « Brief and Simple Methods of Finding Latitude & Longitude », 1884) :

$$\mathrm{hav}(\xi) = \mathrm{hav}(\varphi - D) + \cos\varphi\,.\cos D\,.\,\mathrm{hav}(P)$$

Expression dans laquelle $\xi = 90° - H$ est la distance zénithale, φ est la latitude, D la déclinaison de l'astre et P son angle au pôle. Si on fixe les trois arguments φ, D et P, il est possible de calculer ξ puis d'écrire que la réduction r est définie par :

$$r = \xi - |\varphi - D|$$

La réduction, calculée selon une formule exacte, peut ainsi être mise en table en fonction des trois arguments considérés.

L'argument page est celui correspondant à la plus petite des valeurs latitude ou déclinaison (en valeur absolue) ; une page est représentative d'un nombre de degré entier compris entre 0° et 34°, avec un intervalle de 1° ; l'argument page est doublé considérant les deux cas de latitude et déclinaison de même nom ou de noms contraires.

L'argument colonne est celui correspondant à la plus grande des valeurs latitude ou déclinaison (en valeur absolue) ; chaque colonne est représentative d'un nombre entier de degré, compris en 0° et 64°, avec un intervalle d'argumentation de 2°.

L'argument ligne est l'angle au pôle, exprimé toutes les minutes rondes de 1 minute à 75 minutes.

Pour le triplet (φ, D, P) considéré, la table donne la réduction r au dixième de minute d'arc près. Cette réduction est inscrite en caractères gras si l'effet des incertitudes sur la latitude et l'angle au pôle estimés reste négligeable ; la réduction est inscrite en caractères ordinaires au-delà. Davis n'indique pas le critère qu'il a utilisé pour fixer ce

qu'il appelle « *the usual limits for ex-meridian observations* » établissant ainsi la frontière entre les caractères gras et normaux.

En pratique, les éléments connus sont :

- la hauteur vraie H_v de l'astre, issue de la mesure (distance zénithale ξ_v),
- les coordonnées φ_e et G_e du point estimé à l'instant de la mesure,
- la déclinaison D et l'angle au pôle estimé P_e de l'astre.

La réduction r sera évaluée dans la table avec les arguments φ_e, D et P_e. Si cette réduction figure en chiffres gras, on calculera la latitude du point déterminatif :

$$\varphi = \xi_v - r + D$$

On évaluera ensuite l'azimut avec la seconde partie de la table et on tracera la droite de hauteur circumméridienne avec les éléments trouvés. Si la réduction trouvée figure en chiffres ordinaires, on évaluera de même la latitude que l'on comparera à la latitude estimée. Un écart important conduira à effectuer une itération en utilisant la valeur de latitude trouvée. Davis ne précise pas de valeur limite d'écart conduisant à effectuer une itération ; il indique simplement :

> « *Whatever the error in the D. R. latitude, its effect upon the latitude found may be eliminated by repeating the use of the table until the assumed and the final latitudes are identical*. »

Extrait de table :

CONTRARY NAMES		DEC or LAT *(the Greater)*		LAT or DEC *(the Smaller)*	**17°**
Hour Angle (m)	52°	54°	56°	58°	...
...	...	...	...	...	...
29	**17,3'**	**16,3'**	**15,4'**	**14,5'**	...
30	**18,5'**	**17,5'**	**16,5'**	**15,5'**	...
31	**19,8'**	**18,7'**	**17,6'**	**16,5'**	...
32	**21,1'**	**19,9'**	**18,7'**	**17,6'**	...
...	...	...	...	...	...

Tables de L. F. Hansen (1919):

Ces tables furent calculées par le Captain L. F. Hansen et publiées pour la première fois en 1919. Elles ont été rééditées en 1954 puis en 1978 après avoir été revues et augmentées par Charles Cotter ; elles ont ensuite été réimprimées en 1999 et 2010 ; ces tables s'apparentent à celles de Bairnson et de Rust.

Ayant remarqué que, pour un angle au pôle donné, plusieurs couples de valeurs de latitude et de déclinaison donnent une réduction au méridien de même valeur à une minute d'arc près, Hansen eut l'idée de regrouper les résultats dans un même tableau dont l'angle au pôle constitue l'unique argument. Ainsi, par exemple, les couples latitude/déclinaison de (24°/1°), (28°/6°), (31°/10°), (36°/17°), (38°/20°), (40°/23°), (6°/-18°), (18°/-6°) conduisent aux mêmes valeurs de réduction arrondies à la minute ; ces valeurs sont indiquées dans le tableau ci-après.

LHA	00’	15’	30’	45’
…	…	…	…	…
01°	0° 01’	0° 02’	0° 03’	0° 04’
02°	0° 05’	0° 06’	0° 08’	0° 09’
03°	0° 11’	0° 13’	0° 15’	0° 17’
…	…	…	…	…
06°	0° 43’	0° 47’	0° 51’	0° 55’
07°	0° 59’	1° 03’	1° 07’	1° 12’
08°	1° 16’	1° 21’	1° 26’	1° 31’
…	…	…	…	…
14°	3° 42’	3° 49’	3° 57’	4° 04’
15°	4° 12’			

Hansen s’est donc attaché à calculer l’ensemble des tableaux nécessaires pour couvrir les intervalles de 0° à 23° en déclinaison et de 0° à 60° en latitude et à construire une table index permettant d’identifier le tableau correspondant à l’observation à traiter. 543 tableaux ont été répertoriés en fonction des valeurs entières des différents couples de latitude et déclinaison ; le tableau représenté ci-dessus porte le numéro 345.

Les réductions sont calculées avec une formule exacte, les tableaux étant tronqués dès lors que la réduction excède 5° ; l’angle au pôle est exprimé de 0° à 15° au maximum avec un intervalle de 15’.

Tables d’Alexander Mackenzie (1920) :

Alexander Mackenzie, capitaine au long-cours et officier de réserve de l’US Navy, publie en 1920 un opuscule visant essentiellement à calculer la réduction au méridien à l’aide d’une règle à calcul. Il donne cependant les éléments nécessaires si l’on ne dispose pas de cet outil. L’opuscule comporte un texte explicatif d’une trentaine de pages suivis de 5 tables numérotées de 1 à 5.

La formulation utilisée est celle, classique, du développement limité au second ordre :

$$r_1 = \frac{10800}{\pi}.2.\left(\sin\frac{P}{2}\right)^2.\frac{\cos\varphi.\cos D}{\sin|\varphi - D|} \approx \alpha.P^2$$

Expression dans laquelle φ, D et P ont leur signification usuelle et r_1 est le terme du 2e ordre de la réduction, ici exprimé en minutes d’arc ; α est le coefficient des circumméridiennes.

La table 1 donne le coefficient α, exprimé en minutes d’arc, en fonction de la latitude et de la déclinaison, soit :

$$\alpha = \frac{\pi}{96}.\frac{\cos\varphi.\cos D}{\sin|\varphi - D|}$$

La latitude est argumentée de 0° à 71° 30’ et la déclinaison de 0° à 60°, chacune avec un intervalle d’argumentation de 30’ ; sont distingués les cas de latitude et déclinaison de même nom et de noms contraires. Le coefficient α est inscrit avec 4 décimales.

La table 2 donne les logarithmes des nombres compris entre 100 et 999 avec 4 décimales.

La table 3 donne ce que Mackenzie appelle « Emergency Logarithm of Hour Angle » que l’on peut symboliser par ElogP. On vérifie que ce logarithme a pour expression :

$$\text{ElogP} = \log\left[4.\left(\frac{720}{\pi}\right)^2.\left(\sin\frac{P}{2}\right)^2\right] \approx \log P^2 \quad \text{(dans ce dernier membre, P est exprimé en minutes)}$$

ElogP est donné avec 4 décimales pour un angle au pôle compris entre 1 et 100 minutes, avec un intervalle d'argumentation de 30 s.

La table 4 donne le terme d'ordre 4 de la réduction, r_2, en fonction de r_1 et de $|\varphi - D|$.

La table 5 donne une correspondance entre l'intercept i de la droite circumméridienne et la différence $\Delta\varphi$ entre latitude observée sur le méridien estimé et latitude estimée : $\Delta\varphi - i = i.(\sec A_z - 1)$.

Si on dispose d'une règle à calcul : on recherche alors le coefficient α dans la table 1, en fonction de la latitude et de la déclinaison puis on effectue, avec la règle, le produit $\alpha.P^2$. L'opération est alors très simple à effectuer. Elle peut aussi être effectuée « à la main » : élévation au carré de l'angle au pôle (en minutes) puis produit.

Si on souhaite procéder par logarithmes : il convient d'abord de rechercher α à l'aide de la table 1, puis de prendre son logarithme dans la table 2. La table 3 donne ensuite ElogP en fonction de l'angle au pôle. La somme de ces deux logarithmes est le logarithme de la réduction qui sera extrait de la table 2.

La mise en évidence de l'utilité d'une règle à calcul[84] pour ce genre d'opérations constitue la seule particularité de cet opuscule. L'utilité de la table 5 est pour le moins contestable puisque source de confusion.

Tables de J. W. Norie :

Les premières éditions des tables de J. W. Norie ne comportaient pas de tables spécifiques pour traiter les observations circumméridiennes[85] ; celles-ci y ont probablement été incluses dans la seconde moitié du XIXe siècle. Le descriptif ci-dessous est relatif aux tables figurant dans l'édition de 1938. Concernant les calculs de latitude circumméridienne, on trouve :

Table 1 donnant le coefficient α, en secondes d'arc et dixièmes, en fonction de la latitude et de la déclinaison, avec un intervalle d'argumentation de 1° ; latitude et déclinaison sont exprimées en degrés entiers, respectivement de 0° à 83° et de 0° à 63°.

Table 2 donnant le premier terme de la réduction, r_1, en fonction de α et de l'angle au pôle P. P est exprimé en minutes d'heures, avec un intervalle d'argumentation de 20 s, jusqu'à 60 minutes ; r_1 est donnée en minutes d'arc et dixièmes.

Table 3 donnant le second terme de la réduction, r_2, en fonction de la hauteur et de r_1 ; r_2 est exprimé en minutes d'arc et dixièmes.

Table 4 donnant l'angle au pôle limite P_L, en fonction de α. L'examen de cette table montre qu'elle est identique à la table XXIX de Friocourt. Elle indique donc, pour α donné, jusqu'à quelle valeur d'angle au pôle le second terme de la réduction peut être négligé (la table 4 est, à la limite, inutile compte tenu de l'existence de la table 3, qui donne la valeur de r_2).

Les mêmes tables figurent dans l'édition de 2007, avec quelques modifications de détail.

Tables de Charles Cornet (1928) :

[84] Voir également à ce sujet, et sensiblement à la même époque, les travaux de E. et M. de Catalano (Tables Zoniques) et du Captain Le Patourel (The Slide Rule Manual for the Use of Seamen).
[85] Tout au moins jusqu'à la 8e édition (1836) inclusivement.

Charles Cornet publia en 1928 un recueil de tables de navigation sous le titre de « Tables Nautiques » (voir chapitre 9). Outre les tables de calculs d'azimut et de hauteur, l'opuscule comporte une table permettant de calculer la latitude circumméridienne.

C. Cornet part de la formule :

$$r = \frac{2.\cos\varphi.\cos D}{\sin|\varphi - D|}.\left(\sin\frac{P}{2}\right)^2 - \left[\frac{2.\cos\varphi.\cos D}{\sin|\varphi - D|}.\left(\sin\frac{P}{2}\right)^2\right]^2.\frac{\cot|\varphi - D|}{2}$$

qu'il transforme et écrit, en radians :

$$r = r_1 - \frac{r_1^2}{2}.\tan H_0 = r_1 - r_2$$

avec :

$$90° - H_0 = |\varphi - D|, \qquad r_1 = \frac{P^2}{2.|\tan\varphi - \tan D|} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{r_1^2}{2}.\tan H_0$$

C. Cornet calcule ensuite les deux termes de la réduction par logarithmes. Pour éviter les nombres décimaux et les valeurs négatives, il utilise ce qu'il appelle des « logarithmes spéciaux » de la forme :

$$L(x) = a.\log x + b$$

a et b étant deux constantes. Les logarithmes spéciaux utilisés sont successivement :

- $L(A) = 1000.[1 - \log|\tan\varphi - \tan D|]$,
- $L(P^2) = 1000.[4 + \log(P^2/2) - \log \text{arc}1']$, avec P en radians dans le calcul (l'entrée dans la table se fait avec P en minutes d'heures),
- $L(r_1) = 1000.[5 + \log r_1]$ avec r_1 en minutes d'arc,
- $L(r_1^2) = 1000.[4 + \log(r_1^2/2) + 2.\log 15 - \log \text{arc}1']$, avec r_1 en radians dans le calcul (l'entrée dans la table se fait avec r_1 en minutes d'arc),
- $L(H_0) = 1000.[-1 - \log\tan H_0 + 2.\log 15]$,
- $L(r_2) = 1000.[5 + \log r_2]$ avec r_2 en minutes d'arc.

On recherche donc dans la table les quantités L(A) et $L(P^2)$ dont on fait la somme pour obtenir $L(r_1)$; on extrait r_1 de la table. On recherche ensuite $L(r_1^2)$ et $L(H_0)$ dont on fait la différence pour obtenir $L(r_2)$; on extrait enfin r_2 de la table et on calcule la réduction $r = r_1 - r_2$.

La table, présentée en trois tableaux tient sur une seule page ; elle permet, au prix de quelques complications dans la formulation (dues aux différentes unités employées : radians, minutes d'arc et de temps), d'évaluer successivement les différents logarithmes spéciaux et d'extraire les deux termes de la réduction. Latitude et déclinaison sont argumentées de 0° à 60° avec un intervalle d'argumentation de 0,5° ; l'angle au pôle est argumenté de 1 à 60 minutes avec un intervalle de 1 minute, la hauteur de 12° à 86° avec un intervalle de 1° ; r_1 et r_2 sont exprimées en minutes, jusqu'à 60', toutes les minutes.

Tables de S. M. Burton (1936) :

S. M. Burton, capitaine au long-cours, publia, en 1936, les « Burton's Nautical Tables » qui constituent un recueil de tables conçues pour traiter les problèmes courants de navigation ; comme les tables de Norie, elles sont plutôt adaptées aux usages des marins de commerce. Le processus de calcul de la réduction et la disposition des tables (qui portent ici les numéros 28, 29, 30 et 31) sont identiques à ceux observés dans les tables de Norie, à quelques points de présentation près, à l'exception de la table des angles au pôle limite qui donne une valeur calculée sur la base des deux termes de la réduction.

S. M. Burton publia également en 1944 un autre recueil de tables de navigation, « Burton's Four-Figure Navigation Tables » ; comme le titre l'indique, les logarithmes et les valeurs de rapports trigonométriques figurant dans ces tables sont exprimés avec 4 décimales. On trouve, dans ce recueil, des tables de calcul de la réduction au méridien identiques, à quelques détails près, à celles figurant dans les « Burton's Nautical Tables ».

Tables de W. Myerscough & W. Hamilton (1939) :

Le recueil de tables de navigation « Rapid Navigation Tables » (voir chapitre 8) comporte, sur deux pages, quatre tableaux relatifs au calcul de la latitude circumméridienne.

Le calcul de la réduction est ici limité à celui de son premier terme ; la formule utilisée, aisée à déduire de la formule générale, est la suivante :

$$\csc\frac{r_1}{2} = \frac{\sec\varphi.\sec D.\cos H_0}{\mathrm{hav(P)}}$$

Le calcul s'effectue par logarithmes, ou plus exactement, comme avec la table de C. Cornet, avec des « logarithmes spéciaux », permettant d'éviter les valeurs négatives et les décimales :

- la table A donne : $A = -1000.\log \mathrm{hav(P)} + 1000.\log \mathrm{hav}20° = -1000.\log \mathrm{havP} - 1521$,
- la table B donne : $B = 1000.\log\sec\varphi$ et $1000.\log\sec D$,
- la table C donne : $C = 1000.\log\cos H_0 + 1400$,
- la table D donne : $D = 1000.\log\csc(r_1/2) - 121$.

On recherche, dans les 3 tableaux A, B et C les logarithmes spéciaux des quatre variables d'entrée et on en fait la somme. Cette somme est l'argument d'entrée dans la table D permettant d'extraire la réduction r_1. L'angle au pôle est exprimé de 0° à 20° avec un intervalle de 5', latitude et déclinaison de 0° à 80° avec un intervalle de 15', la hauteur de 10° à 87° avec un intervalle de 15'. La réduction est exprimée en degrés et minutes et arrondie à la demi-minute entière.

Il n'y a pas de tableau fournissant des valeurs d'angle au pôle limite.

Tables de V. Georges (1944) :

V. Georges utilise une formulation exacte, indiquée en annexe 13-1, pour évaluer la hauteur estimée et l'azimut relatifs à une observation circumméridienne, le calcul s'effectuant par logarithmes. La procédure de calcul est la suivante (les notations sont celles de la figure 13-1) :

1) Calcul du complément de l'arc PK ou latitude du point K que V. Georges note D' : $\cot D' = \cos P_e.\cot D$;

2) Calcul de l'arc KA, noté y : $\sin y = \sin P_e . \cos D$;

3) Calcul de l'arc Z_eK, Z_e étant le point estimé, noté $x = \varphi_e - D'$;

4) Calcul de la hauteur estimé H_e avec x et y : $\sin H_e = \cos x . \cos y$; calcul de l'intercept ;

5) Calcul de l'azimut : $\tan A_{zQ} = \tan y/\sin x$.

Les tables de V. Georges ont été essentiellement conçues en vue du calcul des éléments de la droite Marcq de Saint-Hilaire selon une formulation utilisant les rapports trigonométriques cosinus et haversine ; les logarithmes de ces rapports figurent donc dans l'ouvrage. Pour pouvoir calculer la hauteur estimée selon la procédure ci-dessus, V. George a ajouté deux tables donnant respectivement accès à D' et à $\log\cos y$ en fonction de l'angle au pôle et de la déclinaison et une table donnant l'azimut en fonction de x et de $\log\cos y$. L'argumentation est limitée en angle au pôle à 7,5°.

Tables 902 (1953) et 900 (1963) :

Ces tables furent publiées par le Service Hydrographique de la Marine pour équiper les bâtiments de la Marine Nationale en 1953 (tables 902) et 1963 (tables 900). La première est d'abord une table d'azimut et la seconde un recueil de tables de navigation réunissant notamment les tables de Dieumegard et de Bataille. Dans ces deux ouvrages figurent des tables de calcul de la latitude circumméridienne conçues par H. Dyèvre, dans les années 1930.

Une première table donne le coefficient α en fonction de la latitude et de la déclinaison ; la latitude est exprimée de 0° à 70° et la déclinaison de 0° à 30° avec un intervalle d'argumentation commun de 1°. α est exprimé en 1/1000 de minute d'arc.

Une seconde table donne la réduction, en fonction de α et de l'angle au pôle estimé P_e exprimé en minutes ; la réduction, limitée à son premier terme, $\alpha.P^2$ est donnée en minutes d'arc et dixièmes.

Enfin, une troisième table donne l'angle au pôle limite évalué à partir d'une incertitude sur l'heure de 5 s et de l'incertitude maximale correspondante sur la réduction fixée à 0,1' (ou encore 30 s et 0,6').

Dans le document n° 900, ces trois tables sont réunies en fin d'ouvrage ; elles sont par contre dispersées dans le document n° 902 : α figure à la page relative aux valeurs de latitude et déclinaison considérées, la réduction est mise en table en fin d'ouvrage et le tableau des angles au pôle limite se trouve dans les instructions d'emploi.

Tables du Reed's Nautical Almanac :

Pour évaluer la réduction au méridien, les auteurs du Reed's Nautical Almanac proposent un calcul par logarithmes du développement de Delambre. Une première table donne le logarithme du carré du sinus du demi-angle au pôle, une seconde, les logarithmes des cosinus de la latitude et de la déclinaison, une troisième le logarithme de la sécante de la hauteur méridienne et une quatrième permet d'extraire le terme principal r_1 de la réduction cherchée. Enfin, une cinquième table donne, si nécessaire, en fonction de r_1 et de la hauteur méridienne, le terme complémentaire r_2 de la réduction.

Tables du Brown's Nautical Almanac (début XXe puis début XXIe siècle) :

Table de 1re génération : elle est construite sur la base de la formule donnant la réduction en fonction de l'azimut de l'astre et de la latitude (voir annexe 13-1), soit :

$$r = 15.\sin A_{zQm}.\cos\varphi\,.P_e$$

A_{zQm} représente l'azimut calculé pour le demi-angle au pôle (azimut moyen) ; l'angle au pôle étant exprimé en minutes d'heure, la réduction est ici donnée en minutes d'arc. La table du Brown's Nautical Almanac est à double argument, latitude de 0° à 60° et azimut moyen (pour le demi-angle au pôle) de 0° à 10° avec un intervalle de 30', et donne la réduction unitaire (ou taux de variation pour une minute de temps). La réduction cherchée résultera donc du produit de cette réduction unitaire par l'angle au pôle exprimé en minutes d'heure.

L'angle au pôle limite n'est pas indiqué mais l'argumentation en azimut est limitée à 10°.

Table de 2e génération : imaginée par un certain Captain G. P. Hadjillias[86] et revue par Ivica Tijardović et son père Stipe, tous deux capitaines au long-cours (Croatie), elle permet d'évaluer rapidement, à partir d'un document de deux pages, l'azimut et la réduction au méridien.

[86] Voir l'article de P. Hugon « Une nouvelle table de circumméridiennes » paru dans la revue de l'IFN en 1964.

La table à double argument résout deux formules : $f = \cos x \,.\, \sin y$ d'une part, $c = \tan^{-1}[\cos y \,.\, \cot x] - (90° - x)$ de l'autre. Le calcul de la réduction peut ainsi s'effectuer de deux façons différentes.

1re méthode : on vérifie facilement $f = \sin P_e \,.\, \cos D = \sin A_{zQ} \,.\, \cos H$; une première entrée dans la table en fonction de l'angle au pôle P_e et de la déclinaison D donne le facteur f et une seconde en fonction de ce facteur et de la hauteur H donne l'azimut A_{zQ}. Le sinus de l'azimut moyen A_{zQm} étant peu différent de la moitié de celui de A_{zQ}, on écrit ensuite :

$$r \approx 0{,}5 . \sin A_{zQ} . \cos \varphi \,.\, P_e = 0{,}5 . f' . P_e$$

le facteur f ' étant trouvé dans la table en fonction de la latitude φ et de l'azimut A_{zQ}. La réduction r est ici exprimée dans la même unité que l'angle au pôle.

2e méthode : elle résulte de l'application de la formulation exacte explicitée au début de l'annexe 13-1 ; la réduction r cherchée est la somme (ou la différence suivant le cas de figure) des deux quantités correctives qui avaient été respectivement notées KA' et KA'' sur la figure A13-1 et que la table permet de trouver directement, la première c_1 en fonction de la déclinaison D et de l'angle au pôle P_e, la seconde c_2 en fonction de la hauteur H et de l'azimut A_{zQ} :

$$c_1 = \tan^{-1}[\cos P_e \,.\, \cot D] - (90° - D) \; ; \;\; c_2 = \tan^{-1}\left[\cos A_{zQ} \,.\, \cot H\right] - (90° - H)$$

L'angle au pôle limite n'est pas indiqué mais l'argumentation en azimut est limitée à un facteur f de 0,13053..

Exemple : la latitude estimée étant φ_e = 42° N, on observe le soleil à une hauteur vraie H_v = 35° 38' ; son angle au pôle estimé étant P_e = 4° 00' W et sa déclinaison D = 12° 32' S, calculer la latitude φ. L'extrait utile de la table est donné ci-après.

1re méthode : le facteur f utile est 0,06976 qui fixe la colonne dans laquelle rechercher l'azimut qui est de 4,9° ; l'interpolation à vue sur la ligne correspondant à la latitude de 42° donne un facteur f' de 0,063 ; la réduction cherchée est donc : r = 0,5.0,063.240' = 7,6' que l'on arrondira à 8'.

2e méthode : on trouve directement c_1 = 2' et c_2 = 6' soit une réduction $r = c_1 + c_2$ = 8'.

La distance zénithale vraie étant ξ_v = 54° 22', on obtient une distance zénithale réduite de ξ_r = 54° 14' d'où une latitude $\varphi = \xi_r + D$ = 41° 42' N.

Argument x **D, H, φ**	**FACTEUR F**					
	…	0,06105		0,06976		…
		y	**c**	**y**	**c**	
0° … 12° 13° … 35° 36° … 42° … 80°	…	3° 30' … 3° 35' 3° 36' … 4° 16' 4° 20' … 4° 43' … 20° 35'	0' … 1' 1' … 5' 5' … 6' … 38'	4° 00' … 4° 05' 4° 06' … 4° 53' 4° 57' … 5° 23' … 23° 41'	0' … 2' 2' … 6' 6' … 8' … 50'	…

Tables figurant dans le Bowditch :

La table XXXII des éditions anciennes du Bowditch (1842) donne directement le coefficient α au dixième de seconde d'arc près en fonction de la latitude (de 0° à 70°) et de la déclinaison (de 0° à 24°) avec un intervalle de 1° ; la table XXXIII donne le carré de l'angle au pôle.

La table 29 des éditions récentes (1975) donne de même le coefficient α avec une échelle des déclinaisons étendue à 63° ; la table 30 donne directement la réduction en minutes d'arc et dixièmes, en fonction de α et de l'angle au pôle dont l'argumentation est limitée à 7°.

ANNEXE 14-1

POSITION-LINE STAR TABLES

H. B. GOODWIN

Formule de calcul de la réduction au méridien :

La formule retenue par H. B. Goodwin est de la forme :

$$r = 15.\cos\varphi_e.\sin\frac{A_{zQ}}{2}.P_e$$

Dans cette expression, l'angle au pôle P_e est exprimé en minutes d'heures et r en minutes d'arc. A_{zQ} est l'azimut par quadrant calculé pour l'instant de l'observation ; $A_{zQ}/2$ est très peu différent de A_{zQm}, valeur calculée pour le demi-angle au pôle et utilisé dans la formule indiquée en annexe 13-1.

La réduction unitaire, $15.\cos\varphi_e.\sin(A_{zQ}/2)$, est mise en table en fonction du demi-azimut $A_{zQ}/2$ et de la latitude estimée sous le titre de « rate of change of altitude per minute of time ». L'argumentation va de 0° à 60° en latitude et 0° à 10° en demi-azimut avec un intervalle identique de 30'.

Principe du calcul de la réduction au premier vertical et à la digression azimutale maximale :

Lors du passage d'un astre au premier vertical, son angle au pôle P_{1v} et sa hauteur H_{1v} sont donnés par les formules suivantes :

$$\cos P_{1v} = \tan D.\cot\varphi \quad ; \quad \sin H_{1v} = \sin D.\csc\varphi \quad \text{ou} \quad \tan H_{1v} = \cot P_{1v}.\sec\varphi$$

Lorsque, latitude et déclinaison étant de même nom, la déclinaison est supérieure à la latitude, l'astre ne passe plus au premier vertical : son parallèle diurne ne coupe plus tous les verticaux mais est tangent à deux verticaux limite d'azimut M et 360° - M. Lorsque l'astre passe au point de tangence, on observe sa digression azimutale maximale et le triangle de position est rectangle en A. L'angle au pôle P_{DAM}, la hauteur H_{DAM} et l'azimut M sont donnés par les formules suivantes :

$$\cos P_{DAM} = \tan\varphi.\cot D \quad ; \quad \sin H_{DAM} = \sin\varphi.\csc D \quad ; \quad \sin M = \cos D.\sec\varphi \quad \text{ou} \quad \cos M = \sin P_{DAM}.\sin D$$

Supposons maintenant qu'à bord d'un navire dont la position estimée est connue (φ_e, G_e), on observe le passage au premier vertical d'un astre de déclinaison D : la mesure de hauteur donne sa hauteur vraie H_v et l'instant de la mesure est noté avec précision. Les formules concernant le passage au 1er vertical rappelées ci-dessus permettent de calculer l'angle au pôle qui donnera accès à une longitude observée et au point déterminatif Lalande à partir duquel on tracera la droite de hauteur, l'azimut étant E ou W, ou encore de calculer la hauteur estimée H_e avec φ_e et D et de construire la droite de hauteur Marcq Saint-Hilaire à partir du point estimé. Dans la pratique, l'observation à l'instant précis du passage au premier vertical relève de la gageure ; en revanche, il est concevable que l'on puisse observer au voisinage de cet instant puis réduire l'observation au premier vertical en fonction de l'intervalle de temps entre ce passage et l'instant considéré. Un raisonnement identique s'applique aux observations faites au voisinage de la digression azimutale maximale. L'évaluation des éléments de réduction, repose sur un développement limité de la distance zénithale ξ de l'astre en fonction des puissances croissantes de l'intervalle de temps Δt compté à partir de l'instant de passage au premier vertical ; ce développement s'établit avec la formule de Taylor et est de la forme :

$$\xi = \xi_{1v} + \left(\frac{d\xi}{dt}\right)_0.\Delta t + \frac{1}{2}.\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}\right)_0.\Delta t^2 + \frac{1}{6}.\left(\frac{d^3\xi}{dt^3}\right)_0.\Delta t^3 + \cdots$$

H. B. Goodwin a limité le développement à l'ordre 3, suffisant en pratique, et admet également $\Delta t = \Delta P$ compte tenu des petites valeurs envisagées. On obtient, tous calculs faits :

$$C = \xi - \xi_{1v} = \cos\varphi.(15\Delta P) - \frac{1}{6}.(\sin\varphi)^2.\cos\varphi\,.(\text{arc}1')^2.(15\Delta P)^3$$

Expression dans laquelle la réduction C est exprimée en minutes d'arc et la variation de temps (ou d'angle au pôle ΔP) est exprimée en minutes d'heure.

S'agissant de la digression azimutale maximale, on établit de même :

$$C = \xi - \xi_{DAM} = \cos D.(15\Delta P) - \frac{1}{6}.(\sin D)^2.\cos D\,.(\text{arc}1')^2.(15\Delta P)^3$$

A l'aide de ces éléments, on peut déterminer les éléments de la droite de hauteur Marcq de Saint-Hilaire de la façon suivante :

1) calculer la hauteur estimée H_{1v} et l'angle au pôle estimé P_{1v} pour l'instant du passage au premier vertical (resp de la digression, H_{DAM} et P_{DAM}) avec la latitude estimée et la déclinaison de l'astre ;
2) calculer la différence entre les angles au pôle estimés à l'instant de la mesure P_e et à l'instant du passage au 1er vertical P_{1v} (resp digression), ΔP ; noter si la mesure a été faite avant ou après le passage ;
3) calculer la réduction C puis la distance zénithale estimée réduite $\xi_e = \xi_{1v} \pm C$ ou $\xi_{DAM} \pm C$ (le signe est déterminé par la position de l'instant de mesure par rapport à l'instant de passage) ;
4) calculer la hauteur estimée $H_e = 90° - \xi_e$ et l'intercept $H_v - H_e$;
5) calculer l'azimut avec une table appropriée ;
6) construire la droite de hauteur.

Dans le cas, usuel à l'époque où H. B. Goodwin a conçu cette méthode, où on souhaite travailler avec le point déterminatif Lalande, il convient de calculer la longitude du point déterminatif déduite de l'angle horaire observé. Dans le développement ci-dessus, l'élément connu est la différence entre la distance zénithale vraie ξ_v déduite de la mesure de hauteur et celle calculée avec la latitude estimée pour le passage au premier vertical ξ_{1v}, ΔP étant l'inconnue. On a donc, avec les unités usuelles :

$$\Delta P = |P - P_{1v}| = \frac{\xi_v - \xi_{1v}}{15.\cos\varphi} + \frac{1}{90}(\sin\varphi)^2.(\text{arc}1')^2.(15\Delta P)^3$$

On remarque qu'il sera ici nécessaire de calculer ΔP en deux approximations successives, la première étant donnée par le premier terme du membre de droite. La formulation est identique, en remplaçant la latitude par la déclinaison, si on considère la digression azimutale maximale.

On procèdera donc de la façon suivante :

1) idem point 1) ci-dessus ;
2) calculer ΔP à l'aide de la formule ci-dessus et en déduire l'angle au pôle de l'astre à l'instant de l'observation $P = P_{1V} \pm \Delta P$ ou $P_{DAM} \pm \Delta P$;
3) passer de l'angle au pôle à l'angle horaire local selon que l'observation a été faite dans l'E ou dans l'W et calculer la longitude du point déterminatif ;
4) calculer l'azimut avec une table appropriée ;
5) placer le point déterminatif (latitude φ_e) et construire la droite de hauteur.

D'un cas comme d'un autre, les calculs sont relativement complexes et la méthode n'est facilement applicable que si les éléments relatifs au passage au 1er vertical (ou digression azimutale maximale) et la réduction sont mis en table d'une façon commode en fonction de la latitude et de la déclinaison.

Disposition des « Position-Line Star Tables » :

Pour une étoile donnée, et à une époque fixée, les éléments qui peuvent être facilement calculés en fonction de la latitude à l'instant du passage au 1er vertical sont :

- l'angle au pôle P_{1v},
- la distance zénithale ξ_{1v},
- la variation de l'angle au pôle ΔP consécutive à une variation unitaire de la distance zénithale, cette variation étant calculée à partir du terme principal, du premier ordre,
- la variation de distance zénithale consécutive à une variation unitaire de l'angle au pôle.

Enfin, comme la déclinaison d'une étoile évolue avec le temps, Goodwin met en table, toujours en fonction de la latitude, la variation d'angle au pôle consécutive à une variation unitaire de la déclinaison. On vérifie que ce dernier facteur, donnant la variation d'angle au pôle en secondes pour une variation de déclinaison de 1', a pour expression :

$$k = \frac{-8}{\tan P_{1v}.\sin 2D} + \frac{4}{\cos\varphi.\tan\xi_{1v}.\tan D}$$

Pour obtenir la correction d'angle au pôle, on multipliera le facteur k trouvé par la variation de déclinaison ΔD, en minutes, entre valeur de calcul et valeur à la date de l'observation.

Le principe est identique concernant la digression azimutale maximale. La table est cependant plus simple à construire puisque les variations unitaires d'angle au pôle et de distance zénithale ne dépendent que de la déclinaison et sont donc des constantes d'une étoile donnée. Les éléments calculés en fonction de la latitude sont, pour la digression d'une étoile sélectionnée, l'angle au pôle P_{DAM} et la distance zénithale ξ_{DAM}. Goodwin indique, dans les instructions d'emploi des tables, que l'effet d'une petite variation de déclinaison est négligeable sur l'angle au pôle ; il ne donne donc pas, dans le cas de la digression, d'éléments de correction.

Le terme du 3e ordre (ou 2e correction) est calculé en fonction de la variation d'angle au pôle et de la latitude ou de la déclinaison respectivement pour le passage au premier vertical et la digression azimutale maximale. On remarque que ce terme est en général négligeable lorsque la variation d'angle au pôle est inférieure à 20 minutes.

Table II.A donnant les angles au pôle et distances zénithales lors des passages au premier vertical :

Il y a un tableau par étoile sélectionnée ; ces tableaux donnent le terme principal de la réduction ; la latitude est argumentée jusqu'à 60° avec un intervalle de 20' et les distances zénithales sont limitées à l'intervalle $[30°, 80°]$ et exprimées à 15'' près ; les angles au pôle sont exprimés à la seconde d'heure près.

Les tables sont disposées conformément à l'extrait ci-dessous relatif à l'étoile Pollux :

POLLUX (declination 28° 15' N)					
Latitude 60° N to 33° 20' N	Hour angle	Correction for change of 1' in declination (a)	Zenith distance	Seconds of time for change of one degree of zenith distance (b)	Change of zenith distance per minute of time (c)
… 55° 20' 55° 00' 54° 40' …	… 4h 32m 45s 4h 31m 36s 4h 30m 26s …	… 5,4s 5,3s 5,2s …	… 54° 52' 00'' 54° 42' 15'' 54° 32' 15'' …	… 421,9s 418,4s 415,0s …	… 8,53' 8,60' 8,68' …

(a) la correction sera additive si la déclinaison augmente en valeur absolue, négative si la déclinaison diminue ;
(b) colonne à utiliser si on recherche l'angle horaire (au pôle) en fonction de la distance zénithale ;
(c) colonne à utiliser si on recherche la distance zénithale en fonction de l'angle horaire (au pôle).

Tables donnant la correction du 3e ordre :

La table II.B donne le terme correctif du 3e ordre (toujours additif à la 1re correction) lorsque l'on recherche l'angle horaire (au pôle) à partir de la distance zénithale. Ce terme est donnée en fonction de la latitude (ou de la déclinaison) et de la différence approximative entre angle au pôle considéré et angle au pôle au 1er vertical (ou à la digression) ; la correction est exprimée au 1/10e de seconde de temps près.

La table II.C donne le terme correctif du 3e ordre (toujours soustractif à la 1re correction) lorsque l'on recherche la distance zénithale à partir de l'angle au pôle. Les arguments d'entrée sont les mêmes que ci-dessus ; la correction est exprimée à la seconde d'arc près.

Tables III donnant les angles au pôle et distances zénithales lors de la digression azimutale maximale :

Les tables sont construites de la même façon que la table II.A et sont disposées conformément à l'extrait ci-dessous relatif à l'étoile Arcturus :

ARCTURUS (declination 19° 41' N)		
Latitude from 16° 40' N to 3° 20' N	Seconds of time for change of one degree of zenith distance 254,9 s (a)	Change of zenith distance per minute of time 14,12' (b)
	Hour Angle	Zenith Distance
… 13° 00' 12° 40' 12° 20' …	… 3h 19m 13s 3h 24m 19s 3h 29m 17s …	… 48° 05' 45'' 49° 23' 00'' 50° 38' 30'' …

(a) colonne à utiliser si on recherche l'angle horaire (au pôle) en fonction de la distance zénithale ;
(b) colonne à utiliser si on recherche la distance zénithale en fonction de l'angle horaire (au pôle).

Table IV donnant le « rate of change of altitude per minute of time » :

Cette table permet le calcul de la réduction au méridien de l'observation circumméridienne en fonction de la latitude et du demi-azimut de l'astre. L'argumentation en latitude est limitée à 60°, celle du demi-azimut à 10° ; l'intervalle d'argumentation commun est de 30'. La table est disposée conformément à l'extrait ci-dessous.

Azimut[87]	LATITUDE				
	…	54° 30'	55° 00'	55° 30'	…
… 4° 00' 4° 30' 5° 00' 5° 30' …	…	… 0,608 0,683 0,759 0,835 …	… 0,600 0,675 0,750 0,825 …	… 0,593 0,667 0,741 0,814 …	…

Les tables indexées I.A, I.B, I.C et I.D donnent les valeurs approchées du temps sidéral local pour lesquelles les différentes étoiles sélectionnées passent respectivement au premier vertical, à la digression azimutale maximale et au méridien du lieu. Les tables V.A et V.B sont des tables de conversion des unités de mesure d'arcs.

[87] Attention, il s'agit du demi-azimut de l'astre.

Exemple de calcul :

Les données de calcul figurent dans le tableau ci-dessous ; les extraits de tables nécessaires ont été reproduits dans les pages précédentes. Les observations ont été faites quasiment simultanément.

φ_e = 55° 00' N		G_e = 6° 20' W
Observation de Pollux au voisinage du 1er vertical W		
H_v = 32° 42,0'	AHap = 78° 50,0'	D = 28° 13,0' N
Observation de l'Épi au voisinage du méridien		
H_v = 23° 44,0'	AHap = 357° 25,2'	D = 10° 40,0' S

POLLUX

Calcul de l'angle horaire pour D = 28° 13,0' N (la déclinaison de référence est 28° 15' N) :

P_{1v} = ΔP =	4 h 31 m 36 s - 11 s	pour D = 28° 15' N - 5,3'.2 arrondi à la seconde
P_{1v} = $AHag_{1v}$ =	4 h 31 m 25 s 67° 51,3'	pour D = 28° 13' N

Calcul de la hauteur estimée (méthode Marcq St-Hilaire) :

AHap = $-G_e$ =	78° 50,0' 6° 20,0'	chronomètre et almanach estime
$AHag_e$ = $AHag_{1v}$ =	72° 30,0' 67° 51,3'	 calcul ci-dessus
ΔP = = =	4° 38,7' 18 m 35 s 18,583 m	l'observation est postérieure au passage conversion table V.B
$\Delta\xi$ = 2e cion = ξ_{1v} =	2° 39,8' - 0,1' 54° 42,3'	ΔP.8,60' = 159,8' table II.C table II.A
ξ_e = H_e = H_v =	57° 22,0' 32° 38,0' 32° 42,0'	 90° - ξ_e
$H_v - H_e$ =	+ 4,0'	

L'azimut calculé avec une table spécifique (table A.B.C. ou Perrin par exemple) est A_{zQ} = N86,4°W, soit Z = 273,6°. La droite de hauteur se construit avec intercept et azimut à partir du point estimé ; le résultat trouvé est conforme au calcul direct.

L'ÉPI

AHap = - G_e =	357° 25,2' 6° 20,0'		A_{zQ} = $A_{zQ}/2$ =	S9,6°E 4,8°	calcul à l'aide d'une table spécifique
$AHag_e$ = P_e = P_e =	351° 05,2' 8° 54,8' E 35,66 m E		r =	25,7'	rate of change of altitude per minute, table IV : 0,720'; r = 0,720.35,66

ξ_v = - r =	66° 16,0' - 25,7'	90° - H_v
MZD = + D =	65° 50,3' - 10° 40,0'	distance zénithale méridienne latitude et déclinaison de noms contraires
φ_2 =	N 55° 10,3'	

Le point déterminatif a pour coordonnées φ_2 et G_e ; la droite de hauteur circumméridienne se construit à partir de ce point ; l'azimut est A_{zQ} = S9,6°E, soit Z = 170,4°.

Le graphique du point est représenté en figure A14-1 ci-dessous :

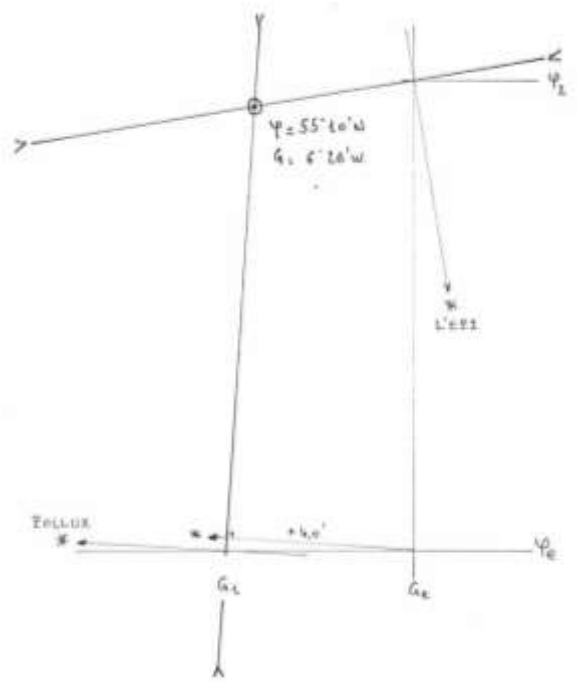


Fig : A14-1

Observation de Pollux, calcul de la longitude du point déterminatif (méthode Lalande) :

ξ_{1v} = ξ_v =	54° 42,3' 57° 18,0'	table II.A 90° - H_v
$\Delta\xi$ = =	2° 35,7' 2,595°	 conversion table V.A
ΔP = 2e cion = P_{1v} =	18 m 06 s + 1 s 4 h 31 m 25 s	2,595*418,4 = 1086 s table II.B pour D = 28° 13' N
P = AHag = AHap =	4 h 49 m 32 s 72° 23,0' 78° 50,0'	$\Delta P > 0$, observation postérieure au passage au 1er vertical W
G_1 =	W 6° 27,0'	AHap - AHag

On remarquera que le point déterminatif obtenu (φ_e, G_1) est bien situé sur la droite de hauteur Marcq.

ANNEXE 14-2

TABLES ABC, C_1, C_2 et VARIATIONS UNITAIRES

H. S. BLACKBURNE

Tables ABC :

Rappelons qu'elles permettent de résoudre un triangle sphérique par la formule des cotangentes ; appliquée au triangle de position et aux quatre éléments consécutifs déclinaison D, angle au pôle P, latitude φ et angle au zénith A_z, la formule s'exprime par :

$$\cot A_z . \sec \varphi = -\cot P . \tan \varphi + \tan D . \csc P$$

On pose :

$$A = -\cot P . \tan \varphi \quad ; \quad B = \tan D . \csc P \quad ; \quad C = A + B = \cot A_z . \sec \varphi$$

Les trois tables A, B et C mises au point par H. S. Blackburne et publiées dans les dernières éditions de ses différents ouvrages sont similaires à celles établies par S. T. S. Lecky, les produits étant exprimés avec 3 décimales avec des intervalles d'argumentation sensiblement identiques (1° en latitude et déclinaison, 1 minute d'heure en angle au pôle). On y retrouve également des tables B construites spécialement pour des étoiles sélectionnées[88] et à une époque donnée. H. S. Blackburne se distingue en ajoutant deux tables qu'il référence C_1 et C_2 et permettant de résoudre respectivement $A + B = \cot \theta$ et $A + B = \tan \theta$. La table C_2 a essentiellement été construite pour résoudre le problème de la détermination des coordonnées du point situé à l'intersection de deux droites de hauteur sur un plan rapporté à un repère orthonormé ou « carte plate ». A partir d'une origine, le point déterminatif par exemple, les points d'une droite de hauteur satisfont à la relation $\Delta P = -\Delta\varphi . \cot A_z . \sec \varphi$, ΔP étant la variation de longitude (ou d'angle au pôle) consécutive à la variation de latitude Δφ (figure A14-2). En utilisant une carte plate sur laquelle on reporte l'image de la droite de hauteur, on vérifie que la direction de la droite par rapport au méridien est θ tel que $\tan \theta = \cot A_z . \sec \varphi = A + B$.

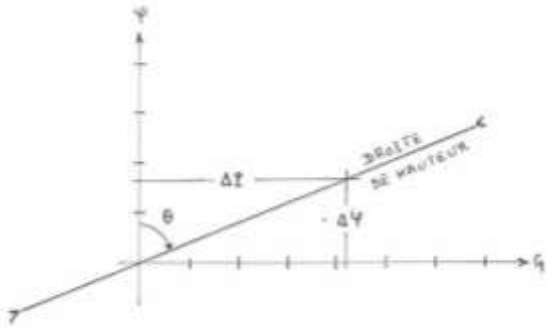


Fig : A14-2

La table C_2 permet donc de trouver directement, à partir de A + B, la direction de la droite à porter sur une carte plate et, si une seconde droite a été calculée, de construire un second lieu et d'en déterminer par simple lecture les coordonnées du point.

[88] Blackburne prend en compte 57 étoiles, Lecky 54.

Exemple :

La latitude estimée étant φ_e = 60° N, deux observations traitées par la méthode du parallèle estimé ont donné : G_1 = 0° et A_{zQ1} = S50°E puis G_2 = 1° E et A_{zQ2} = S40°W. Les somme C = A + B, ou coefficients Pagel, sont respectivement de 1,678 et 2,384.

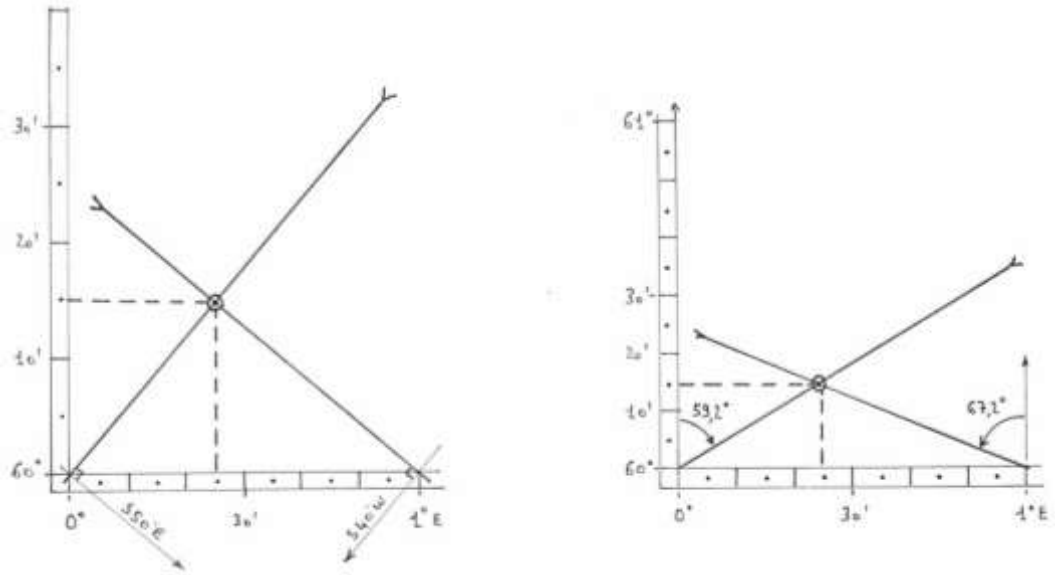


Fig : A14-3

La figure A14-3 ci-dessus représente, à gauche, la construction du point sur un canevas de Mercator ; la configuration des droites sur une carte plate est représentée en partie droite. Les directions des deux droites de hauteur, relevées en table C_2 sont θ_1 = 59,2° et θ_2 = 67,2°. La construction du graphique est immédiate, de même que la lecture des coordonnées du point : φ = 60° 15' N, G = 0° 25' E. Le procédé est applicable simplement lorsque les points déterminatifs ont été calculés selon les méthodes du méridien ou du parallèle estimés. Le report d'une droite Marcq est plus délicat.

Variations unitaires et azimut :

La somme A + B déduite des tables A et B représente la variation d'angle horaire consécutive à une variation de latitude de +1'. Cette quantité est connue en France sous le nom de coefficient Pagel ; il peut être exprimé en minutes d'arc et noté ici C ou en secondes de temps et noté V par Blackburne. On écrira donc :

$$C = A + B = \cot A_z \,.\, \sec \varphi \quad \text{ou} \quad V = 4.(A + B) = 4.\cot A_z \,.\, \sec \varphi$$

La variation unitaire d'angle horaire peut également être obtenue à l'aide de la table donnant cet angle horaire en fonction de la latitude, de la déclinaison et de la hauteur ; on y lira directement V pour les valeurs considérées des trois côtés du triangle. Cette dernière valeur peut être utilisée pour calculer l'azimut connaissant la latitude : H. S. Blackburne en donne une table jointe à la table d'angles horaires.

ANNEXE 14-3

TABLES de CALCUL de la RÉDUCTION au MÉRIDIEN

H. S. BLACKBURNE

Formulation exacte :

Cette formulation a déjà été évoquée au début de l'annexe 13-1. Elle consiste tout d'abord à calculer avec précision l'azimut de l'astre à l'instant de son observation en utilisant la formule de l'analogie des sinus que l'on calculera par logarithmes :

$$\sin A_{zQ} = \frac{\sin P_e \,.\, \cos D}{\cos H_v}$$

La détermination de l'azimut est ici sans ambiguïté puisque l'astre est, à priori, éloigné du premier vertical. En utilisant ensuite la décomposition du triangle de position en deux triangles rectangles et les notations indiquées à l'annexe 13-1, on calcule, en utilisant des formules identiques :

$$\tan PK = \cos P_e \,.\, \cot D \;\text{ et }\; \tan ZK = \cos A_{zQ} \,.\, \cot H_v$$

Si on note φ_K la latitude du point K et H_K sa hauteur, les formules peuvent s'écrire :

$$\cot \varphi_K = \cos P_e \,.\, \cot D \quad ; \quad \cot H_K = \cos A_{zQ} \,.\, \cot H_v$$

Comme indiqué en annexe 13-1, la réduction r cherchée peut s'écrire : $r = (H_K - H_v) \pm (\varphi_K - D)$. La latitude s'exprime ensuite par : $\varphi = \xi_v + D - r$; un simple schéma permettra de déterminer s'il faut faire la somme ou la différence entre les deux termes constituant la réduction. La table construite par H. S. Blackburne permet le calcul successif des deux termes correctifs en fonction de l'angle au pôle et de la déclinaison puis de l'azimut et de la hauteur ; celle-ci est argumentée en angle au pôle et azimut de 0,25° ou 1 minute à 45° ou 3 heures avec un intervalle de 0,25° ou 1 minute. En déclinaison et hauteur, l'argumentation va de 0° à 89,5° avec un intervalle de 1° jusqu'à 60° puis de 0,5° au-delà de 60° ; les résultats, ou corrections, sont données en minutes d'arc et dixièmes. L'interpolation double est de rigueur si l'on souhaite un résultat précis. Les formules utilisées étant exactes, l'utilisation de la méthode et de la table associée n'est limitée que par l'argumentation en angle au pôle ou en azimut qui n'excède pas 3 heures ou 45°.

Formule approchée utilisant la variation unitaire d'angle horaire :

La figure A14-4 ci-après représente l'image sur la carte marine de la courbe de hauteur (C) à l'instant d'une observation circumméridienne ; la droite de hauteur cherchée est ici zH'. En assimilant la courbe de hauteur à un arc de parabole[89] au voisinage du point z_0 que l'on prendra comme sommet, on peut écrire :

$$\tan A_{zQ} = \frac{2.r}{P_e . \cos \varphi}$$

P_e et r étant exprimés dans la même unité, la réduction cherchée est alors :

$$r = \frac{P_e}{2.\cot A_{zQ} \,.\, \sec \varphi}$$

[89] La sous tangente HH' admet pour milieu le sommet de la parabole z_0.

soit encore, compte tenu de l'expression de la variation unitaire de l'angle horaire :

$$r = \frac{15.P_e}{2.(A+B)}$$

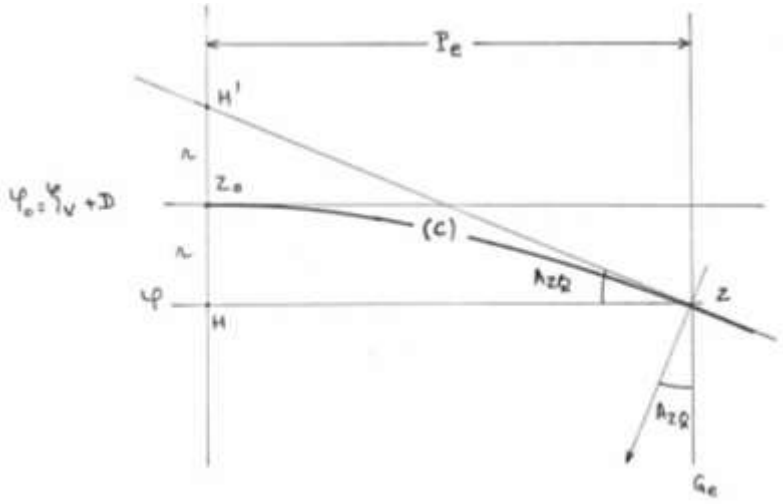


Fig : A14-4

Dans cette expression, la réduction est exprimée en minutes d'arc et l'angle au pôle en minutes d'heures. Blackburne a mis en table la quantité 15/2.(A + B), réduction unitaire pour une variation d'angle au pôle de une minute, en fonction de la somme algébrique (A + B) ; l'argument d'entrée est exprimé de 3,000 à 3000 avec un intervalle variable (à partir de 0,002) ; la réduction unitaire est donnée au millième de minute près. La formulation étant approchée, le domaine d'emploi de la table est limité à des valeurs d'angles au pôle tels que l'écart par rapport à une valeur de réduction calculée exactement reste inférieur à 0,5'.

H. S. Blackburne a cherché à repousser aussi loin que possible les limites d'emploi de ce type de tables. Dans certaines éditions de ses tables on relève d'autres formules, comme notamment, avec V = 4.(A + B) :

$$r = \frac{30.V.P_e}{1+4.V^2}$$

dont il est difficile de préciser la justification, l'auteur ne donnant aucune explication.

Utilisation de la réduction calculée à l'équateur :

Cette formulation peut s'établir en utilisant une propriété des courbes de hauteur, image du cercle de hauteur sur la carte de Mercator : celles-ci sont superposables si elles sont inscrites dans un même fuseau (courbes de 1re espèce) ou inscrites dans des zones égales (courbes de 2e espèce). Considérons, sur la figure A14-5 ci-après, l'arc de courbe de hauteur (C) relative à l'observation d'un astre A (AHap, D) à une hauteur H_v. Le point déterminatif cherché, de longitude G_e, est en T, l'azimut de l'astre est A_{zQ} et la réduction cherchée est r. ξ_v étant la distance zénithale, la somme ξ_v + D caractérise ici la latitude du sommet de la courbe situé sur le méridien de l'astre.

En admettant qu'il s'agisse d'une courbe de 1re espèce (l'explication est identique avec une courbe de 2e espèce), considérons maintenant la courbe (C_0) inscrite dans le même fuseau dont le point supérieur de longitude G_e est situé sur l'équateur. Cette courbe est relative à un astre A_0, situé sur le méridien de A, de déclinaison D_0 dont la hauteur est H_0 et la distance zénithale ξ_0. Au point T_0, du fait que les courbes (C) et (C_0) sont superposables, on relève un même azimut A_{zQ} de l'astre A_0 et les réductions ST = r et $S_0T_0 = r_0$ ont des longueurs égales sur la carte, déterminées, en toute rigueur, par les différences de latitude croissante. Si les valeurs de réduction ne sont pas trop

grandes, on pourra écrire, de manière approchée, $S_0T_0 = r_0 = \xi_0 - D_0$ et, puisque r_0 et r sont exprimées en minutes de latitude respectivement à l'équateur et à la latitude φ, $ST = r = r_0 . \cos\varphi$. Il suffit en définitive de savoir calculer ξ_0 et D_0 pour connaître la réduction r cherchée.

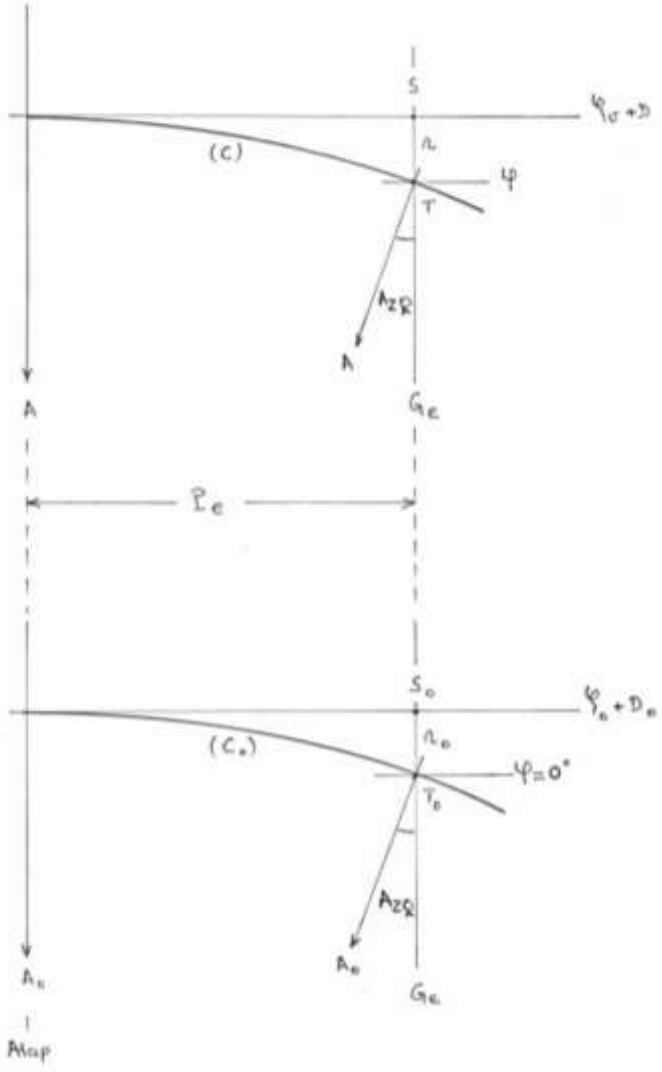


Fig : A14-5

A partir du triangle sphérique rectangle A_0QT_0, Q étant à l'intersection du méridien de A_0 et de l'équateur, on établit :

$$\tan D_0 = \cot A_{zQ} \,.\, \sin P_e \quad ; \quad \tan \xi_0 = \tan P_e \,.\, \csc A_{zQ}$$

La réduction r_0 peut donc être mise en table en fonction de l'azimut et de l'angle au pôle ; on obtient ensuite la réduction cherchée en multipliant r_0 par le cosinus de la latitude φ. En réalité, Blackburne calcule une réduction unitaire pour un angle au pôle de une minute d'heure directement pour la latitude considérée, en fonction de A_{zQ} et φ. La réduction cherchée est égale à cette réduction unitaire multipliée par l'angle au pôle exprimé en minutes d'heure.

ANNEXE 14-4

TABLES RELATIVES aux OBSERVATIONS d'ÉTOILES et EXEMPLE

H. S. BLACKBURNE

Calculs préparatoires aux observations crépusculaires :

A l'aide d'un almanach nautique et des coordonnées du point estimé, on détermine l'heure du crépuscule et le temps sidéral local correspondant. Par exemple, le 28 novembre par φ = 20° N et G = 40° W, on obtient une heure locale du crépuscule de17 h 40 m, soit 20 h 20 en temps universel d'où un temps sidéral AHsg = 333°, soit 22 h 12 m qui servira d'argument d'entrée dans les tables de Blackburne.

Dans les « Tables for Azimuths, G-C. Sailing and Reduction to the Meridian », on consulte la table n° 31 qui indique la paire d'étoiles convenant à la détermination du point par observations extra-méridienne :

Name of Star	Mag.	Dec.	Sidereal Time	Hour Angle	Bearing	Table to use
…	…	…	…	…	…	…
Nunki)	2,1	S26° 24'	21 h 00	02 h 10	S35°W	Ex-Mer. T.n°3
Fomalhaut)	1,3	S30° 02'	21 h 00	01 h 53	S29°E	Ex-Mer. T.n°3
Fomalhaut)	1,3	S30° 02'	22 h 00	00 h 53	S15°E	Excelsior
Peacock)	2,1	S56° 59'	22 h 00	01 h 41	S14°W	Ex-Mer. T.n°3
Deneb)	1,3	N45° 00'	23 h 00	02 h 21	N41°W	Ex-Mer. T.n°3
Peacock)	2,1	S56° 59'	23 h 00	02 h 41	S21°W	Ex-Mer. T.n°3
…	…	…	…	…	…	…

Dans le cas présent, on utilisera le couple Fomalhaut-Peacock fixé par le temps sidéral de 22 h, le plus proche de 22 h 12 m.

La table 30 du même ouvrage fournit d'autres détails sur les deux étoiles sélectionnées :

Stars	Before meridian passage			Meridian passage sidereal time	After meridian passage		
	Excelsior tables	Bearing	Ex. Mer. Tables n°3		Excelsior tables	Bearing	Ex. Mer. Tables n°3
…	…	…	…	…	…	…	…
Peacock	19h 05	S10°E	17h 19	20h 19	21h 33	S23°W	23h 19
…	…	…	…	…	…	…	…
Fomalhaut	21h 57	S15°E	19h 53	22h 53	23h 49	S42°W	25h 53
…	…	…	…	…	…	…	…

Les deux tables sont calculées pour une latitude de 20° N ; les heures données en table 30 sont des temps sidéraux locaux (AHsg). Il conviendra de calculer, en sus, la valeur approchée de la hauteur des deux étoiles pour caler le sextant lors de l'observation. On note que l'observation de Fomalhaut pourra être traitée avec les Excelsior Tables puisque l'angle horaire sidéral local (22 h 12 m) est compris entre les deux valeurs limites de 21 h 57 et 23 h 49 ; la table 15 des Excelsior Tables donne la réduction au méridien à appliquer en fonction de l'angle au pôle et de la latitude. Concernant Peacock, il faudra déterminer cette réduction avec la table Ex-Meridian n°3 qui permet d'effectuer le calcul exact.

Exemple de calcul de point :

Les données de calcul figurent dans le tableau ci-dessous ; les observations ont été faites quasiment simultanément.

φ_e = 47° 00' N		G_e = 7° 00' W
Observation n° 1 : La Chèvre		
H_v = 7° 02,2' NW	AHag = 9 h 54 m 00 s	D = 45° 54,9' N
Observation n° 2 : Arcturus		
H_v = 60° 23,7' SW	AHag = 0h 55 m 54 s	D = 19° 36,7' N

La Chèvre : l'observation, voisine du méridien inférieur, est traitée en appliquant une réduction au méridien calculée avec la formulation exacte donnée dans la table Ex-Meridian n°3 dont les extraits utiles sont donnés ci-dessous ; le supplément de l'angle au pôle est 2 h 06 m 00 s.

Altitude or declination	HOUR-ANGLE OR AZIMUTH					HOUR-ANGLE OR AZIMUTH			
	1 hour					2 hours			
	…	24 m 21°	25 m 21,25°	26 m 21,5°	…	5 m 31,25°	6 m 31,5°	7 m 31,75°	…
… 7° 8° …	…	… 29,6' 33,7' …	… 30,3' 34,5' …	… 31,1' 35,4' …	…	…	…	…	…
… 45° 46° …	…	…	…	…	…	… 268,3' 267,5' …	… 272,9' 271,9' …	… 277,4' 276,5' …	…

L'azimut, calculé par l'heure et la hauteur est A_{zQ1} = N21° 29,2'W.

Correction 1 = Correction 2 =	4° 32,0' - 0° 31,2'	δ = H_v =	44° 05,1' 7° 02,2'
Réduction r =	4° 00,8'	- r =	- 4° 00,8'
		φ_1 =	N 47° 06,5'

Arcturus : l'observation, voisine du méridien supérieur, est aussi traitée en appliquant une réduction au méridien donnée par la table ci-dessus (extraits non donnés).

L'azimut, calculé par l'heure et la hauteur est Z_2 = S27° 25,1'W

Correction 1 = Correction 2 =	33,0' - 2° 50,4'	D = ξ_v =	19° 36,7' 29° 36,3'
Réduction r =	- 2° 17,4'	+ r =	- 2° 17,4'
		φ_2 =	N 46° 55,6'

Les coefficients Pagel (A + B), directement déterminés en fonction des azimuts et de la latitude estimée dans la table C, sont respectivement p_1 = cot A_{zQ1}.sec φ_e = 3,722 pour la 1re droite et p_2 = cot A_{zQ2}.sec φ_e = 2,828 pour la seconde.

La différence de latitude entre les deux points déterminatifs est l = φ_1 - φ_2 = 10,9' = l_1 + l_2.

On a d'autre part : $l_1 = l.{}^{p_2}/_{p_1+p_2}$, $l_2 = l.{}^{p_1}/_{p_1+p_2}$ et $g = p_1.l_1 = p_2.l_2$ d'où l'on déduit le calcul des coordonnées du point :

φ_1 = l_1 =	47° 06,5' N 4,7' S	φ_2 = l_2 =	46° 55,6' N 6,2' N	G_e = g =	07° 00,0' W 17,5' W
φ =	47° 01,8' N	φ =	47° 01,8' N	G =	07° 17,5' W

Les coordonnées du point observé sont en définitive, à la minute près : φ = 47° 02' N, G = 07° 18' W.

Graphique Mercator du point :

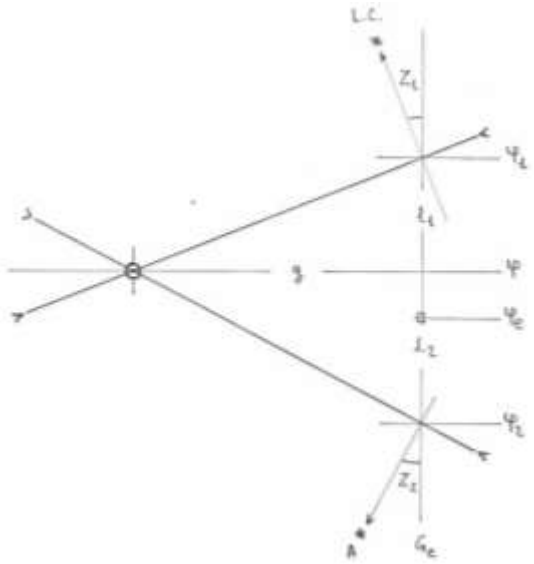


Fig : A14-6

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos. pages : 7

Chapitre 1er : droite de hauteur, bref historique et méthodes de calcul. 9

- Présentation générale, 9
- Observation d'un astre en vue de l'obtention d'un lieu de position, 12
- Principe du calcul des éléments d'une droite de hauteur, 13
- Trigonométrie, logarithmes et tables, 15
- Recherche d'outils de calcul plus rapides et plus sûrs. 17

Chapitre 2 : quelques précurseurs. 18

- Introduction, 18
- Tables d'angles horaires, 20
- Rectification de la longitude, 22
- Tables de Mackay, 23
- Tables de Inman, 24
- Tables de Towson, 24
- Tables de Thomson, 25
- Tables de Souillagouët, 27
- L'interpolation du lieutenant de vaisseau Leblanc, 29
- Commentaires. 30

Chapitre 3 : tables du commandant Guyou. 31

- Introduction, 31
- Les Tables de Poche, 31
- Les Nouvelles Tables de Navigation, 32
- Commentaires. 33

Chapitre 4 : les héritiers directs de Sir W. Thomson. 35

- Introduction, 35
- Tables de Delafon, 35
- Tables de Radler de Aquino, 36
- La table des triangles rectangles des frères de Catalano, 37
- Commentaires. 39

Chapitre 5 : tables de Charles Bertin. 41

- Qui était Charles Bertin ? 41
- Genèse de la méthode Bertin, 41
- La méthode Bertin, la Table de point sphérique et la Tablette de 1919, 42
- Les publications de 1928, Carnet et Mignonnette Bertin, 44
- La Tablette Bertin de 1929, 45
- Quelques libres propos de Charles Bertin, 46
- La Tablette Bertin de 1939, 49
- Commentaires. 51

Chapitre 6 : tables d'azimut. 53

- Introduction, 53

- Tables d'azimut à triple argument, pages : 53
- Tables d'azimut à double argument, 56
- Calculs d'azimut par les analogies de Néper, 60
- Azimut par l'heure et la hauteur, 61
- Commentaires. 61

Chapitre 7 : méthodes directes. 63

- Introduction, 63
- Tables de Martelli et de Pouvreau, 63
- La formule en cosinus-versine ou cosinus-haversine, 65
- Calculs d'angle horaire, 68
- Utilisation de la seule fonction haversine, 69
- Utilisation des logarithmes d'addition et de soustraction, 71
- Table miniature de Doniol, 72
- Un calcul manuel de la forme naturelle de la formule fondamentale, 73
- Commentaires. 73

Chapitre 8 : Sur le modèle de Souillagouët. 75

- De Souillagouët à Ogura, 75
- L'engouement britannique, 76
- Les publications américaines, 76
- Retour en Europe, 77
- Commentaires. 78

Chapitre 9 : Décomposition en triangles rectangles, suite et fin. 80

- Introduction, 80
- Tables Nautiques de Charles Cornet, 80
- Méthode d'Ageton, 81
- Table de M. R. Pierce, HO209, 83
- Table LSD de J.-É. Le Soudéer 83
- Table 1-2-3 de P. Domenjoud, 84
- NAO Sight Reduction Tables, 84
- Un projet de P. Hugon, 85
- Commentaires. 86

Chapitre 10 : méthode de la tangente commune. 88

- Introduction, 88
- La tangente commune, 88
- Tables de Garcia, 89
- Commentaires. 91

Chapitre 11 : Tables à triple argument. 92

- Introduction, 92
- D'autres tables d'angles horaires, 92
- Tables stellaires de G. De Lannoy 93
- Altitude Tables de F. Ball et Alt-Azimuth Tables de P. L. H. Davis, 94
- Tables de G. W. Littlehales, HO203 et HO204, 96
- Les publications américaines 201, 214 et 229, 97

- Tables conçues pour la navigation aérienne et utilisées en navigation maritime, pages : 98
- Commentaires. 101

Chapitre 12 : abaques. 103

- Introduction, 103
- Weir's Azimuth Diagram, nomogramme Perret et graphique de Cornet, 104
- Rust's Azimuth Diagram, Ix's Azimuth Diagram, 108
- Abaque d'azimut de P. Hugon, 110
- Abaque d'Ocagne, 112
- Abaque de Favé et Rollet de l'Isle, 114
- Tables graphiques de Constan, 117
- Quadrant planisphérique, 119
- Courbes de hauteur d'étoiles de Weems, 123
- Commentaires. 125

Chapitre 13 : observations extra-méridiennes, circumméridienne. 127

- Introduction, 127
- Aperçu historique, 127
- La réduction au méridien, 128
- La question de l'angle au pôle limite, 130
- Latitude et droite de hauteur circumméridienne, 131
- Série de hauteurs circumméridiennes, 131
- Cas particulier des observations de la Polaire, 132
- Les tables, 132
- Commentaires. 133

Chapitre 14 : détermination du point par les tables de H. B. Goodwin et H. S. Blackburne. 134

- Introduction, 134
- Les tables de point d'étoiles de H. B. Goodwin, 135
- Les tables de H. S. Blackburne, 137
- Commentaires. 140

Epilogue. 142

Remerciements. 145

Index des tables. 146

Bibliographie. 150

Table des matières. 400

Table des annexes. 403

TABLE DES ANNEXES

Annexe à l'avant-propos :

0 : Transcription du point de midi du capitaine G. Ledru pages : 161

Annexes au chapitre 1er :

1-1 : Définitions et éléments fondamentaux de calculs 163
1-2 : Logarithmes 178
1-3 : Tables numériques : définitions, conventions, interpolations 181

Annexes au chapitre 2 :

2-1 : Calcul du point à midi au début du XXe siècle 187
2-2 : Tables de L. Hommey 191
2-3 : Formules de Mazure-Duhamel et Heath, méthode Pagel 192
2-4 : Tables de Mackay et Inman 197
2-5 : Tables de Sir W. Thomson 199
2-6 : Tables de Souillagouët 203

Annexes au chapitre 3 :

3-1 : Tables de poche 207
3-2 : Nouvelles tables de navigation 213

Annexes au chapitre 4 :

4-1 : Tables de Delafon 217
4-2 : Tables de Radler de Aquino 220
4-3 : Table zonique (de Catalano) 228

Annexes au chapitre 5 :

5-1 : La méthode Bertin, cas général 233
5-2 : Les procédés Souillagouët et Leblanc, le carton d'interpolation 235
5-3 : Tablette Bertin 1939, résolution multiple de triangles rectangles 241
5-4 : Intercalaire d'interpolation 244

Annexes au chapitre 6 :

6-1 : Table 902 253
6-2 : Tables ABC, de Perrin et de Bataille 257
6-3 : Tables de Pitaud 264
6-4 : Analogies de Néper, table XXXIX de Friocourt, tables de Goodwin 266

Annexes au chapitre 7 :

7-1 : Méthodes directes, essai d'inventaire 271
7-2 : Tables de Martelli et de Pouvreau 273
7-3 : Formulation en cosinus-versine et haversine, tables de Davis, Hall et Dieumegard 277

7-4 : Utilisation des valeurs naturelles, tables de Braga et de Doniol pages : 283
7-5 : Tables de Hugon 291
7-6 : Utilisation des logarithmes d'addition et de soustraction 294
7-7 : Table digilog 296

Annexes au chapitre 8 :

8-1 : Essai d'inventaire et caractéristiques principales des tables de type Souillagouët-Ogura 297
8-2 : Line of Position Book, P. V. H. Weems 300
8-3 : Navigation Tables for Mariners and Aviators, HO208, J. Y. Dreisonstok 304
8-4 : Aerial & Marine Navigation Tables, J. E. Gingrich 308
8-5 : F-Tafel, calcul de l'azimut 311

Annexes au chapitre 9:

9-1 : De Cornet à Pepperday 314
9-2 : Table de Domenjoud 320
9-3 : Projet de table de P. Hugon 323

Annexe au chapitre 10 :

10-1 : Tables de J. Garcia 327

Annexes au chapitre 11 :

11-1 : Table de F. Ball 330
11-2 : Tables de Littlehales HO 203 et HO204 336
11-3 : Tables HO214 338
11-4 : Publication 229 340
11-5 : Publication 249 344

Annexes au chapitre 12 :

12-1 : Eléments de construction de l'abaque de Weir 350
12-2 : Abaque d'azimut de Hugon 354
12-3 : Abaque d'Ocagne 356
12-4 : Abaque de Favé et Rollet de l'Isle, Tables graphiques de Constan, formulation utilisée 358

Annexes au chapitre 13 :

13-1 : Circumméridiennes, formulations employées 361
13-2 : Angle au pôle limite 365
13-3 : Série de hauteurs circumméridiennes 366
13-4 : Tables de calculs des circumméridiennes : analyse et essai d'inventaire 368

Annexes au chapitre 14 :

14-1 : Position-Line Star Tables, H. B. Goodwin 386
14-2 : Tables ABC, C_1 et C_2, variations unitaires, H. S. Blackburne 392
14-3 : Tables de calcul de la réduction au méridien, H. S. Blackburne 394
14-4 : Tables relatives aux observations d'étoiles et exemple, H. S. Blackburne 397

Achevé d’imprimer en août 2020 sur les presses de l’Imprimerie Peau – 61340 Berd’huis

Dépôt légal : août 2020

ISBN : 978-2-491688-02-8
ISSN : 2724-8372