Collection du Bureau des longitudes

Volume 13

LA LONGITUDE EN MER PAR LES DISTANCES LUNAIRES

Aperçu historique et présentation des principales méthodes mathématiques employées du XVIIIe au XXe siècle

Paul BEDEL
Professeur général de l'Enseignement maritime (2e s)

Collection du Bureau des longitudes - Volume 13

LA LONGITUDE EN MER PAR LES DISTANCES LUNAIRES

Aperçu historique et présentation des principales méthodes mathématiques employées du XVIIIe au XXe siècle

Paul BEDEL

Professeur général de l'Enseignement maritime (2e s)

Bureau des longitudes

© Bureau des longitudes, 2024

ISBN : 978-2-491688-19-6
ISSN : 2724-8372

LA LONGITUDE EN MER PAR LES DISTANCES LUNAIRES

Aperçu historique et présentation des principales méthodes mathématiques employées du XVIIIe au XXe siècle

Paul BEDEL

Professeur général de l'Enseignement maritime (2e s)

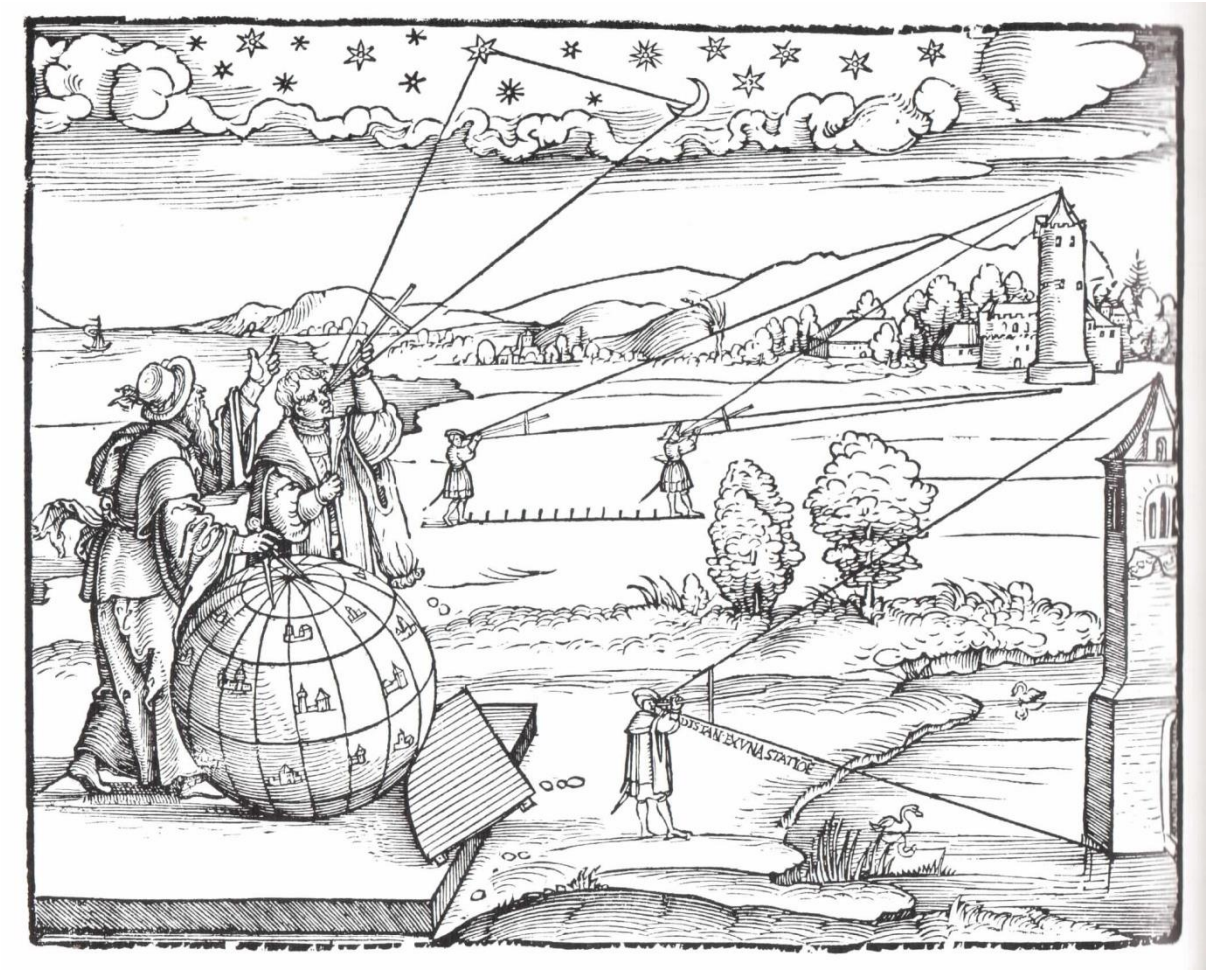


Illustration de la page-titre du livre « Introductio geographica Petri Apiani in doctissimas Verneri annotationnes », Ingolstadt 1533. On y présente un navigateur recevant l'instruction nécessaire à l'usage de l'arbalète pour mesurer une distance de la Lune à une étoile ainsi que deux applications de l'instrument aux mesures topographiques. Au pied du globe, on remarque un astrolabe-quadrant.

Préface

En 1905 le Bureau des longitudes, avec l'accord du Ministère de la Marine, mit fin à la publication des distances lunaires dans la *Connaissance des temps*. Elles y figuraient depuis 1774, sept ans après leur apparition dans le *Nautical Almanac*. De fait, la méthode éponyme pour la détermination des longitudes en mer était déjà tombée en désuétude depuis plusieurs décennies, balayée par la disponibilité de chronomètres de marine fiables et suffisamment bon marché pour équiper tous les types de navires, sans parler de la méthode des droites de hauteur apparue au milieu du XIXe siècle.

Cela concluait quatre siècles d'histoire depuis l'énoncé des fondements et plus de 100 ans d'usage et ne demanda rien de moins que les génies combinés de Newton, Clairaut et Euler. Un moment contestée par rapport à la méthode des angles horaires, elle a fini par prendre un avantage définitif vers les années 1770 sous l'influence de Nevil Maskelyne et de l'Abbé Lacaille qui en furent les plus grands avocats, ce dernier étant probablement le premier à la mettre en œuvre lors de son voyage au Cap en 1751. Il est curieux de voir que A.-G. Pingré lors de son voyage à Rodrigue pour le passage de Vénus sur le soleil en 1761, a fait usage des distances lunaires à l'aller et des angles horaires au retour[1].

C'est une facette de cette épopée, fruit de la plume experte du Pr. P. Bedel, que le Bureau des longitudes a le plaisir de publier aujourd'hui dans sa collection d'ouvrages, complétant fort logiquement l'ouvrage précédent du même auteur consacré aux tables de navigation. Une facette, car l'auteur ne se revendique pas historien et n'ambitionnait pas de couvrir toutes les péripéties humaines, institutionnelles, instrumentales et mathématiques de cette longue page d'histoire de l'astronomie nautique. Ouvrage sans équivalent, tant en langue anglaise que française, on trouve ici rassemblés les principes fondamentaux et le détail des méthodes innombrables qui ont été proposées pour réduire la distance et faciliter le travail des marins, plus navigateurs que mathématiciens. Cette abondance est bien le signe qu'aucune de ces méthodes n'avait une réelle supériorité sur les autres, et qu'aucune n'était totalement satisfaisante.

Chaque méthode est présentée sous le plan théorique, puis malaxée pour la rendre logarithmique et enfin illustrée d'exemples numériques, tout ceci à partir des sources originales parfaitement référencées. On voit très vite que toutes ces formules appartiennent en fait à deux familles selon que l'on recherche une solution exacte du système de deux équations non linéaires ou une forme approchée, pas toujours plus simple, mais compatible avec le besoin de la navigation et la précision des mesures. C'est une gymnastique surprenante pour nous qui calculons sans tables et avons du mal à percevoir cette difficulté : une différence d'azimuts disponible dans la première équation, substituée dans la seconde et la distance vraie est calculable ! C'est un des mérites de cet ouvrage de nous rappeler toute l'ingéniosité dont ont dû faire preuve nos prédécesseurs pour traduire ces formules en méthodes de calcul utilisables à la mer.

Ces quelques lignes ne sont qu'un aperçu de la richesse des 150 pages qui suivent et ne disent rien de la minutie que l'auteur a déployée pour sélectionner et classer les méthodes les plus importantes.

François Mignard
Président du Bureau des longitudes
Membre de l'Académie des sciences
17 décembre 2023

[1] A.-G. Pingré, Voyage à Rodrigue, le transit de Vénus de 1761 : édition critique, S. Hoarau, M-P. Janiçon, J-M Racault ; Sedes Université de la Réunion, 2005.

LE CALCUL DE LA LONGITUDE

PAR L'OBSERVATION DES DISTANCES LUNAIRES

AVANT-PROPOS

Jusqu'à l'avènement et la vulgarisation de l'emploi du chronomètre, la méthode dite des distances lunaires était la seule applicable pratiquement pour déterminer la longitude à la mer. Son histoire est connue, étudiée et présentée par de nombreux historiens, je n'y reviendrai donc pas, hormis quelques repères chronologiques nécessaires. Les différentes études sont par contre plus discrètes sur le traitement des observations en vue d'aboutir à la longitude c'est-à-dire sur les procédés de calculs. Le sujet est certes moins attrayant, mais il constitue un passage obligé pour ceux qui en étaient chargés : au XVIIIe siècle, ce sont les scientifiques, astronomes embarqués ou quelques savants officiers de marine, viendront ensuite les pilotes, tout au moins ceux qui en étaient capables, puis, au XIXe siècle, les officiers chargés de la navigation.

C'est donc à ces calculs que je me suis intéressé. On en verra tout d'abord la diversité et la complexité à l'époque où les almanachs dont disposaient les navigateurs donnaient simplement les coordonnées astronomiques des astres en fonction du temps ; les calculs n'étaient alors réellement praticables que par des spécialistes. Une simplification notable apparaitra lorsque des distances pré-calculées figureront dans le Nautical Almanac, en 1767, puis dans la Connaissance des temps, en 1774. Le calcul devient alors un peu plus simple, donc mieux à la portée des navigateurs. On verra alors fleurir une quantité impressionnante de procédés qui se partagent en deux familles : les méthodes directes dans lesquelles, à partir de la distance lunaire apparente réfractée, topocentrique, issue de la mesure, on calcule la distance lunaire vraie, géocentrique, à l'aide d'une formule unique obtenue par des considérations de trigonométrie sphérique et les méthodes indirectes qui consistent à mettre en évidence et à évaluer un certain nombre de termes correctifs pour réduire la distance lunaire, c'est à dire passer, par le biais d'une simple somme algébrique, de la distance apparente réfractée à la distance vraie.

J'ai limité l'étude dans le temps : elle commence vers le milieu du XVIIIe siècle dès lors que les navigateurs disposeront d'un instrument de mesure adapté et de tables astronomiques donnant la position de la Lune avec une précision suffisante. Elle se termine au début du XXe siècle lorsqu'un chronomètre, fiable et d'un coût raisonnable, équipera une large majorité de navires autorisant ainsi la pratique commode de la navigation astronomique par lieux de positions ou droites de hauteur : les distances lunaires pré-calculées disparaîtront alors des almanachs nautiques. Je ferai toutefois une incursion vers une époque plus récente, où les distances lunaires trouveront encore leur utilité, puis vers le présent où le procédé intrigue toujours quelques chercheurs et marins curieux.

On l'a dit, les procédés de calculs ont été très nombreux et il est illusoire – et inutile – de tous les présenter : je me suis donc limité aux méthodes qui paraissent avoir été les plus courantes ou encore les plus originales. Le sujet, on peut le pressentir, est à la fois complexe et austère. Après avoir rappelé quelques notions fondamentales d'astronomie nautique, je vais donc tenter d'en faire une présentation aussi simple que possible dans un corps de texte, chaque chapitre étant suivi d'une ou plusieurs annexes dans lesquelles figureront les développements et justifications mathématiques ainsi que les exemples numériques.

CHAPITRE 1er

POSITION DU PROBLÈME & GENÈSE DE LA MÉTHODE

Principe général :

La Lune, unique satellite naturel de la Terre, se déplace rapidement sur le fond des étoiles puisque la durée de sa révolution sidérale est d'environ 27 jours 1/3. Il en résulte que, pour une étoile située dans un plan voisin de celui de l'orbite lunaire, la distance angulaire qui serait vue depuis le centre de la Terre entre cette dernière et la Lune, varie d'environ 13,2° par jour. Disposant de tables donnant les coordonnées célestes de la Lune et de l'étoile considérée, il est possible de calculer cette distance angulaire pour différentes heures d'un méridien choisi comme origine ; on pourra alors construire un tableau donnant la correspondance entre l'heure du méridien origine et la distance angulaire en question. Si maintenant, en un lieu quelconque, on est capable de mesurer cette distance et de la réduire au centre de la Terre, le tableau de correspondance fournira, par interpolation, l'heure du méridien origine à l'instant de l'observation. Si, de plus, on a pris soin de régler une horloge – un garde-temps – sur le temps local et de relever l'instant précis de l'observation, la différence entre les heures au méridien origine et locale donnera directement la longitude du lieu. Le Soleil et les planètes utilisées en navigation maritime (Vénus, Mars, Jupiter et Saturne) dont les orbites apparentes appartiennent à des plans voisins de celui de l'orbite de la Lune peuvent aussi être utilisés pour effectuer ces déterminations.

Le principe est donc on ne peut plus simple mais il en va tout autrement pour la mise en œuvre et la pratique. En effet, il est tout d'abord à remarquer qu'une erreur dans la mesure de la distance ci-dessus conduit à une erreur sensiblement trente fois plus grande sur l'heure et la longitude qui en résulte. La méthode requiert donc l'emploi d'un instrument précis manié par un observateur expérimenté ; l'instrument en question, utilisant le principe de double réflexion, avait été inventé par Isaac Newton (1643-1727) à la fin du XVIIe siècle mais son descriptif aurait été égaré et oublié et c'est finalement le modèle conçu par l'astronome John Hadley (1682-1744) qui sera présenté à la Royal Society en 1731. De même, les coordonnées célestes de la Lune utilisées pour effectuer les calculs de distances doivent présenter toute la précision requise ce qui ne sera obtenu, après de nombreuses contributions[2], qu'en 1755 avec la publication des tables du mathématicien et astronome allemand Tobias Mayer (1723-1762).

La comparaison entre distances observée – ou apparente réfractée – et calculée nécessite de réduire l'une des deux à la référence de l'autre. En effet, la distance calculée, déduite des coordonnées célestes de la Lune et de l'astre, est vue à partir du centre de la Terre (elle est géocentrique) et vise directement le centre des deux astres ; la distance observée est vue à partir de la surface de la Terre (elle est topocentrique) en visant le bord de la Lune – et, le cas échéant, celui du Soleil –, les étoiles et planètes étant supposées ponctuelles ; les rayons visuels sont, de plus, affectés par la réfraction astronomique lors de leur traversée de l'atmosphère. Il convient donc de corriger l'une des distances des effets de cette réfraction, de la parallaxe puisque les points de vue sont différents et du demi-diamètre (ou rayon) apparent. Les deux premiers éléments de corrections sont fonction des hauteurs des astres considérés au-dessus de l'horizon qu'il faudra donc mesurer – ou calculer – pour l'instant de l'observation de la distance. Le problème de la réfraction astronomique sera résolu de manière approchée dans le courant du XVIIe siècle, notamment par l'astronome Jean-Dominique Cassini, ou Cassini I (1625-1712), qui en calcula des tables en 1662, celui de la parallaxe de la Lune ne le sera qu'au milieu du XVIIIe siècle avec les contributions de multiples intervenants dont l'abbé de La Caille (1713-1762) et l'astronome Jérôme Lalande (1732-1807).

[2] Dans un ordre chronologique, au XVIIIe siècle, citons : Halley, Newton, Lemonnier, Cassini III (de Tury), Clairaut, D'Alembert, Euler, Lagrange, Bradley …

Enfin, la méthode ne peut être conduite à bonne fin que si l'on connaît avec précision la latitude et l'heure vraie locale[3] pour l'instant de l'observation. Pour satisfaire à ce dernier point, l'observateur doit donc disposer d'une montre marquant la seconde dont la marche est connue. Les différents auteurs sont discrets sur ce dernier point et il est bien possible que, dans la pratique, l'instrument soit la montre personnelle de l'observateur. A titre d'exemple, on relève dans le « Nouveau Traité de Navigation » de Pierre Bouguer (1753), la mention d'une montre qui avance de 4 minutes et 29 secondes à midi un jour donné et dont la marche est de – 36 secondes par 24 heures ; elle marquera donc 12 h 03 minutes 53 secondes à midi le lendemain.

Présentation du problème sur la sphère locale d'un observateur et calculs de base :

Considérons un observateur qui a mesuré la distance angulaire entre un bord de la Lune et une étoile ainsi que les hauteurs de ces deux astres au-dessus de l'horizon. Après s'être affranchi de la correction du demi-diamètre de la Lune, l'observateur dispose de trois éléments : la distance lunaire apparente réfractée $L_{ar}A_{ar}$ que l'on notera d et les hauteurs apparentes réfractées de la Lune et de l'étoile.

Si on admet que l'effet de parallaxe n'affecte pas l'azimut de l'astre considéré – ce que l'on pourra toujours admettre dans le cas de la résolution de problèmes d'astronomie nautique –, les positions vraie (vue du centre de la Terre et corrigée de la réfraction astronomique) et apparente réfractée (affectée de la parallaxe en hauteur et de la réfraction astronomique) simultanées d'un astre appartiennent à un même plan vertical passant par le centre de la Terre. En faisant abstraction de toute notion de distances entre la Terre et les astres considérés, on peut reporter ces positions sur une même sphère (figure 1-1) sur laquelle on aura représenté le grand cercle horizon HH', la verticale de l'observateur Z'Z. Sur le vertical de la Lune, on reporte sa position apparente réfractée L_{ar}, connaissant sa hauteur apparente $H_{arL} = lL_{ar}$ puis sa position apparente L_a après application de la correction de réfraction et enfin sa position vraie L après application de la correction de parallaxe en hauteur. On procède de même pour l'astre sur son vertical, A_{ar} étant sa position apparente réfractée[4] reportée avec sa hauteur $H_{arA} = aA_{ar}$ et A sa position vraie ; les hauteurs de L et de A, lL et aA, sont les hauteurs vraies. On notera que, pour la Lune, la position vraie est au-dessus de la position apparente réfractée car la correction de parallaxe en hauteur est prépondérante ; c'est l'inverse pour l'astre, la réfraction astronomique, prépondérante par rapport à l'éventuelle parallaxe en hauteur, ayant pour effet « d'élever » l'astre.

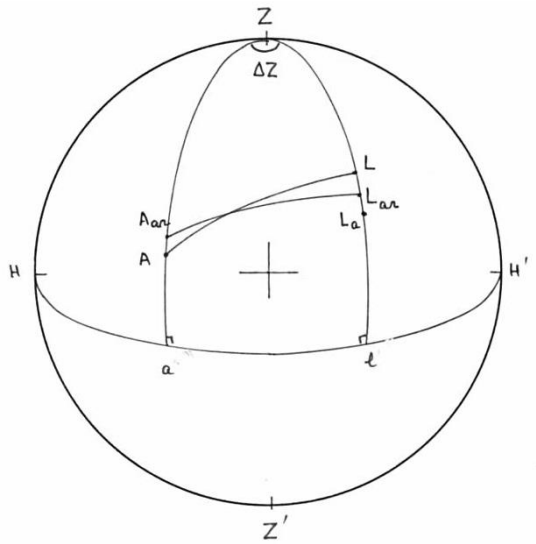


Fig : 1-1

[3] Le temps vrai local est l'angle horaire local du Soleil. Le jour vrai est l'intervalle de temps qui sépare deux passages du Soleil au méridien du lieu ; sa durée, voisine de 24 heures, n'est pas constante. L'exemple qui suit suppose une durée du jour vrai de 24 heures.

[4] La parallaxe en hauteur est de faible valeur pour le Soleil et les planètes Vénus et Mars ; elle est négligeable pour les étoiles et les planètes Jupiter et Saturne. Pour ces astres, sur la sphère ci-dessus, les positions apparentes réfractées A_{ar} et apparentes A_a sont donc confondues.

On connaît les trois côtés du triangle sphérique « apparent réfracté » $ZA_{ar}L_{ar}$ qui sont la distance apparente réfractée d et les compléments des hauteurs apparentes réfractées. On peut donc, à l'aide de la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique, évaluer l'angle en Z du triangle que l'on a noté ΔZ. Cet angle est aussi l'un de ceux du triangle sphérique « vrai » ZAL dont on connait les côtés ZL et ZA, compléments des hauteurs vraies obtenues après correction des hauteurs apparentes réfractées. En appliquant cette même formule fondamentale dans le triangle ZAL, on peut obtenir la distance vraie LA cherchée, que l'on notera D (voir l'avertissement figurant en annexe 1-1 page 15), pour comparaison avec celle calculée obtenue dans un tableau figurant dans un almanach. C'est, à notre avis, la façon la plus simple de procéder … si l'on dispose d'un outil de calcul performant comme une calculatrice électronique. Il en allait tout autrement au siècle des Lumières.

En effet, les calculs astronomiques précis ne pouvaient être exécutés commodément qu'en utilisant exclusivement les opérateurs somme et différence de valeurs naturelles ou de logarithmes de ces valeurs. Or, la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique, constituée d'une somme de produits, ne répond pas à ce critère. On a donc cherché à contourner la difficulté de deux manières complètement différentes :

- directe, en transformant les formules et évitant le passage explicite par l'angle intermédiaire ΔZ pour aboutir à une formule unique, conforme au critère d'opérations, donnant directement le résultat,
- indirecte en recherchant les expressions de termes correctifs à ajouter, algébriquement, à la distance apparente réfractée d pour obtenir la distance vraie D.

Au XVIIIe siècle, le chevalier Jean-Charles de Borda (1733-1799) est l'un des principaux promoteurs de la méthode directe ; deux acteurs essentiels mettront en avant la méthode indirecte, Nevil Maskelyne (1732-1811), Astronome royal britannique, qui la portera à son degré ultime de précision et l'abbé de La Caille promoteur d'une méthode graphique et auteur d'un projet d'almanach nautique qui préfigure les rédactions à venir du Nautical Almanac et de la Connaissance des temps. Bien d'autres acteurs viendront apporter leurs contributions pour tenter de simplifier les opérations.

Précisons enfin que le plan de l'orbite de la Lune est peu incliné par rapport à celui de l'écliptique – trajectoire apparente de la projection du Soleil sur la sphère céleste –, l'inclinaison maximale étant d'environ 5,3°. Les étoiles choisies pour pratiquer les distances lunaires doivent appartenir au Zodiaque, c'est-à-dire être situées à 8,5° au maximum de part et d'autre de l'écliptique, condition également vérifiée pour les planètes utilisées en navigation. La distance lunaire considérée reste alors voisine de la différence des longitudes célestes des deux astres à l'instant de l'observation.

Quelques repères dans la genèse des distances lunaires :

Comme nous l'avons précisé en introduction, nous ne rentrerons pas dans le détail de l'histoire des distances lunaires. Il est cependant utile de rappeler quelques jalons à l'origine du procédé.

Le navigateur Amerigo Vespucci (1454-1512) est probablement l'un des premiers à recourir aux positions relatives de la Lune et d'un autre astre, la planète Mars en l'occurrence, pour déterminer la longitude[5]. La méthode qu'il a utilisée le 23 août 1499 est sommairement décrite dans une lettre adressée à Lorenzo di Pierfrancesco de Médicis le 18 juillet 1500. Vespucci disposait d'un almanach préparé par Johannes Müller von Königsberg dit aussi Montereggio ou Regiomantanus (1436-1476) indiquant que la conjonction (probablement occultation) de Mars et de la Lune à Nuremberg aurait lieu ce 23 août à minuit. À l'endroit où il se trouve (Vénézuela, Colombie ?), Vespucci observe que cette conjonction s'est produite 5 h 30 avant minuit locale, soit à 18 h 30 et il en déduit que sa longitude est la différence, convertie en degrés, entre l'heure de Nuremberg et l'heure locale marquant le même évènement astronomique, soit 82,5° W. Le principe est donc clairement énoncé mais les explications de Vespucci ouvrent la porte à de multiples doutes sur l'application réelle du procédé : la variation de la distance entre la Lune et Mars est prise égale à 1° par heure – au lieu d'un peu plus de 0,5° – et la

[5] Les éléments ci-après, relatifs à la méthode qui aurait été mise en œuvre par A. Vespucci, sont extraits de l'ouvrage de Salvador Garcia Franco « Historia del Arte y Ciencia de Navegar », tome I.

longitude trouvée est ensuite référencée au méridien de Cadix, environ 17° à l'ouest de celui de Nuremberg. Enfin, Vespucci n'indique pas avec quel instrument il a mesuré les deux distances successives entre la Lune et Mars ni comment il mesurait le temps local.

Plusieurs savants se sont intéressés au XVIe siècle à la détermination de la longitude par les distances lunaires ; on retiendra ici Johann Werner (1468-1522), Pierre Apian, ou Apianus, (1495-1552) et Gemma Frisius, ou Gemma le Frison, (1508-1555) qui sont à la base des fructueuses recherches qui donneront leurs lettres de noblesse à la méthode des distances lunaires au XVIIIe siècle. D'une manière générale, les savants du XVIe siècle considèrent la distance de la Lune à une étoile située dans un plan voisin de celui de l'écliptique de façon à pouvoir admettre que la variation de la distance en fonction du temps est égale à celle de la longitude céleste de la Lune soit environ de 13,2° par jour. Tous négligent la parallaxe en hauteur de la Lune et la réfraction astronomique. Enfin, les mesures angulaires sont toutes effectuées à l'aide d'une arbalète ou bâton de Jacob (voir l'illustration de la page 2 du présent document).

En 1514, le mathématicien et astronome Johann Werner publie à Nuremberg une « Géographie de Ptolémée » dans laquelle il expose une méthode de détermination de la longitude par la mesure de distances lunaires. Après avoir mesuré la distance entre la Lune et l'étoile et relevé l'heure locale correspondante, il évalue, en divisant cette distance par le moyen mouvement en longitude de la Lune, l'heure locale de la conjonction – ici égalité des longitudes célestes – entre la Lune et l'étoile. Cet instant peut aussi se déterminer dans un almanach pour le méridien fixé comme origine, en temps de ce méridien. La différence entre les deux instants, fixant le même évènement astronomique, donne la longitude du lieu d'observation. J. Werner est retenu comme étant le véritable initiateur de la méthode des distances lunaires.

Pierre Apian, mathématicien et astronome allemand est, en 1524, l'auteur d'un ouvrage « Cosmographicus Liber Petri Apiani Mathematici Studiose Collectus » dans lequel figure un exposé précis de la méthode des distances lunaires. L'ouvrage sera réédité plusieurs fois et traduit en plusieurs langues dont le français[6]. Tout comme J. Werner, P. Apian procède à la mesure de la distance entre l'étoile et la Lune et relève l'heure locale correspondante Tvg, peut-être à l'aide d'un cadran solaire[7] et d'un garde-temps. Cet instant va directement servir d'argument d'entrée dans un almanach pour déterminer le moyen mouvement en longitude céleste de la Lune ainsi qu'une distance lunaire « vraie » ; cette dernière quantité étant simplement évaluée par différence entre les longitudes célestes de l'étoile et de la Lune. On forme ensuite la différence entre distances observée et « vraie » ; l'écart trouvé, divisé par le moyen mouvement en longitude, donne la correction de temps qu'il faudra apporter pour arriver à l'égalité entre les distances. Le temps du méridien origine, ainsi corrigé, donnera accès à la longitude par différence avec l'heure locale de la mesure.

Enfin, Gemma Frisius, médecin, mathématicien et astronome hollandais, inventeur de l'anneau astronomique, fabriquant d'instruments d'astronomie (globes, sphères armillaires, astrolabe et nocturlabe) et professeur à l'université de Louvain, publia plusieurs ouvrages notamment, en 1530, « De principiis astronomiae ». Dans cet ouvrage, G. Frisius propose une méthode de détermination de la longitude par distances lunaires ; il évoque aussi l'utilisation d'une horloge pour résoudre le problème. L'ouvrage a été traduit en français et édité par Claude de Boissière en 1556 sous le titre de « Principes d'astronomie et cosmographie avec l'usage du globe ». Les méthodes de détermination de la longitude par une distance lunaire exposées par G. Frisius reposent sur l'emploi d'un globe sur lequel figure l'équateur et l'écliptique ; la latitude du lieu est supposée connue. Après avoir mesuré simultanément la hauteur de la Lune et sa distance à une étoile puis noté l'heure locale correspondante, une première méthode consiste à placer l'étoile sur le globe à l'aide de ses coordonnées écliptiques relevées dans un almanach. On détermine ensuite l'angle horaire local de cette étoile connaissant l'heure locale et les ascensions droites du Soleil et de l'étoile ce qui permet, avec la latitude, d'orienter le globe comme la sphère locale du lieu et d'y placer la Lune à l'aide de sa hauteur et de la mesure de distance à l'étoile. On pourra ainsi mesurer directement sa longitude céleste grâce à la trace de l'écliptique sur le globe ; à l'aide de l'almanach, on recherchera pour terminer l'heure au méridien origine pour laquelle la longitude céleste de la Lune est celle trouvée. La différence avec l'heure locale de l'observation donne directement la longitude cherchée. Une

[6] L'édition consultée est celle de 1544, traduite par Gemma Frisius.
[7] Un cadran solaire portatif figure sur la page de garde de l'ouvrage consulté.

variante de la méthode consiste à placer la Lune sur le globe avec les distances par rapport à deux étoiles distinctes, ce qui permet de s'affranchir de la mesure de hauteur : la méthode est ainsi applicable de nuit lorsque l'horizon est invisible.

Dans la première moitié du XVIIe siècle citons Jean-Baptiste Morin (1583-1656). Il étudie la médecine et l'astronomie à Aix en Provence et est aussi mathématicien et astrologue. En 1630, il présente à Richelieu sa théorie de la détermination de la longitude par les méthodes lunaires dont l'essentiel est publié en 1634 dans un petit recueil « La science des longitudes réduite en exacte et facile pratique par luy-même, sur le globe céleste ; tant pour la terre que pour la mer : en faveur des pilotes et capitaines de mer ». L'ouvrage est réédité en 1647 enrichi de quelques articles et d'un argumentaire sévère contre la publication d'un certain Père Léonard Durilis sur le sujet de la détermination des longitudes. J.-B. Morin apporte tout d'abord plusieurs perfectionnement par rapport à ses prédécesseurs, notamment la mesure des hauteurs et distances avec un quart de cercle (à la place du bâton de Jacob), la prise en compte de la parallaxe de la Lune (et, le cas échéant, du Soleil) et de la réfraction astronomique, l'utilisation d'éphémérides plus précises – les « Tables Rudolphines » établies par J. Képler (1571-1630) et publiées en 1627 – l'utilisation du temps moyen et de l'équation du temps pour passer au temps vrai et inversement. Par contre les différentes opérations de changement de système de coordonnées sont prévues s'effectuer graphiquement sur un globe de 1,5 à 2 pieds de diamètre muni de quarts de cercle mobiles et adaptés. Pour la détermination de la longitude à la mer, Morin retient deux méthodes : l'une – théorique – supposant la Lune et l'étoile sur le même vertical, l'autre générale où les deux astres sont vus dans des plans verticaux différents. Cette dernière est identique, dans le principe, à celle conçue par Gemma Frisius puisqu'il s'agit de trouver dans les éphémérides ou l'almanach l'heure du méridien de référence pour laquelle la longitude céleste de la Lune est celle trouvée suite aux observations faites à une heure locale connue d'où l'on déduit, par différence, la longitude.

Globalement, il est admis que l'on puisse déterminer la longitude à l'aide d'observations de la Lune dès cette première moitié du XVIIe siècle. Pour que les principes ébauchés dans leurs grandes lignes au XVIe siècle puissent être appliqués dans la pratique avec une précision suffisante il faudra attendre la mise à la disposition des marins d'outils d'observation et de calcul à la fois précis et d'emploi commode, ce qui n'interviendra que dans le courant du XVIIIe siècle.

ANNEXES AU CHAPITRE 1

ANNEXE 1-1

SPHÈRES CÉLESTE et LOCALE, COORDONNÉES, FORMULAIRE

SYMBOLISATION

Sphère céleste géocentrique et coordonnées célestes :

On rappelle que cette sphère est imaginaire, que son rayon est arbitraire et qu'elle est concentrique à la Terre. Les projections des étoiles sont supposées fixes à sa surface, celles des astres errants (Soleil, Lune, planètes) étant animées de leur mouvement propre sur le fond des étoiles. La sphère céleste tourne d'un mouvement uniforme autour de la ligne des pôles terrestres, dans le sens rétrograde vu du pôle Nord.

Une sphère céleste est représentée en figure A1-1 ci-dessous. On y a porté les projections du centre de la Lune L et d'un astre A (le centre du Soleil ou une étoile). Sur cette sphère, l'arc de grand cercle LA représente la distance lunaire vraie.

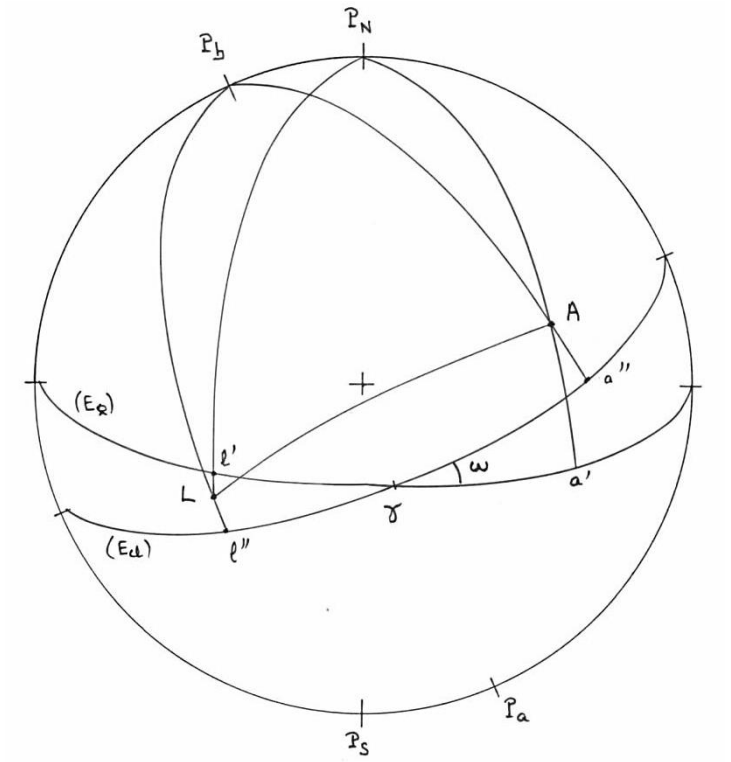


Fig : A1-1

On note :

P_NP_S : ligne des pôles de la Terre ; (E_Q) : équateur ; P_bP_a : ligne des pôles de l'écliptique ; (E_{cl}) : écliptique.

γ : point vernal ; ω : inclinaison (obliquité) de l'écliptique sur l'équateur, 23° 28' environ au XVIIIe siècle (23° 26' en 2021).

Coordonnées écliptiques :

La longitude céleste est comptée sur l'écliptique, de 0° à 360°, dans le sens direct vu du pôle boréal, à partir du point vernal. La latitude céleste est comptée sur le méridien céleste de l'astre de 0° à 90°, à partir de l'écliptique, positivement vers le pôle boréal, négativement vers le pôle austral.

Astre A : longitude céleste $\gamma a'' = \mathfrak{L}_A$; latitude céleste $a''A = \beta_A$ (boréale dans le cas de figure).

Lune L : longitude céleste $\gamma l'' = \mathfrak{L}_L$; latitude céleste $l''L = \beta_L$ (boréale dans le cas de figure).

Coordonnées équatoriales :

L'ascension droite est comptée sur l'équateur, de 0 à 24 heures, dans le sens direct vu du pôle Nord, à partir du point vernal ; on utilise également l'ascension verse, complément à 24 heures de la précédente et exprimée en degrés. La déclinaison est comptée sur le méridien de l'astre de 0° à 90°, à partir de l'équateur, positivement vers le pôle Nord, négativement vers le pôle Sud.

Astre A : ascension droite $\gamma a' = ARa$; déclinaison $a'A = D_A$ (Nord dans le cas de figure).

Lune L : ascension droite $\gamma l' = ARL$; déclinaison $l'L = D_L$ (Sud dans le cas de figure).

Distance entre les centres de la Lune et de l'astre : LA.

Sphère locale géocentrique et coordonnées locales :

Cette sphère est également imaginaire, de rayon arbitraire et concentrique à la Terre. Elle est supposée fixe et les différents astres se déplacent à sa surface. Leur mouvement apparent à sa surface résulte de la combinaison du mouvement diurne (rotation de la Terre sur elle-même) et de leur mouvement apparent propre.

Une sphère locale est représentée en figure A1-2 ci-après.

Le caractère local est fixé par le plan de figure qui est celui du méridien du lieu, la référence de verticale ZZ' et l'orientation de la ligne des pôles P_NP_S qui est fixée par la latitude.

On note sur la figure : A : image du centre de l'astre (étoile, Soleil) ; L : image du centre de la Lune. On a également porté A_{ar} et L_{ar}, positions apparentes réfractées des images des deux astres, affectées par la réfraction astronomique et la parallaxe.

On a d'autre part P_NP_S : ligne des pôles de la Terre ; Z : zénith ; Z' : nadir ; QEQ' : grand cercle équateur (E_Q) ; NES : grand cercle horizon (H).

La latitude φ est la hauteur du pôle N (arc NP_N).

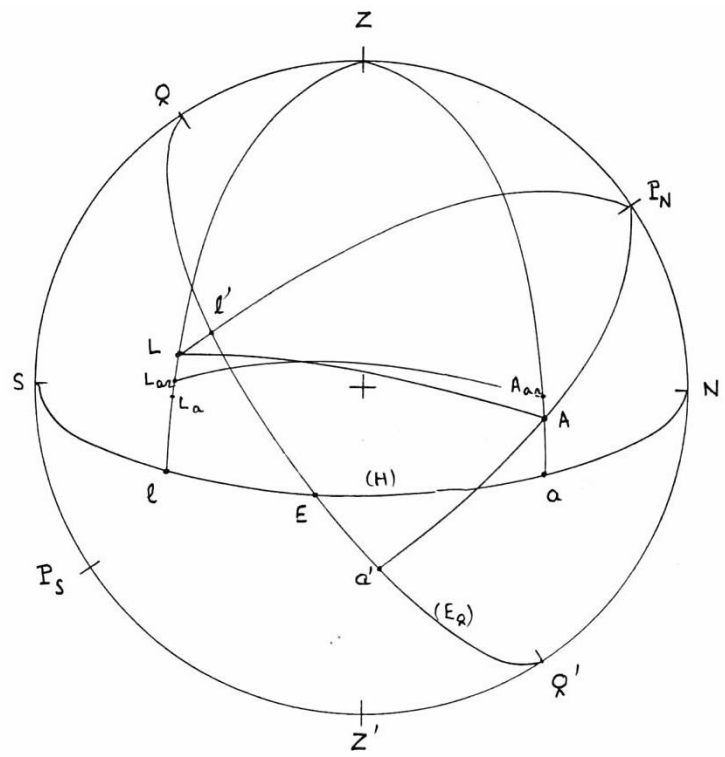


Fig : A1-2

<u>Coordonnées horaires</u> :

L'angle horaire local AHag est compté sur l'équateur, de 0 à 360°, dans le sens rétrograde vu du pôle Nord, à partir du pied du méridien du lieu (point Q). La déclinaison est comptée sur le méridien de l'astre de 0° à 90°, à partir de l'équateur, positivement vers le pôle Nord, négativement vers le pôle Sud. On a donc :

Astre A : angle horaire local, arc Qa' = AHag ; déclinaison a'A = D_A (Nord dans le cas de figure).

Lune : angle horaire local, arc Ql' = AHLg ; déclinaison l'L = D_L(Sud, donc négative, dans le cas de figure).

On peut substituer à l'angle horaire local l'angle au pôle qui est compté sur l'équateur vers l'E ou vers l'W de 0° à 180° ; c'est aussi l'angle en P_N des triangles de position P_NZA et P_NZL des deux astres.

<u>Coordonnées horizontales</u> :

L'azimut Z est compté sur l'horizon, de 0 à 360°, dans le sens rétrograde vu du zénith Z, à partir du point cardinal nord N, intersection de l'horizon et du demi grand cercle ZP_NZ'. La hauteur est comptée sur le vertical de l'astre de 0° à 90°, à partir de l'horizon, positivement vers le zénith, négativement vers le nadir. On a donc :

Astre A : azimut, arc Na = Z_A ; hauteur aA = H_A.

Lune : azimut, arc Nl = Z_L ; hauteur lL = H_L.

Distance vraie entre les centres de la Lune et de l'astre : LA, identique à celle portée sur la sphère céleste. L'arc de grand cercle $L_{ar}A_{ar}$ est la distance apparente réfractée.

Trigonométrie sphérique :

On rappelle ci-dessous les trois formules couramment utilisées pour résoudre un triangle sphérique quelconque dont les angles sont A, B et C et les côtés a, b et c (figure A1-3).

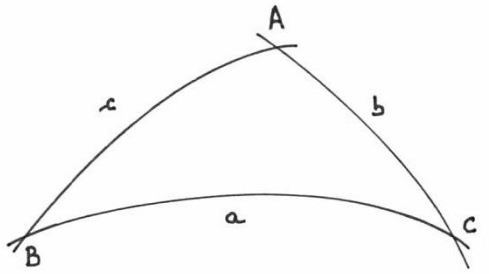


Fig : A1-3

<u>Formule fondamentale de la trigonométrie sphérique</u>, relation entre les trois côtés et un angle ou les trois angles et un côté :

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos c + \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos A$$

La formule ci-dessus est relative au côté a et à l'angle opposé A ; on peut écrire deux autres formules, construites sur le même modèle, relatives au côté b et à l'angle B puis au côté c et à l'angle C.

On établit également :

$$\cos A = -\cos B \,.\, \cos C + \sin B \,.\, \sin C \,.\, \cos a$$

Et deux autres formules construites sur le même modèle, relatives à l'angle B et au côté b puis à l'angle C et au côté c.

<u>Analogie des sinus</u> :

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

<u>Formule des cotangentes</u> : c'est une relation entre quatre éléments consécutifs du triangle, deux côtés et deux angles, par exemple B, c, A, b :

$$\cot b \,.\, \sin c - \cot B \,.\, \sin A = \cos c \,.\, \cos A$$

Par permutation circulaire, on obtient cinq autres relations du même type.

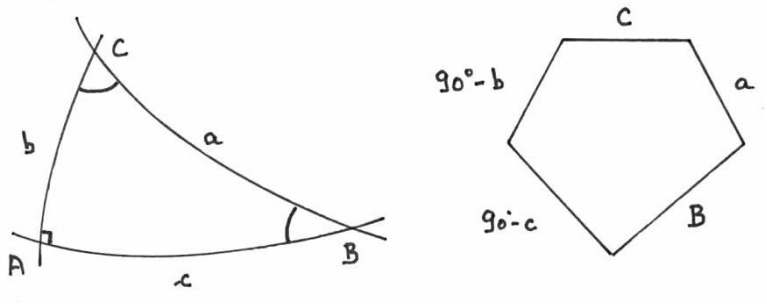


Fig : A1-4

Cas particulier des triangles rectangles, règle du pentagone de Neper : les formules générales sont bien entendu applicables mais il peut être plus expéditif d'utiliser la règle mnémotechnique du pentagone de Neper (figure A1-4) en « transformant » le triangle en un pentagone tel qu'indiqué sur la figure dont les côtés sont l'hypoténuse a, les deux angles non droits B et C et les compléments des côtés de l'angle droit, 90° - b et 90° - c. La règle s'énonce ainsi : le cosinus d'un côté du pentagone est égal au produit des sinus des côtés opposés et au produit des cotangentes des côtés adjacents. Ainsi, par exemple :

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos c = \cot B \,.\, \cot C$$

Symboles, notations, relation générale des temps :

Les symboles utilisés dans cette étude sont ceux figurant dans les Éphémérides nautiques dont on a partiellement reproduit ci-après la fiche de renseignements.

Abréviations et équivalences							
N S E W	Nord Sud Est Ouest	G φ π ϖ	longitude latitude parallaxe horizontale parallaxe en hauteur	1° 1' 1''	un degré = 4 m une minute de degré = 4 s une seconde de degré	1 h 1 m 1 s	1 heure = 15° 1 minute d'heure = 15' 1 seconde d'heure = 15''
La longitude G est comptée positivement à l'Ouest et négativement à l'Est de Greenwich ; la latitude φ est comptée positivement au Nord de l'Équateur, négativement au Sud.							

Symboles de temps et d'angles horaires				
Symbole	Origine	Astre	Méridien du lieu	Signification
UT ou Tco ou Tcp	Méridien supérieur	Soleil civil	Greenwich	Temps civil au premier méridien ou angle horaire du Soleil civil à Greenwich ou temps universel.
Tcg	Méridien supérieur	Soleil civil	Lieu de longitude G	Angle horaire du Soleil civil au lieu de longitude G ou temps civil local.
AHvo ou AHvp ou Tvp	Méridien supérieur	Soleil vrai	Greenwich	Angle horaire du Soleil vrai à Greenwich ou temps vrai à Greenwich.
AHvg ou Tvg	Méridien supérieur	Soleil vrai	Lieu de longitude G	Angle horaire du Soleil vrai au lieu de longitude G ou angle horaire local du Soleil vrai ou temps vrai local.
AHso ou AHsp	Méridien supérieur	Point vernal	Greenwich	Angle horaire sidéral à Greenwich ou temps sidéral à Greenwich.
AHsg	Méridien supérieur	Point vernal	Lieu de longitude G	Angle horaire sidéral au lieu de longitude G ou angle horaire sidéral local ou temps sidéral local.
AHao ou AHap	Méridien supérieur	Astre en général	Greenwich	Angle horaire de l'astre à Greenwich.
AHag	Méridien supérieur	Astre en général	Lieu de longitude G	Angle horaire local de l'astre.
P	Méridien supérieur	Astre en général	Lieu de longitude G	Angle au pôle de l'astre ; P = 24 h (ou 360°) – AHag, astre à l'E ; P = AHag, astre à l'W.

Coordonnées équatoriales				
Symbole	Origine	Astre	Sens	Signification
ARv	Point vernal	Soleil vrai	direct (vu du P_N)	Ascension droite du Soleil vrai, de 0 à 24 h.
ARc	Point vernal	Soleil civil	direct (vu du P_N)	Ascension droite du Soleil civil, de 0 à 24 h.
ARa	Point vernal	Astre en général	direct (vu du P_N)	Ascension droite d'un astre, de 0 à 24 h.
AVa	Point vernal	Astre en général	rétrograde (vu du P_N)	Ascension verse d'un astre, de 0° à 360° ; AVa = 360° – ARa ou 24 h – ARa.
D	Équateur	Astre en général	vers l'astre	Déclinaison, de 0° à 90°, + vers le P_N, – vers le P_S.
δ	Pôle Nord	Astre en général	vers l'astre	δ = 90° – D, distance polaire

Avertissement : dans cette étude, on a aussi noté D la distance vraie entre les centres de la Lune et d'un autre astre, d la distance apparente réfractée correspondante et δ la différence entre les deux (δ = D – d). Cette similitude avec les symboles de la déclinaison et de la distance polaire n'affecte pas la bonne lecture des expressions mathématiques présentées dans le texte grâce, à chaque fois, à un repérage des variables utilisées.

Coordonnées horizontales				
Symbole	Origine	Astre	Sens	Signification
Z	Nord	Astre en général	rétrograde vu du zénith	Azimut de 0° à 360° sur l'horizon.
A_z	Nord	Astre en général	direct ou rétrograde	Angle au zénith de 0° à 180° sur l'horizon, vers l'E ou vers l'W.
H	Horizon	Astre en général	vers l'astre	Hauteur de 0° à 90° sur le vertical de l'astre.
N	Zénith	Astre en général	vers l'astre	N = 90° – H, distance zénithale.

Relation générale des temps simultanés
Relation générale :
AHsp = AHag + G + ARa = AHa'g' + G' + ARa' = AHa''g'' + G'' + ARa'' = … à 24 h ou 360° près
Passage du temps civil au temps vrai et inversement :
AHvo = Tvo = Tco + (ARc – ARv) = Tco + E_c Ec est l'équation du temps civil.
Passage du temps sidéral au temps vrai et civil et au temps d'un astre :
AHvo = AHso – Arv ; Tco = AHso – ARc ; AHao = AHso – ARa toutes relations à 24 h ou 360° près.
Passage du temps local au temps du premier méridien :
AHvo = AHvg + G , Tco = Tcg + G , AHao = AHag + G algébriquement (G > 0 si Ouest, G < 0 si Est)

ANNEXE 1-2

CORRECTION des HAUTEURS, PARALLAXES

On mesure la hauteur d'un astre au sextant (ou à l'octant ou tout autre instrument) en réalisant le contact entre l'horizon visuel de l'observateur (visée directe) et l'astre si celui-ci est ponctuel (étoile, planète) ou l'un de ses bords, supérieur ou inférieur, dans le cas du Soleil ou de la Lune (visée réfléchie). La graduation lue sur le limbe, face à l'index de l'alidade, correspondant à la mesure est la hauteur instrumentale H_i. Cette hauteur, pour pouvoir être utilisée dans un calcul, doit être corrigée de l'erreur instrumentale et des effets de la réfraction puis réduite à l'horizon vrai ainsi que, le cas échéant, au centre de l'astre (voir figure A1-5). La hauteur ainsi obtenue est la hauteur vraie H_v du centre de l'astre. Corriger une hauteur, c'est donc passer de H_i à H_v.

Conditions moyennes d'observation et Terre supposée sphérique :

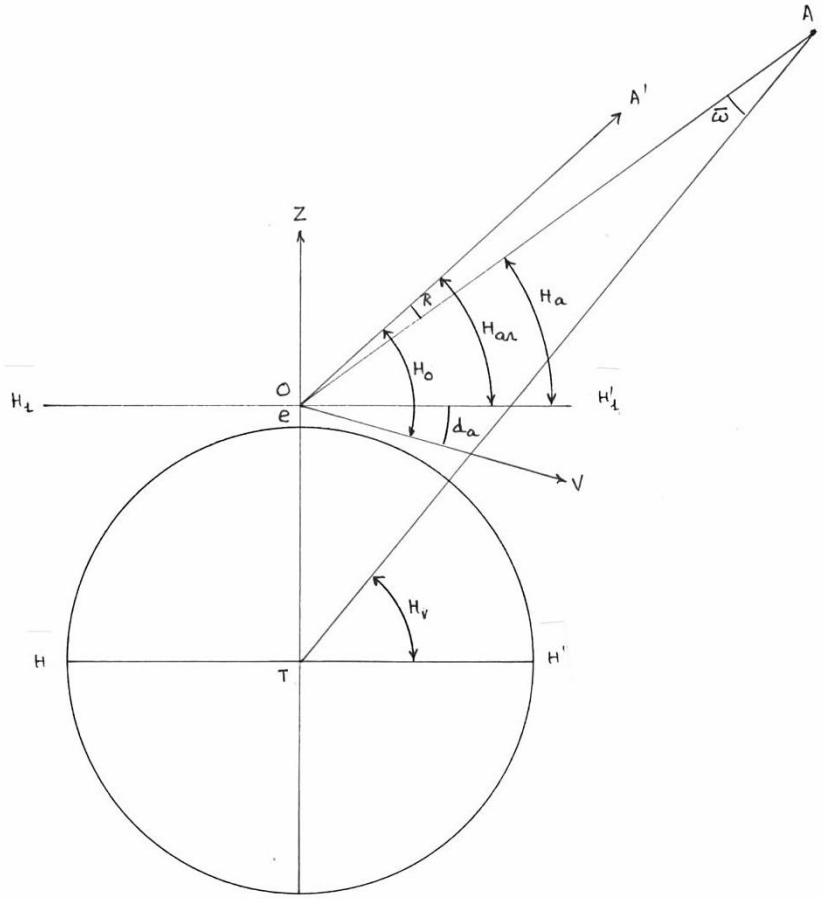


Fig : A1-5

En premier lieu, on évalue la hauteur observée H_o en effectuant la correction d'erreur instrumentale ε :

$$H_o = H_i + \varepsilon$$

L'étape suivante consiste à corriger la hauteur observée de la dépression apparente de l'horizon d_a qui est l'angle entre l'horizon apparent $H_1H'_1$ et le rayon visuel qui vient tangenter la surface de la mer. Du fait des effets de réfraction, ce rayon n'est pas rectiligne ; c'est un arc de courbe dont la concavité est tournée vers le centre de la terre et dont la tangente à l'origine est OV. La valeur de la dépression d_a est calculée selon la loi de Bouguer,

pour un état moyen de l'atmosphère ; elle est fonction de l'élévation de l'œil e (en mètres) au-dessus du niveau de la mer et on retient l'expression, d_a étant exprimée en minutes d'arc :

$$d_a = 1{,}77.\sqrt{e} \quad ; \quad H_{ar} = H_o - d_a$$

H_{ar} est la hauteur apparente réfractée.

On passe ensuite à la correction de réfraction astronomique. Cette dernière « relève » les astres de la quantité R : l'astre A est vu dans la direction de A' ; une expression approchée généralement admise, pour des hauteurs supérieures à 15°, une pression atmosphérique de 760 mm de mercure et une température de 10° C, est de la forme :

$$R = 0{,}97'.\cot H_{ar} \quad ; \quad H_a = H_{ar} - R$$

H_a est la hauteur apparente.

Pour la Lune, le Soleil, Vénus et Mars, il reste à effectuer, la correction de parallaxe en hauteur. Dans tous les cas, on additionnera la parallaxe en hauteur ϖ à la hauteur apparente pour obtenir la hauteur vraie :

$$H_v = H_a + \varpi$$

Les Éphémérides nautiques donnent la parallaxe horizontale π de l'astre, lorsque celui-ci est dans le plan de l'horizon. La parallaxe ϖ se calcule par la formule :

$$\varpi = \pi.\cos H_a$$

Enfin, dans le cas des observations de la Lune et du Soleil, pour obtenir la hauteur vraie du centre, on ajoutera le demi-diamètre au résultat précédent si on a observé le bord inférieur (cas général), on le retirera dans le cas d'une observation du bord supérieur (parfois, dans le cas de la Lune).

Les valeurs de demi-diamètre serviront également à corriger une distance lunaire pour se ramener au centre des astres ; le signe des corrections dépend de la configuration de l'observation.

Termes correctifs supplémentaires :

Si les conditions de température et de pression atmosphérique diffèrent notablement des conditions moyennes, il est possible de déterminer les termes correctifs correspondants, en général mis en tables dans les almanachs en fonction de la réfraction moyenne, de la température t et de la pression P existantes. Ces tables résolvent les formules suivantes :

$$R_{(10,P)} - R_{(10,760)} = R_{(10,760)}.\left(\frac{P}{760} - 1)\right) \quad \text{et} \quad R_{(t,760)} - R_{(10,760)} = R_{(10,760)}.\left(\frac{273}{273+t} - 1)\right)$$

On a supposé ci-dessus la Terre sphérique et, de ce fait, la parallaxe horizontale et le demi-diamètre d'un astre constants, au même instant et quelle que soit la latitude de l'observateur. La forme de la Terre se rapprochant plus exactement de celle d'un ellipsoïde de révolution, il peut y avoir lieu de tenir compte du fait que la parallaxe horizontale d'un astre est plus importante à l'équateur qu'aux pôles. En pratique, l'effet n'est notable que pour la Lune, du fait de sa proximité de la Terre. Les différents almanachs donnent donc la parallaxe horizontale équatoriale π_0 de la Lune qui peut ensuite être corrigée en fonction de la latitude pour obtenir π, valeur de celle du lieu d'observation de latitude φ. La formule, approximative, de la correction est de la forme :

$$\pi_0 - \pi = \pi_0.\alpha.(\sin\varphi)^2 \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{a-b}{a}$$

Expression dans laquelle a et b sont respectivement les demi-grand axe et demi-petit axe de l'ellipse méridienne et où α désigne l'aplatissement de l'ellipsoïde terrestre. Pour une valeur donnée de α, cette formule est

facilement mise en table à double argument, latitude et parallaxe horizontale équatoriale. α ayant une faible valeur – de l'ordre de 1/300 – la correction est toujours inférieure à une douzaine de secondes d'arc.

Toujours pour la Lune, le demi-diamètre donné par un almanach – ou demi-diamètre vrai – est celui vu du centre de la Terre qui est toujours un peu plus faible que celui vu depuis sa surface – ou demi-diamètre en hauteur –. Il peut donc être nécessaire de corriger la valeur lue dans l'almanach, surtout si la hauteur est importante. L'expression de cette correction est de la forme :

$$\frac{1}{2}\mathrm{diam}_{\mathrm{hauteur}} - \frac{1}{2}\mathrm{diam}_{\mathrm{vrai}} = 3{,}67.\left(\frac{1}{2}\mathrm{diam}_{\mathrm{vrai}}\right)^2 . \sin \mathrm{H_a} . \mathrm{arc}1''$$

Le demi-diamètre, ainsi que le résultat, sont ici exprimés en secondes d'arc. La correction peut être donnée par une table, en fonction de la parallaxe horizontale du lieu et de la hauteur apparente ; elle peut atteindre une quinzaine de secondes d'arc pour une hauteur apparente de 60°. Le facteur 3,67 est le rapport moyen entre la parallaxe horizontale de la Lune et son demi-diamètre.

Parallaxes :

Seule, la parallaxe en hauteur a été mentionnée ci-dessus. Suivant le repère dans lequel on travaille, on peut définir la parallaxe en ascension droite et déclinaison (repère équatorial) ou en longitude et latitude célestes (repère écliptique). Le calcul en est possible connaissant la parallaxe horizontale et les coordonnées de l'astre dans le repère utilisé. On en établira les formulations lors de l'étude de certaines méthodes particulières.

CHAPITRE 2

DÉTERMINATION DE LA LATITUDE

Introduction :

Une connaissance précise de la latitude du navire est nécessaire pour évaluer le temps vrai local qui intervient ensuite dans la détermination de la longitude. Plusieurs procédés sont à la disposition du navigateur, le plus simple étant celui de l'observation d'un astre au moment de son passage au méridien estimé du navire. Elle peut aussi être déterminée relativement facilement lorsque l'observation est faite au voisinage du passage au méridien ; on parlera alors d'observation circumméridienne. On pourra aussi utiliser, dans l'hémisphère Nord, une observation de l'étoile Polaire qui conduit très rapidement au résultat. Dans les deux premiers cas, et de manière instinctive, c'est l'observation du Soleil qui est la plus courante mais, si on considère les observations des planètes et des étoiles, les possibilités de détermination simple de la latitude sont, apparemment, multiples. Cependant, il apparaît clairement que les marins ont cherché, jusqu'à une époque relativement récente, à privilégier les observations du Soleil pour fixer la latitude ; les raisons principales en sont les suivantes :

- facilité de la mesure de hauteur du Soleil,
- connaissance précise des éphémérides du Soleil,
- l'observation d'une étoile ou d'une planète nécessite une recherche préparatoire, le passage au méridien devant coïncider avec le crépuscule ou l'aube car ce n'est qu'à ces moments que l'horizon et l'astre sont visibles simultanément,
- l'étoile Polaire est peu brillante et n'est visible qu'en fin de crépuscule et début de l'aube ; la mesure de hauteur peut être imprécise, l'horizon étant flou.

Dans le cas où le Soleil ne pourrait être observé à l'instant de son passage au méridien – ou en son voisinage – on s'est attaché à trouver d'autres méthodes de détermination de la latitude, notamment en utilisant deux observations de hauteur d'un même astre ou de deux astres distincts.

L'observation méridienne :

En toute rigueur, l'observation doit se faire pour l'instant calculé du passage au méridien en utilisant la longitude estimée du navire. Ce calcul s'effectue en évaluant la vitesse relative en longitude de la projection de l'astre sur la sphère terrestre permettant ainsi de fixer l'instant pour lequel navire et projection de l'astre seront sur un même méridien. On peut aussi procéder par approximation successive à partir des données d'heure de passage d'un astre au méridien de référence. Ces deux procédés sont ceux qui étaient utilisés couramment aux XIXe et XXe siècle. Il était jadis plus simple d'observer la culmination d'un astre, notamment celle du Soleil. En effet, pour un observateur fixe et un astre à déclinaison constante – une étoile par exemple –, la culmination correspond exactement au passage au méridien supérieur. Si la vitesse en latitude de l'observateur est faible – ce qui sera toujours le cas d'un navire à voiles de guerre ou de commerce – et la déclinaison de l'astre peu variable, la confusion des instants de culmination et de passage au méridien est admissible, l'erreur sur la latitude qui en découlera reste négligeable. Seule une grande vitesse en latitude du navire (plus de 20 nœuds) et l'observation d'un astre dont la déclinaison varie rapidement (la Lune) peut conduire à une erreur de quelques minutes sur la détermination de la latitude.

On a représenté en figure 2-1 la coupe selon le plan du méridien de la sphère locale d'un observateur dont la latitude est φ. Cet angle caractérise la hauteur du pôle Nord par rapport à l'horizon HH'. L'astre dont on observe le passage au méridien – la culmination – est A ; sa déclinaison est D et sa distance zénithale, déduite de sa hauteur vraie, est N_v. L'examen de la figure permet d'écrire, dans ce cas et en valeur absolue : $\varphi = N_v - D$.

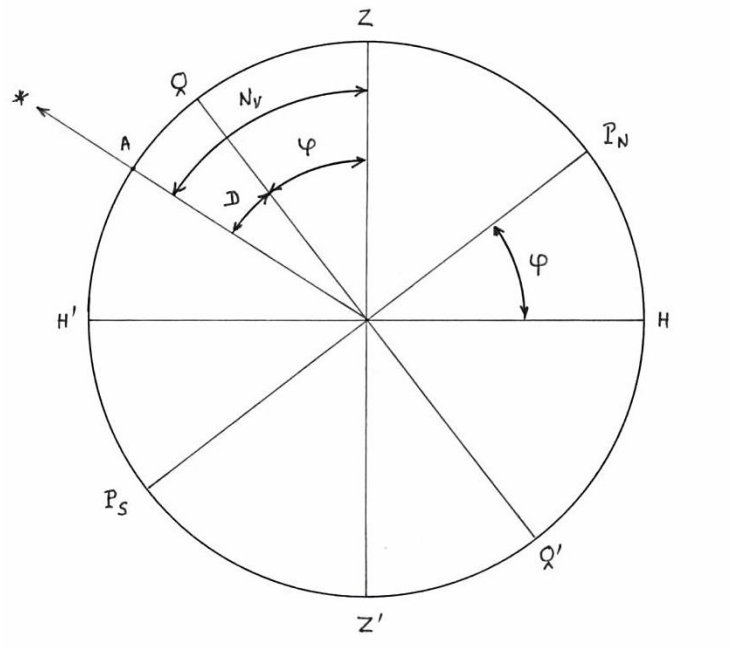


Fig : 2-1

Dans le cas que l'on vient d'illustrer, la latitude est Nord, donc positive, et la déclinaison, Sud, donc négative. On conviendra donc d'écrire, dans tous les cas de figure, algébriquement :

$$\varphi = N_v + D$$

en donnant à N_v le signe du pôle auquel on tourne le dos pour observer. La relation est ainsi générale, applicable dans tous les cas de figure.

Le procédé est appliqué systématiquement pour le Soleil où il suffit d'observer sa culmination, de noter sa hauteur maximale et d'en prendre le complément. Si on admet qu'au moment de l'observation – l'instant de la culmination est difficile à fixer précisément – il est midi local, on peut, connaissant la longitude estimée, en déduire l'heure approchée au méridien de référence et ainsi évaluer à l'aide d'un almanach nautique la déclinaison du Soleil. Cette dernière évaluation est précise puisque la variation horaire de la déclinaison du Soleil est, au maximum, d'une minute d'arc. La latitude est ainsi fixée avec précision, sous réserve d'une mesure de la hauteur de bonne qualité.

Observation circumméridienne[8] :

La détermination de la latitude par une (ou des) observation(s) au voisinage de l'instant du passage au méridien du Soleil peut être utilisée lorsque, pour une raison ou une autre, on a « raté » l'observation méridienne.

Au cours de la seconde moitié du XVIIIe siècle, les observateurs avaient remarqué que, lorsque le Soleil est au voisinage du méridien, la courbe représentative de sa hauteur en fonction du temps a l'allure d'une parabole dont le sommet est atteint sensiblement au moment du passage de l'astre au méridien du lieu d'observation ; en d'autres termes, à un instant donné, sa hauteur varie en raison directe du carré de la différence de temps entre cet instant et celui du passage au méridien de l'observateur, donc de l'angle au pôle de l'astre. Les chercheurs virent dans cette constatation un moyen de déterminer la latitude en prenant trois hauteurs successives du Soleil dans les alentours de son passage au méridien et en relevant les instants des observations à l'aide d'une simple montre calée arbitrairement. Ces différents éléments, hauteurs et intervalles de temps entre observations, permettent de

[8] Ce paragraphe donne un simple aperçu sur la méthode des circumméridiennes. Une étude détaillée, que nous n'avons pas reprise ici, figure dans « Tables de navigation 1840-1980 », volume n°5 de la collection du Bureau des longitudes.

définir la parabole représentative de la hauteur en fonction du temps et de trouver, par le calcul, l'heure qu'indiquerait la montre au moment du passage au méridien et la hauteur du Soleil à cet instant d'où l'on déduira ensuite la latitude connaissant en outre la déclinaison. La méthode a été explicitée en France dans les principaux ouvrages de navigation de l'époque comme le « Nouveau Traité de Navigation » de Pierre Bouguer, revu par l'abbé de La Caille, en 1760, « l'Astronomie des Marins » du père Esprit Pézenas en 1766 et le « Guide du Navigateur » de Pierre Lévêque en 1779 ; en Grande Bretagne, le procédé est indiqué par John Robertson dans la 4e édition (1780) de ses « Elements of Navigation ». Précisons que la méthode suppose que l'observateur reste immobile entre la première et la dernière observation, que la déclinaison de l'astre puisse être considérée comme constante sur cet intervalle et qu'enfin, on puisse admettre, sur cette même durée, que l'on se tient à l'intérieur du domaine de validité de la variation parabolique de la hauteur qui reste une approximation : l'intervalle de temps pendant lequel s'effectue les mesures doit donc rester de relativement faible amplitude et appelle la notion d'angle au pôle limite qui sera définie plus tard. Ajoutons que, à moins de s'en tenir à des intervalles de temps égaux entre observations, le résultat ne sera obtenu qu'à l'issue d'un calcul assez long.

La solution pratique à la recherche de la latitude suite à une observation au voisinage du passage de l'astre au méridien de l'observateur sera apportée par Jean-Charles de Borda en 1787 dans son ouvrage relatif au cercle de réflexion. Partant de la constatation énoncée au début de ce paragraphe comme quoi

> « *… les quantités dont le soleil descend dans le voisinage du méridien sont proportionnelles au quarré* [sic] *des temps écoulés depuis midi ; mais cela n'est pas exact lorsque le soleil passe très près du zénith et encore moins lorsqu'il passe au zénith même …* »,

J.-Ch. de Borda calcule et présente une table donnant la différence entre la hauteur méridienne d'un astre et sa hauteur observée une minute avant ou après son passage au méridien. Cette quantité sera par la suite dénommée coefficient des circumméridiennes, notée α, et permettra le calcul expéditif de la latitude[9]. Borda ne donne malheureusement pas la démonstration qui conduit à l'expression mathématique du coefficient α ; J. B. E. Dubourguet, officier de marine puis professeur de mathématiques au Prytanée Français, regrettant l'absence de démonstration, en détaillera une dans un opuscule[10] publié en 1801. Les équations fondamentales de la théorie des observations circumméridiennes seront ensuite établies par l'astronome Jean-Baptiste Delambre en 1814 qui utilise un développement selon les puissances croissantes du sinus du demi-angle au pôle puis par le lieutenant de vaisseau et professeur à l'École navale Paul Hilleret en 1875 qui choisira d'utiliser un développement limité selon les puissances croissantes de l'angle au pôle.

La voie qui a été suivie, principalement en France, pour résoudre le problème de la latitude circumméridienne repose sur une formulation approchée, valide à l'intérieur d'un intervalle de temps limité et centré sur l'instant du passage de l'astre au méridien. Une autre école s'est développée, principalement en Grande Bretagne, utilisant une formulation exacte basée sur la décomposition du triangle de position en deux triangles rectangles. Celle-ci a été initiée par John Robertson dans ses « Elements of Navigation » au cours de la seconde moitié du XVIIIe siècle, puis reprise et formalisée en 1849 par John Th. Towson.

Latitude par la Polaire :

L'observation de La Polaire, possible uniquement dans l'hémisphère Nord, permet une détermination commode et précise de la latitude (tout autant que la hauteur a pu être mesurée précisément). Cette étoile est très voisine du pôle Nord ; sa distance polaire δ (complément de la déclinaison) valait environ 2° au XVIIIe siècle ; du fait des effets de la précession des équinoxes, elle vaut aujourd'hui (2023) environ 38'. Sa hauteur au-dessus de l'horizon est donc peu différente de la latitude et l'on écrira :

$$\varphi = H_v + x$$

[9] La table X figurant dans « Description et usage du cercle de réflexion » donne le coefficient α en fonction de la latitude et de la distance polaire de l'astre et la table XI permet le calcul du carré de l'angle au pôle.
[10] « L'art du calcul astronomique des navigateurs ».

x étant une petite correction qui ne peut excéder, en valeur absolue, la distance polaire δ. Par l'observation, on peut évaluer, grossièrement, x : elle est égale à +δ quand la ligne Polaire-Mizar (figure 2-2) est verticale (Polaire en bas) et à –δ lorsque cette ligne est verticale, Polaire en haut ; elle est nulle quand la ligne Polaire-Mizar est horizontale.

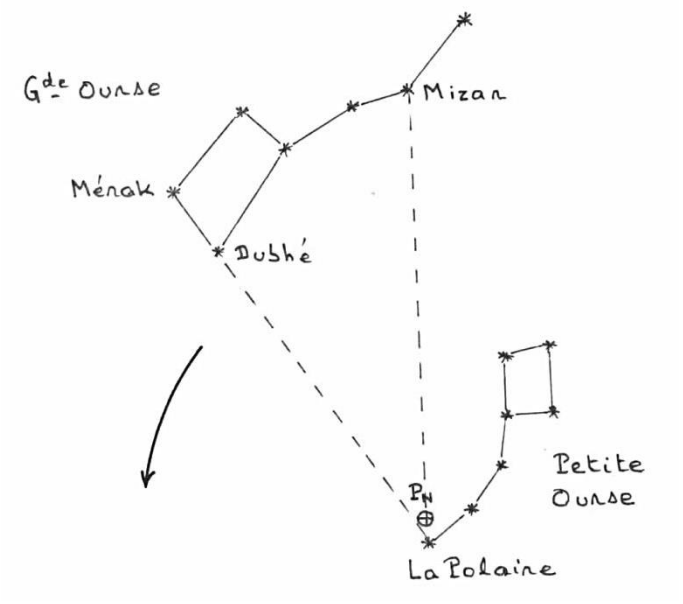


Fig. : 2-2

Les Éphémérides nautiques donnent la partie principale de la correction en fonction du temps et d'une valeur moyenne annuelle de la distance polaire ainsi que deux quantités correctives annexes, l'une correspondant au terme du second ordre et l'autre, fonction de la date, caractérisant les différences entre valeurs de distance polaire réelle et moyenne.

L'étude mathématique conduisant à l'expression de la correction x figure en annexe 2-1. Il n'existe pas de procédé équivalent de détermination de la latitude dans l'hémisphère Sud, l'étoile brillante la plus proche du pôle Sud étant Acrux dont elle est distante d'environ 27°.

Latitude par double observation (double altitude problem) :

Lorsqu'aucune des méthodes précédentes n'a pu être menée à bonne fin, il reste possible de déterminer la latitude par deux observations de hauteur, soit du même astre à deux instants distincts, soit encore de deux astres, simultanément ou non.

Des études contemporaines[11] indiquent que le problème du calcul de la latitude résultant de la mesure de deux hauteurs du Soleil et de la différence correspondante d'azimut a été posé dès le XVIe siècle par Pedro Nuñez (1537) ; la résolution en est graphique, sur un globe. La différence d'azimut, évaluée de manière assez approximative, conduisant à un résultat imprécis, les auteurs anglais Richard Hues (1594) puis John Davis (1607) lui substituèrent l'intervalle de temps – soit la différence d'angle horaire – entre les deux mesures de hauteur et résolvèrent le problème graphiquement, toujours sur un globe. C'est ensuite le XVIIIe et la première moitié du XIXe siècle qui virent l'éclosion d'une multitude de méthodes visant à déterminer la latitude par le calcul suite à la mesure de deux hauteurs du Soleil (ou de deux astres distincts) et de l'intervalle de temps écoulé entre les deux observations. L'initiateur semble avoir été Nicolas Fatio de Duillier (1664-1753), scientifique suisse, en 1728. Il sera suivi, en France, en Grande-Bretagne et, plus généralement, en Europe par de très nombreux auteurs dont l'énumération serait fastidieuse si l'on ne veut oublier personne.

[11] « The Double Altitude Problem » du Commander W. E. May (1950) et « A History of Nautical Astronomy » de Ch. H. Cotter (1968).

Les deux observations peuvent donc être relatives à un même astre, le Soleil en général, ou à deux astres distincts. Dans le premier cas, elles sont nécessairement décalées dans le temps, et, si le navire est en route, il conviendra de réduire la première hauteur à l'horizon de la seconde ; dans le second, les observations peuvent être quasi simultanées ce qui permet d'éviter l'opération de réduction. Pour exposer le principe général de détermination de la latitude, supposons que l'on ait mesuré simultanément les hauteurs H_1 et H_2 de deux astres A_1 et A_2 dont les déclinaisons D_1 et D_2 sont connues ainsi que la différence ΔP entre leurs angles horaires. On remarquera qu'une connaissance approximative de l'heure correspondante au méridien de référence suffit pour extraire d'un almanach les déclinaisons et la différence d'angle horaire avec une précision suffisante ; on notera aussi que si l'astre observé est le Soleil, ΔP est, à très peu de chose près, la différence de temps entre les deux observations. La figure 2-3 représente la sphère locale de l'observateur sur laquelle on a reporté les projections des deux astres.

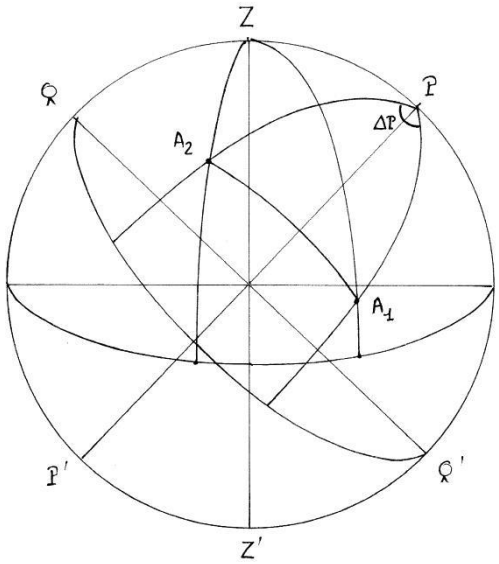


Fig. : 2-3

Sur la base des données d'observations, le calcul vise à déterminer la latitude φ du lieu dont le complément est l'arc ZP de la figure 2-3. La procédure générale est la suivante :

- dans le triangle sphérique PA_1A_2, on calcule l'arc A_1A_2 puis l'angle en A_1 que l'on notera A'_1 en appliquant deux fois la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique ;
- dans le triangle ZA_1A_2, on calcule l'angle en A_1 que l'on notera A''_1, toujours à l'aide de la formule fondamentale ;
- dans le triangle PZA_1, on évalue l'angle en $A_1 = A'_1 \pm A''_1$ et on applique une dernière fois la formule fondamentale pour en extraire la latitude, complément de l'arc ZP.

On pourrait tout aussi bien utiliser les angles en A_2 et le triangle PZA_2 pour effectuer l'opération finale. La méthode initiale de Fatio de Duillier est fondée sur ce schéma mais les formules seront transformées pour travailler aisément avec les logarithmes : on utilise la décomposition d'un triangle sphérique quelconque en deux triangles rectangles ainsi que les différentes opérations permettant de transformer une somme de lignes trigonométriques en produits. Enfin, dans le cas d'observations d'un même astre, on considère la déclinaison comme constante et égale à la moyenne des deux valeurs relevées ce qui permet de simplifier les calculs, le triangle PA_1A_2 étant ainsi isocèle. Ce schéma de résolution a été exposé, avec diverses propositions de simplification, par quasiment tous les auteurs de traités et manuels de navigation de la seconde moitié du XVIIIe siècle et d'une large première moitié du XIXe siècle ; il en est de même en Grande-Bretagne.

Le problème peut aussi être résolu par approximations successives, partant d'une latitude estimée connue. C'est l'idée qu'a développée Cornelis Douwes, examinateur du collège de l'Amirauté d'Amsterdam, en 1740. La méthode a été importée et publiée en Grande-Bretagne en 1759 ; elle fit l'objet d'une analyse par le D^r^

Pemberton en 1760 puis d'une rubrique détaillée dans le « British Mariner's Guide » de l'Astronome royal Nevil Maskelyne. Les tables facilitant sa mise en œuvre furent publiées en 1771 dans le Nautical Almanac puis rééditées à de nombreuses reprises par différents auteurs britanniques ; elle est connue en France et présentée par Pierre Levêque dans son « Guide du navigateur » en 1779 ; elle est également mentionnée par Jérôme Lalande, dans des compléments à la 2e édition de son « Astronomie », en 1781. La méthode semble avoir connu un certain succès au tournant des XVIIIe et XIXe siècles.

On pouvait enfin évaluer la latitude en utilisant une méthode indirecte – dite aussi de la fausse position – qui consistait à fixer deux valeurs arbitraires de latitude et d'en déduire les deux valeurs correspondantes de différence d'angle horaire. Connaissant la valeur mesurée de la différence d'angle horaire, il suffit ensuite d'interpoler linéairement entre les deux valeurs calculées pour trouver la latitude. La méthode est due à J. Lalande en 1771 ; elle n'est pas applicable lorsqu'une des observations est effectuée au voisinage du méridien. Jean Charles de Borda y apportera quelques modifications en 1787 pour y remédier. Joseph Ducom tentera, dans son « Cours complet d'observations nautiques » publié en 1820 puis en 1835, une simplification en utilisant les taux de variation des angles horaires consécutifs à une variation unitaire de latitude pour effectuer les interpolations.

Commentaires :

Le marin a donc à sa disposition de multiples procédés pour déterminer sa latitude. Tout naturellement, c'est le passage au méridien du Soleil qui sera le plus utilisé ; si l'observation en est facile, le procédé n'est pas sans défaut, notamment du fait de l'incertitude sur la dépression apparente de l'horizon dont la valeur peut s'écarter notablement de celles données par les tables, calculées pour des conditions de température et d'hygrométrie moyennes. L'incertitude qui en résulte sur la hauteur méridienne se reporte intégralement sur la latitude ainsi déterminée et peut atteindre plusieurs minutes. Si on le peut, on préférera le passage au méridien d'une étoile observée à l'aube ou au crépuscule ou encore une observation de l'étoile Polaire.

Le traitement des doubles observations est lourd en calculs et on peut s'interroger sur leur pratique réelle par les marins. Le professeur d'hydrographie Pierre Bouguer a exprimé son désaccord avec la méthode dans son « Nouveau traité de navigation » :

> « *On a proposé aussi d'observer la hauteur d'un Astre deux fois vers l'Orient ou vers l'Occident, & de mesurer avec une montre le temps écoulé entre les deux observations. Mais il faut que l'intervalle soit au moins de deux ou trois heures, & on n'est pas sûr de l'obtenir en Mer, à plusieurs secondes près, quelque exacte que soit l'horloge dont on se sert. Tout considéré, il s'agit de découvrir la grandeur de l'arc du méridien intercepté entre le Zénith & l'Équateur ; & il est certain qu'il n'y a pas de meilleur moyen d'y parvenir dans la pratique, que de se servir des Astres lorsqu'ils passent au Méridien. Si on emploie ce moyen direct, on ne doit pas craindre que les erreurs de l'observation se multiplient : supposé qu'on se trompe de deux ou trois minutes sur la hauteur de l'Astre, l'erreur ne sera que de la même quantité sur la latitude. Ce ne serait pas la même chose si les Navigateurs adoptaient les méthodes indirectes dont nous les avertissons de ne pas se servir. Il leur faudrait faire plusieurs observations ; & la moindre erreur qu'ils commettraient sur chacune, leur en produirait presque toujours d'extrêmement grandes sur la latitude, à cause des circuits dans lesquels ils seraient obligés de s'engager.* »

Quoiqu'il en soit, les recherches sur le procédé ont été nombreuses sachant de plus qu'elles pouvaient conduire simultanément à la longitude dès lors que l'heure du méridien origine est connue ; précisons ici qu'aujourd'hui l'expression « problème de Douwes » désigne couramment la recherche directe des coordonnées du point observé suite à deux mesures de hauteur d'astre(s). Ces méthodes, tombées en désuétude avec la généralisation de la pratique de la navigation par lieux de position au cours de la seconde moitié du XIXe siècle, ont pu être l'objet un siècle plus tard d'un certain regain d'intérêt avec le développement des moyens de calcul électronique.

ANNEXE AU CHAPITRE 2

LATITUDE PAR LA POLAIRE

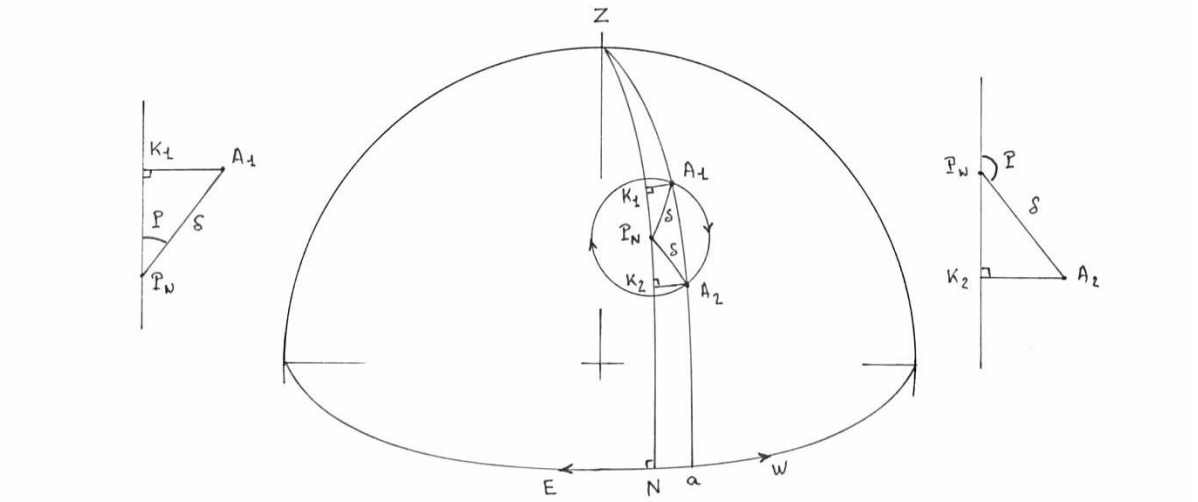
La distance polaire δ de l'étoile Polaire étant de faible valeur, sa hauteur au-dessus de l'horizon est donc peu différente de la latitude et l'on écrira $\varphi = H_v + x$, x étant une petite correction qui ne peut excéder, en valeur absolue, la distance polaire δ. La figure A2-1 ci-dessous représente la sphère locale d'un observateur sur laquelle on a porté le parallèle diurne de La Polaire, petit cercle centré sur la ligne des pôles, et deux positions successives de l'étoile, A_1 et A_2. Et on construit les points K_1 et K_2 définis par l'intersection du méridien avec des petits cercles de pôle Z et de rayon sphérique ZA_1 et ZA_2. On a :

$$NP_N = NK_1 - P_NK_1 = NK_2 + P_NK_2$$

Les dimensions des triangles curvilignes $P_NA_1K_1$ et $P_NA_2K_2$ étant petites, on peut considérer ces triangles comme plan et on a alors :

$$P_NK_1 = \delta.\cos P_1 \ \ (P_1 < 90°) \ \text{ et } \ P_NK_2 = \delta.\cos P_2 \ \ (P_2 > 90°)$$

Fig. : A2-1



On a donc, en définitive, NK_1 et NK_2 étant les hauteurs correspondantes, algébriquement :

$$\varphi = H_{v1} - \delta.\cos P_1 = H_{v2} - \delta.\cos P_2$$

soit, d'une manière générale, AHag étant l'angle horaire local de La Polaire au moment de l'observation :

$$\varphi = H_v - \delta.\cos AHag$$

Cette formule, approchée, est largement suffisante dans la pratique pour une détermination de la latitude à la minute près. On a cependant cherché à préciser cette formule approximative et on arrive, à l'aide d'un développement limité, à :

$$x = -\delta.\cos AHag + \frac{\delta^2}{2.\frac{10800}{\pi}}.\tan\varphi.(\sin AHag)^2$$

C'est cette formule[12], donnant x en minutes d'arc, qui est mise en tables dans les Éphémérides nautiques. La première correction (table A) est relative au 1er terme et est calculée avec la valeur moyenne de la distance polaire δ_m pour l'année en cours, la seconde correction permet de tenir compte de la valeur réelle de cette distance polaire (table B) et la troisième correction donne le terme du deuxième degré (table C). Les termes correctifs issus des tables B et C n'excèdent pas 0,6' (tant que la hauteur reste inférieure à 70°).

[12] Formule établie pour la première fois par Littrow en 1816.

CHAPITRE 3

DÉTERMINATION D'UN ANGLE HORAIRE, CALCULS D'HEURE

Introduction :

Le calcul élémentaire de la longitude G d'un lieu est fondé sur la détermination simultanée de l'angle horaire local d'un astre A, AHag, et de son angle horaire au méridien origine AHap.

On considère, sur la figure 3-1 ci-dessous, la sphère terrestre vue du pôle Nord à un instant donné ; on y a porté le grand cercle équateur ainsi que les traces du méridien origine OQ_0, du méridien d'un observateur OQ et du méridien d'un astre A, Oa. Le sens positif adopté est le sens rétrograde vu du pôle Nord. La relation de Chasles entre les arcs donne, à 360° près :

$$Q_0a = AHap = Q_0Q + Qa = G + AHag$$

Soit encore :

$$G = AHap - AHag \text{ à } 360° \text{ ou } 24 \text{ h près}$$

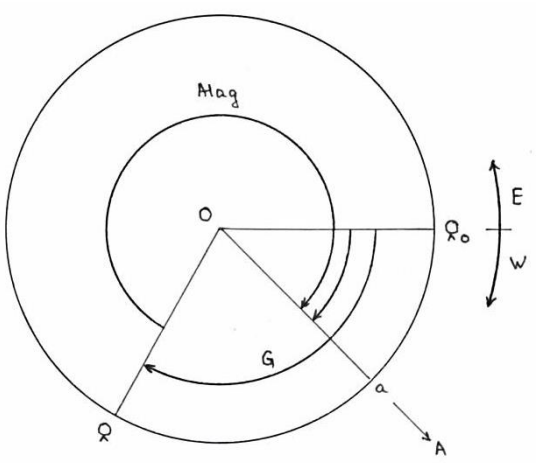


Fig. : 3-1

La détermination de l'angle horaire d'un astre au méridien origine repose sur la connaissance de l'heure de ce méridien à l'instant de l'observation, problème que se propose de résoudre la méthode des distances lunaires, et qui ne sera définitivement résolu de façon commode que lorsque l'on saura fabriquer un garde-temps capable d'indiquer en permanence cette heure avec une précision suffisante. Le problème de l'angle horaire local, objet de ce chapitre, est beaucoup plus simple à résoudre puisqu'il ne nécessite qu'une observation et un calcul.

Détermination d'un angle horaire local :

Considérons, en figure 3-2, la sphère locale d'un observateur dont la latitude φ est connue. Celui-ci mesure avec précision la hauteur H d'un astre A et évalue son azimut Z ; ces différents éléments permettent d'y placer l'astre A. Le triangle de position de l'astre est P_NZA dans lequel deux côtés sont connus avec précision, P_NZ et ZA ; le troisième côté P_NA est le complément de la déclinaison D de l'astre qui peut être connu en toute précision si l'astre observé est une étoile dont cette coordonnée est quasi-constante. Dans le cas de l'observation d'un astre errant, une simple estimation de l'heure de l'observation permet d'avoir accès à une valeur approchée de la déclinaison qui sera fournie par un almanach. Les trois côtés du triangle de position sont ainsi connus et on peut calculer, à l'aide de la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique, l'angle au pôle P du triangle. Cet

angle donne ensuite accès à l'angle horaire local AHag. Rappelons que l'on a AHag = P si l'astre est dans l'Ouest et AHag = 360° - P si l'astre est dans l'Est, ce qui est le cas représenté sur la figure 3-2.

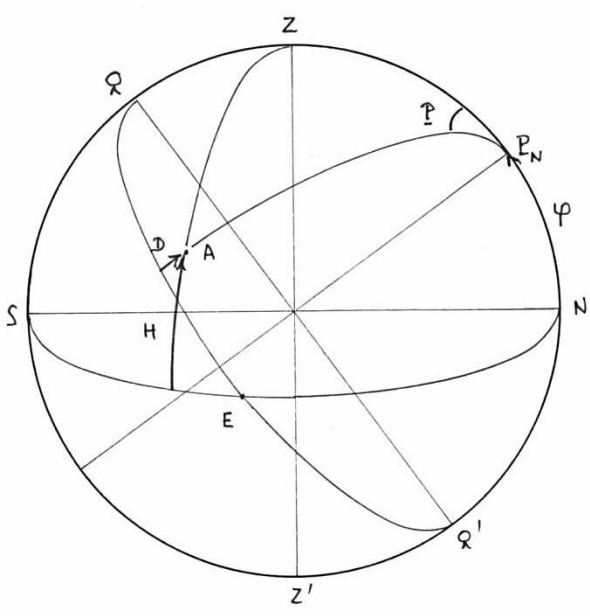


Fig. : 3-2

Comme il a déjà été évoqué, la formule fondamentale n'est pas logarithmique ; elle a donc été transformée par de nombreux auteurs, notamment le chevalier de Borda, pour pouvoir être calculée facilement (voir annexe 3-1).

Circonstances favorables au calcul d'angle horaire :

Les trois éléments supposés connus ne le sont évidemment qu'à hauteur d'une certaine incertitude :

- la latitude est issue d'une mesure précédente, parfois relativement ancienne, entretenue selon les éléments de l'estime, route suivie et chemin parcouru ;
- si on observe un astre errant, sa déclinaison sera obtenue dans un almanach en fonction d'une valeur parfois très approximative de l'heure au méridien de référence ;
- enfin, la hauteur est mesurée au sextant avec une plus ou moins bonne précision selon les conditions d'observation.

Il convient donc d'effectuer la détermination de l'angle horaire local au moment des « circonstances favorables au calcul d'heure[13] » dans lesquelles l'influence des incertitudes sur les données est minimale sur le résultat. Ces circonstances, dont la justification figure en annexe 3-2, peuvent se résumer de la façon suivante :

- observer de préférence un astre de faible déclinaison comme le Soleil, les planètes et les étoiles zodiacales ;
- si déclinaison D de l'astre et latitude φ sont de même nom, avec D < φ, s'astreindre à observer l'astre au voisinage de son passage au premier vertical (azimut E ou W),
- si déclinaison D de l'astre et latitude φ sont de même nom, avec D > φ, s'astreindre à observer l'astre au voisinage de sa digression maximale,
- enfin si déclinaison et latitude sont de noms contraires, il faudra observer l'astre à un instant le plus proche possible de son lever ou de son coucher.

[13] L'angle horaire local d'un astre était aussi appelé heure, ou temps, local de l'astre.

Dans ce dernier cas, il faudra que l'astre ait une hauteur suffisante (une dizaine de degrés) afin de limiter les effets de l'incertitude sur la réfraction astronomique.

Le temps local :

Le temps solaire vrai local – que l'on abrègera en heure locale ou temps local – est l'angle horaire local du Soleil. C'était ce temps qui réglait la vie à bord des navires en mer jusqu'à la généralisation des radiocommunications (TSF) qui n'est intervenue, à bord des navires de commerce, que lors de la Première Guerre mondiale. Cette heure locale, notée Tvg, se détermine directement par observation du Soleil au moment des circonstances favorables ; elle se rectifie au cours de la journée en fonction du déplacement du navire en longitude. La connaissance de l'équation du temps vrai E_v permet de passer au temps moyen local Tmg tout comme la connaissance de l'équation du temps civil E_c permet de passer au temps civil[14] local Tcg :

$$\mathrm{Tmg} = \mathrm{Tvg} + \mathrm{E_v} \quad \text{et} \quad \mathrm{Tcg} = \mathrm{Tvg} - \mathrm{E_c}$$

Le passage aux temps correspondants au méridien de référence nécessite de connaître la longitude G, convertie en heures. On a ainsi :

$$\mathrm{Tvp} = \mathrm{Tvg} + \mathrm{G} \ , \ \mathrm{Tmp} = \mathrm{Tmg} + \mathrm{G} \ , \ \mathrm{Tcp} = \mathrm{Tcg} + \mathrm{G}$$

Au prix d'une opération un peu plus longue, et disposant d'une valeur de la longitude estimée G_e, on peut aussi utiliser une étoile – ou une planète – dont on aura mesuré la hauteur pour déterminer son angle horaire local puis le temps solaire vrai local. Le principe consiste à déterminer, à l'aide d'un almanach, l'heure du passage de l'astre au méridien origine, en temps vrai de ce méridien, puis à évaluer l'intervalle de temps qui sépare cet évènement de celui de l'observation ; cette évaluation fait intervenir la longitude estimée et l'angle horaire local trouvé. On obtient ainsi l'heure approchée, en temps vrai du méridien origine, de l'observation qui, diminué de la longitude estimée conduit à l'heure vraie locale. La double intervention de la longitude estimée, positivement et négativement, conduit à une détermination relativement précise du temps vrai local (voir annexe 3-3).

Détermination du midi local, méthode des hauteurs correspondantes :

La méthode n'est commodément applicable que pour un observateur fixe, à bord d'un navire au mouillage par exemple. Elle consiste à observer une hauteur H du Soleil dans la matinée et de noter l'heure correspondante A_1 indiquée par le garde-temps utilisé (montre ou chronomètre). Dans l'après-midi, on effectue la même opération lorsque la hauteur du Soleil est égale à H ; on note alors l'heure correspondante A_2 indiquée par le garde-temps. Si la déclinaison du Soleil reste constante entre les deux mesures (au voisinage des solstices), l'heure A_0 indiquée par le garde-temps à l'instant du passage du Soleil au méridien du lieu est directement la moyenne des deux heures relevées, c'est-à-dire :

$$\mathrm{A_0} = \frac{\mathrm{A_1} + \mathrm{A_2}}{2}$$

et l'état absolu du garde-temps est directement égal à 12 – A_0. Connaissant sa marche, il est ensuite facile de donner l'heure, en temps vrai local Tvg de n'importe quel évènement.

Si la déclinaison du Soleil est variable, ce qui est le cas général, il conviendra d'ajouter algébriquement à la moyenne des heures relevées A_1 et A_2 un terme correctif dont l'expression est donnée en annexe 3-4.

La méthode est précise puisque elle n'exige pas la connaissance de la hauteur H. Si la réfraction est la même le matin et le soir, on peut admettre que les hauteurs vraies sont égales quand les hauteurs instrumentales le sont et le sextant n'est plus ici qu'un instrument de comparaison.

[14] Pour éviter le changement de date en milieu de journée, on utilise le temps civil en avance de 12 heures sur le temps moyen.

ANNEXES AU CHAPITRE 3

ANNEXE 3-1

FORMULES DE CALCUL DE L'ANGLE HORAIRE LOCAL

Formule de base :

La formule fondamentale de la trigonométrie sphérique appliquée au triangle de position de l'astre (voir figure 3-2 du texte) donne :

$$\sin H = \sin\varphi \,.\, \sin D + \cos\varphi \,.\, \cos D \,.\, \cos P$$

L'inconnue étant l'angle au pôle P, on a ensuite :

$$\cos P = \frac{\sin H - \sin\varphi \,.\, \sin D}{\cos\varphi \,.\, \cos D}$$

L'angle horaire local cherché, AHag est égal à l'angle au pôle P si l'astre est dans l'Ouest de l'observateur et à 360° - P si l'astre est dans l'Est de celui-ci.

Formule de Borda :

On a cherché à transformer l'expression ci-dessus pour obtenir une relation ne comportant que des produits de lignes trigonométriques pour effectuer le calcul en n'utilisant que des sommes de logarithmes. Une formule couramment employée est celle dite de Borda dont l'expression est la suivante :

$$\sin\frac{P}{2} = \sqrt{\frac{\cos s \,.\, \sin(s - H)}{\cos\varphi \,.\, \sin\delta}} = \sqrt{\cos s \,.\, \sin(s - H) . \sec\varphi \,.\, \csc\delta}$$

Dans ces expressions, δ est la distance polaire, complément de la déclinaison D et s est tel que $2s = \varphi + \delta + H$.

Après avoir évalué s et (s – H), on effectue la somme des quatre logarithmes des lignes placées sous le radical ; on divise par deux cette somme qui sera le logarithme du sinus P/2, d'où la valeur de l'arc correspondant qui, multiplié par deux est l'angle au pôle cherché.

Utilisation des sinus et demi-sinus verses :

Les Britanniques sont attachés à l'emploi des versines (sinus verses) et haversines (demi-sinus verses) définis par :

$$\mathrm{vers}(x) = 1 - \cos x \quad \text{et} \quad \mathrm{hav}(x) = \frac{1 - \cos x}{2}$$

Ces fonctions ont l'avantage d'être toujours positives. L'angle au pôle peut ainsi être calculé par l'une des deux relations :

$$\mathrm{vers}(P) = \frac{\mathrm{vers}(N) - \mathrm{vers}(\varphi - D)}{\cos\varphi \,.\, \cos D} \quad \text{et} \quad \mathrm{hav}(P) = \frac{\mathrm{hav}(N) - \mathrm{hav}(\varphi - D)}{\cos\varphi \,.\, \cos D}$$

Dans ces expressions, N désigne la distance zénithale, complément de la hauteur H.

ANNEXE 3-2

CIRCONSTANCES FAVORABLES AU CALCUL D'HEURE

L'angle au pôle P d'un astre, donnant accès à son angle horaire local, se détermine à partir de la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique connaissant les trois données de calcul qui sont la latitude φ, la hauteur H et la déclinaison D. Si on considère les petites variations Δφ, ΔH et ΔD, on obtient, par différentiation de la formule fondamentale, la variation correspondante de l'angle au pôle que l'on note ΔP. Après quelques transformations élémentaires, l'expression généralement retenue de ΔP est la suivante :

$$\Delta P = (\cot Z . \sec \varphi). \Delta\varphi + (\csc Z . \sec \varphi). \Delta H + (\cot A . \sec D). \Delta D = \alpha. \Delta\varphi + \beta. \Delta H + \gamma. \Delta D$$

Z et A représentent respectivement l'azimut de l'astre et l'angle à l'astre du triangle de position.

Si les petites variations Δφ, ΔH et ΔD représentent les incertitudes sur les trois paramètres, ΔP est l'incertitude qui en résulte sur l'angle au pôle, donc sur l'angle horaire. Celle-ci sera minimale lorsque les trois coefficients α, β et γ auront simultanément les valeurs les plus faibles.

Le coefficient α, qui affecte l'incertitude sur la latitude, est nul lorsque l'azimut est égal à 90° ou 270°, soit lorsque l'astre passe au premier vertical. Si on observe l'astre à ce moment, une incertitude même grande sur la latitude n'entraîne pratiquement aucune erreur sur l'angle horaire. Remarquons que α est d'autant plus grand que la latitude est forte.

Le coefficient β, qui affecte l'incertitude sur la hauteur, ne peut s'annuler ; il est même toujours plus grand que 1. Il est cependant minimal lorsque l'astre passe au premier vertical.

Le coefficient γ, qui affecte l'incertitude sur la déclinaison est nul lorsque l'angle à l'astre est égal à 90°, ce qui ne peut se produire que lorsque latitude et déclinaison sont de même nom et que D > φ ; l'astre est alors à sa digression maximale. On remarque également que, si latitude et déclinaison sont de même nom, avec D < φ, l'angle à l'astre sera maximal lorsque l'astre passera au premier vertical. On remarque enfin que le coefficient γ est d'autant plus grand que la déclinaison D est forte.

Ces différentes considérations conduisent à formuler les circonstances favorables au calcul d'heure qui sont énoncés dans le texte. On retiendra essentiellement qu'il convient :

- d'observer un astre de faible déclinaison dont l'azimut est aussi voisin que possible de 90° ou 270°,
- d'éviter d'utiliser un astre lorsqu'il est au voisinage du méridien puisque, à ce moment, les coefficients α, β et γ prennent de très grandes valeurs ; les circonstances sont alors éminemment défavorables au calcul d'heure.

ANNEXE 3-3

CALCUL DU TEMPS VRAI LOCAL PAR OBSERVATION D'UNE ÉTOILE OU D'UNE PLANÈTE

La figure A3-1 ci-dessous représente l'équateur terrestre vu du pôle Nord. OQ_0 est la trace du méridien origine et OQ celle du méridien de l'observateur dont on connait la latitude φ ainsi qu'une estimation de sa longitude notée G_e.

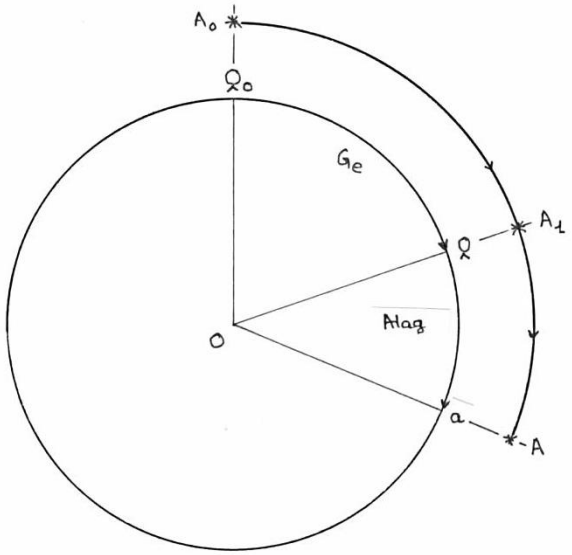


Fig. : A3-1

À un instant donné, cet observateur mesure la hauteur H d'un astre A de coordonnées équatoriales connues, ascension droite ARa et déclinaison D. Il calcule l'angle au pôle P puis l'angle horaire local AHag de l'astre A ; Oa est la trace du méridien de l'astre à l'instant de l'observation. Le problème consiste à déterminer l'heure vraie locale Tvg à cet instant.

Dans ce but, on commence par déterminer, à l'aide d'un almanach, l'heure vraie au méridien origine Tvp_0 du passage de l'astre dans le plan de ce méridien. On évalue ensuite l'intervalle de temps Δt mis par l'astre pour parcourir l'arc A_0A ; une estimation en est fourni par :

$$\Delta t \approx \frac{G_e + P}{\gamma_a}$$

Expression dans laquelle γ_a est la variation horaire d'angle horaire au méridien origine de l'astre, dont la valeur est, pour une étoile, de 15,04107°/h ≈ 15° 02,5'/h ; la longitude et l'angle au pôle sont exprimés en degrés, et sont positifs si Ouest, négatif si Est. On remarquera que si la longitude est Est, le passage de l'astre au méridien du lieu précède celui du méridien origine ; il le suit en longitude Ouest.

Dans ces conditions, l'heure vraie, au méridien origine, du passage de l'astre au méridien de longitude Ge est donc :

$$Tvp = Tvp_0 + \Delta t$$

L'heure vraie locale cherchée sera donc de :

$$Tvg = Tvp - \frac{G_e}{15} = Tvp_0 + \frac{G_e + P}{\gamma_a} - \frac{G_e}{15}$$

Remarque : on a procédé ici en utilisant le temps solaire vrai ; le raisonnement se reproduit identiquement avec le temps moyen ou le temps civil.

Exemple : calcul de l'heure vraie locale suite à une mesure de la hauteur de Régulus.

Données de calcul :

Date locale :	17 mars	H =	32° 24,1'	D =	11° 51,8' N
φ =	40° N	Z =	102,4°	AVa =	207° 37,5'
G_e =	149° W			Tvp_0 =	10 h 18 m 30 s

Le calcul d'angle au pôle donne P = 57° 25,1' E (puisque l'azimut est compris entre 0° et 180°) ; P est donc négatif.

L'intervalle de temps est $\Delta t = (G_e + P)/15{,}04107$ = 6 h 05 m 19 s, ce qui conduit à une heure vraie locale :

Tvg = 6 h 27 m 49 s

ANNEXE 3-4

ÉQUATION DES HAUTEURS CORRESPONDANTES

La correction, en secondes d'heure, à apporter à la moyenne des heures A_1 et A_2 des hauteurs correspondantes a pour expression :

$$C^{ion} = \frac{h}{30} \cdot \left[\frac{t}{\sin\frac{t}{2}} \cdot \tan\varphi - \frac{t}{\tan\frac{t}{2}} \cdot \cot\delta \right]$$

Expression dans laquelle h est la variation horaire de la distance polaire δ, en secondes, et t la différence $A_2 - A_1$ en heures. La correction est algébrique, h étant positive si δ augmente, négative dans le cas contraire. L'heure indiquée par le garde-temps à l'instant du passage du Soleil au méridien est ainsi :

$$A_0 = \frac{A_1 + A_2}{2} + C^{ion}$$

CHAPITRE 4

PREMIÈRES APPLICATIONS DES DISTANCES LUNAIRES POUR DÉTERMINER LA LONGITUDE

Introduction :

Ce chapitre est consacré à l'étude des premières mises en application réalistes de détermination de la longitude suite à une mesure de distance entre la Lune et une étoile, ou un astre du système solaire. Tous ces procédés d'observation et de calcul ont été élaborés avant la publication de distances pré-calculées dans le Nautical Almanac en 1767 ; dans ces conditions, une partie des opérations doit être consacrée à l'évaluation de la distance à partir des coordonnées célestes des deux astres fournies par un almanach. Plusieurs méthodes ont été mises au point et on a fait le choix d'analyser celles successivement conçues par le Père Louis Éconches Feuillée (1660-1732), scientifique et astronome français, l'astronome britannique Edmond Halley (1656-1742), le Père Esprit Pézenas (1692-1776), astronome et professeur d'hydrographie à Marseille, et quelques marins comme Joseph-Bernard Cogolin marquis de Chabert (1724-1805), Jean-Baptiste d'Après de Mannevillette (1707-1780) et Charles de Charnières (1740-1780).

Toutes les méthodes exposées ci-après reposent sur une connaissance aussi exacte que possible de la latitude φ et du temps vrai local Tvg ainsi que d'une estimation de la longitude G_e.

À l'exception de la solution du Père Feuillée, chaque méthode fait l'objet d'un exemple numérique en annexe à ce chapitre.

Le Père Feuillée :

C'est lors de son troisième voyage d'exploration, à bord du *Saint Jean-Baptiste*, que le Père Feuillée décrit une opération d'observation d'une distance entre la Lune et une étoile et la procédure de calcul qu'il utilise pour en déduire la longitude. L'affaire se déroule le 25 juillet 1708, alors que le navire est en Atlantique, au large de l'Amérique du Sud et est décrite dans le « Journal des observations », tome 1, du Père Feuillée, publié en 1714.

Dans son principe, la méthode utilisée est celle proposée par Pierre Apian : la distance mesurée à un instant de temps vrai local connu Tvg est comparée, après correction de parallaxe et de demi-diamètre (le Père Feuillée passe la réfraction astronomique sous silence), à une distance calculée à partir des données d'un almanach pour un instant de temps vrai au méridien origine Tvp égal à Tvg. L'écart entre les deux distances, l'une issue du calcul et l'autre de l'observation, est converti en un intervalle de temps Δt en admettant que la variation horaire de distance lunaire est égale à celle de la longitude céleste de la Lune relevée dans l'almanach. Dans ces conditions, la différence de longitude entre le méridien origine et le méridien du lieu est égale à $15.\Delta t$.

On remarquera que, pour évaluer la correction de parallaxe de hauteur, le Père Feuillée effectue en plus, à la suite de la mesure de la distance, une mesure de hauteur de la Lune.

Dans son journal, le Père Feuillée indique qu'il a observé une distance entre la Lune et l'Épi de la Vierge ; au final, il ne trouvera qu'une différence de 48' entre les longitudes estimée et observée :

> « *qui seroit de peu de conséquences dans une infinité de routes que nous avions parcouru durant près d'un mois, si on étoit assuré de ces longitudes …* ».

Il est conscient des difficultés de mise en œuvre de la méthode exigeant

> « *des observations (…) extrêmement justes, d'instruments exactement diviséz, & de beaucoup d'attention dans les calculs, quelque exact que soit un pilote dans ces opérations …* »

et il exhorte les pilotes au recoupement de leurs observations et calculs pour déterminer plus sûrement, autant que faire se peut, la position du navire :

> « *Les éléments de la navigation sont tous fort douteux, on doit par conséquent mettre en usage tout ce qui peut conduire à quelques certitude.* »

Edmond Halley :

Dans ses Tables Astronomiques[15] publiées sept ans après sa mort, on relève deux intéressants exemples de calcul de la longitude par distance lunaire ; ces exemples, datés de 1725, permettent de retrouver la procédure d'observation et de calcul proposée par E. Halley. Il effectue une mesure de distance entre la Lune et une étoile dont il note l'instant en temps vrai local Tvg. Ajoutant la longitude estimée à ce temps vrai local, il obtient le temps vrai correspondant au méridien origine qui va lui permettre de calculer, à l'aide des éléments d'un almanach, une distance vraie qu'il va altérer des effets de la réfraction astronomique et de la parallaxe de la Lune. Il obtient ainsi une distance apparente réfractée qui sera, dans la plupart des cas, différente de la distance résultant de l'observation. Il refait ensuite les calculs pour un instant de temps vrai au méridien origine situé 15 minutes plus tôt – ou plus tard suivant le cas de figure – et obtient ainsi une seconde distance apparente réfractée. A la suite de ces deux calculs, il dispose d'un encadrement de la distance observée par deux distances calculées aux bornes d'un intervalle de 15 minutes ; l'instant de temps vrai cherché Tvp se détermine ensuite par une simple interpolation linéaire puis, la différence de longitude entre le méridien origine et le méridien du lieu s'obtient en effectuant la différence entre les instants Tvp trouvé et Tvg.

On remarquera que, pour effectuer les corrections de réfraction astronomique et de parallaxe, les hauteurs de la Lune et de l'étoile ne sont pas observées mais calculées à l'aide d'un almanach et des éléments de position estimée.

Par ces deux exemples, E. Halley développe deux procédés de calculs conduisant aux distances apparentes réfractées. Le premier, sans doute le plus simple et applicable dans tous les cas de figure, consiste à déterminer la distance apparente réfractée sur la sphère locale de l'observateur après calcul des hauteurs apparentes réfractées et des azimuts des deux astres (voir le développement d'un exemple en annexe 4 ci-après). Le second, applicable lorsque les hauteurs des deux astres sont voisines[16], consiste à déterminer cette distance sur la sphère céleste en utilisant les longitudes et latitudes célestes des deux astres et les parallaxes de la Lune en longitude et latitude, notions que l'on retrouvera avec la méthode imaginée par Charles de Charnières.

S'il est clair qu'Edmond Halley a développé une méthode de calcul relativement simple et précise de calcul de longitude par une distance lunaire, il est plus hasardeux d'affirmer qu'il ait réellement utilisé la méthode en mer. En effet, il ne mentionne pas son utilisation lors de ses voyages en 1699 et 1700, employant plutôt les observations d'occultations et d'appulses d'étoiles ainsi que, à terre, celles des satellites de Jupiter. Son mémoire de 1731 présenté devant la Royal Society est consacré à la conception de ses tables astronomiques et fait référence aux occultations et appulses. Seule, une mention à l'invention de l'octant par J. Hadley la même année laisse entendre un développement prochain de la méthode des distances lunaires.

L'un des deux exemples développé par E. Halley sera repris et adapté[17], la procédure de calcul restant la même, par le Père Esprit Pézenas dans son « Astronomie des Marins » publiée en 1766.

En résumé, E. Halley n'utilise qu'une seule mesure de distance de la Lune à une étoile et effectue une comparaison entre distances apparentes réfractées résultant de l'observation et du calcul.

---

[15]« Astronomical Tables with precepts » publiées en latin en 1749 puis en anglais en 1752 et traduites en français en 1754.

[16] Dans ces conditions, si la distance n'est pas trop importante et si la hauteur des deux astres est supérieure à 20°, on vérifie que la correction de la distance due à la réfraction astronomique s'effectue très simplement : cette correction, exprimée en secondes est peu différente de la distance exprimée en degrés. Ainsi, par exemple, la correction de réfraction d'une distance observée de 48° sera d'environ 48''.

[17] Recalé sur le méridien de Paris et daté selon le calendrier grégorien, les Britanniques utilisant toujours le calendrier julien en 1725.

Joseph-Bernard Cogolin, marquis de Chabert :

Le marquis de Chabert est officier de marine ; ses activités scientifiques et astronomiques débutent à la fin des années 1740. Dans ses diverses expéditions maritimes, il emploie toutes les techniques connues relatives à la détermination des longitudes : éclipses de Lune ou de Soleil, occultations d'étoiles par la Lune, satellites de Jupiter et distances lunaires puis montres marines à partir de 1771.

Il est l'auteur d'une méthode originale qu'il expose dans un compte-rendu de voyage paru en 1753, « Voyage fait par ordre du Roi en 1750 et 1751 dans l'Amérique septentrionale pour rectifier les cartes des côtes de l'Acadie, de l'Isle Royale & de l'Isle de Terre-Neuve ; et pour en fixer les principaux points par des observations astronomiques ».

La méthode du marquis de Chabert repose sur une unique mesure de la distance de la Lune à une étoile[18] qui ne sera corrigée que du demi-diamètre de la Lune et restera apparente réfractée.

Pour l'instant de la mesure, exprimé en temps vrai au méridien origine grâce à la connaissance de la longitude estimée, on relève dans un almanach les coordonnées équatoriales (ascension droite et déclinaison) des deux astres, la parallaxe horizontale et le demi-diamètre de la Lune et l'angle horaire sidéral au méridien origine. À l'aide de ces éléments, on calcule ensuite les hauteurs vraies des deux astres ainsi que les angles parallactiques (angles à l'astre) de leurs triangles de position ; ces dernières quantités sont requises pour calculer les corrections à appliquer aux ascensions droites et déclinaisons consécutives à la réfraction astronomique et à la parallaxe en hauteur. Ces éléments correctifs seront appelés parallaxes en ascension droite et en déclinaison[19]. A l'aide des différents éléments de correction, on calcule les hauteurs, ascensions droites et déclinaisons des positions apparentes réfractées des deux astres et on évalue la différence des ascensions droites ainsi calculées ; cette dernière quantité est donc évaluée à partir d'éléments figurant dans un almanach pour un instant donné essentiellement fixé par la longitude estimée.

On fait ensuite intervenir la distance apparente réfractée résultant de l'observation avec laquelle on va calculer, à partir des déclinaisons apparentes réfractées des deux astres, la différence de leurs angles horaires locaux, donc la différence observée des ascensions droites. Si la longitude estimée est exacte, il doit y avoir égalité entre les différences d'ascension droite issues du calcul et de l'observation ; dans le cas contraire, il faut calculer l'écart entre les deux valeurs, déterminer, à l'aide de l'almanach, le taux de variation moyen de la différence d'ascensions droites entres les deux astres et fixer, à l'aide de ce taux, la correction à donner à la longitude estimée pour arriver à l'égalité des différences d'ascensions droites. Etant donné la variation rapide avec le temps des coordonnées de la Lune, il conviendra de recommencer le calcul avec la longitude trouvée si celle-ci est notablement différente de la longitude estimée.

En résumé, comme E. Halley, Chabert n'utilise qu'une seule mesure de la distance entre la Lune et une étoile. Il effectue ensuite une comparaison entre les ascensions droites issues de l'observation et du calcul des positions apparentes réfractées des deux astres.

Jean-Baptiste d'Après de Mannevillette :

Jean-Baptiste d'Après de Mannevillette est capitaine des vaisseaux de la Compagnie des Indes. Il a contribué aux progrès de la cartographie maritime, notamment dans l'océan Indien, en publiant en 1745 le « Neptune Oriental », routier des mers de l'Inde qui fut réédité plusieurs fois. Observateur habile et méticuleux, il est l'auteur d'une méthode de calcul de la longitude par les distances lunaires qu'il expose en détail et à plusieurs reprises dans un mémoire présenté à l'Académie royale des sciences en 1763 « Relation d'un voyage aux Isles de France & de Bourbon, qui contient plusieurs observations astronomiques, tant pour la recherche des longitudes sur mer que pour déterminer la position géographique de ces Isles ». Le voyage en question est celui

[18] On peut également considérer le Soleil ; il conviendra alors de tenir compte de sa parallaxe et de son demi-diamètre.
[19] Abus de langage puisque sous le nom de parallaxe, on assemble l'effet de réfraction astronomique à cette dernière.

du *Glorieux*, en 1750-1751 dont le commandement lui avait été confié avec pour mission, autre que commerciale, d'aller déterminer la position exacte du cap de Bonne-Espérance ainsi que celles des îles Mascareignes et d'effectuer le relevé de la côte sud-est de l'Afrique. L'abbé de La Caille fait partie du voyage jusqu'au Cap où il doit effectuer la mesure d'un degré de méridien et compléter le catalogue d'étoiles du ciel austral.

Dans la méthode développée, les opérations commencent par la mesure d'une série de trois hauteurs d'une étoile, suivie d'une série de trois hauteurs de la Lune puis de la mesure de la distance entre le bord éclairé de la Lune et l'étoile. Les heures vraies locales sont relevées pour chacune des mesures. Les trois hauteurs de l'étoile sont utilisées en premier lieu pour vérifier – et éventuellement corriger – l'heure donnée par la montre. Ceci fait, on fixe l'instant, en temps vrai local Tvg, de la mesure de la distance lunaire et on réduit les différentes hauteurs mesurées pour cet instant. Les hauteurs réduites sont ensuite corrigées de la dépression apparente de l'horizon, de la réfraction astronomique, et, pour la Lune, du demi-diamètre. On définit ainsi les positions apparentes du centre de la Lune et de l'étoile. Puis, on évalue, à l'aide de la longitude estimée, l'heure correspondante au méridien origine Tvp qui permet d'accéder aux éléments figurant dans un almanach ; on relève notamment les coordonnées vraies de la Lune, latitude et longitude célestes, que l'on convertit en coordonnées équatoriales, déclinaison et ascension droite, ainsi que la parallaxe horizontale. On calcule ensuite les angles à l'astre des triangles de position apparente de la Lune et de l'étoile d'où l'on déduira les parallaxes en ascension droite et en déclinaison. On évalue ensuite les déclinaisons et ascensions droites apparentes de la Lune et de l'étoile et on forme la différence de ces dernières avec laquelle on pourra calculer, à partir des positions apparentes des deux astres, la distance apparente entre les deux astres.

La distance ainsi trouvée est comparée à la distance observée corrigée du demi-diamètre et de la réfraction. Il devrait naturellement y avoir égalité si la longitude estimée est exacte. Dans le cas contraire, on reprendra un même calcul en utilisant une longitude de calcul de quelques degrés supérieure – ou inférieure, suivant le cas – à la longitude estimée. La longitude cherchée est ensuite obtenue par interpolation linéaire entre les deux distances trouvées par le calcul pour la valeur de distance apparente issue de l'observation.

En résumé, d'Après mesure les hauteurs des deux astres et la distance lunaire. Il compare ensuite les distances apparentes (non réfractées) issues de l'observation et du calcul.

Esprit Pézenas :

Dans son « Astronomie des Marins » publiée en 1766, le Père Pézenas propose deux méthodes de calcul de la longitude.

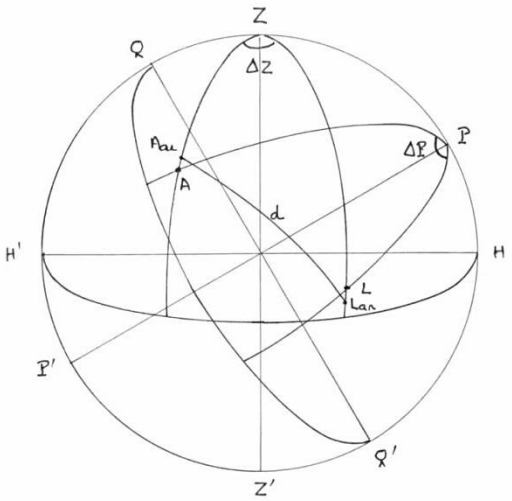


Fig : 4-1

La première est celle imaginée par G. Frisius que le Père Pézenas traite par le calcul. Elle repose sur la mesure simultanée de la hauteur de la Lune et de sa distance à une étoile dont les coordonnées équatoriales sont connues permettant, à partir de la longitude estimée, de déterminer une valeur de son angle au pôle. Un premier calcul fournira la hauteur vraie, puis apparente réfractée, et l'azimut de l'étoile (triangle PZA de la figure 4-1). On résout ensuite le triangle $ZA_{ar}L_{ar}$ dont les trois côtés sont connus obtenant ainsi ΔZ la différence d'azimut entre l'étoile et la Lune d'où l'on déduira l'azimut de la Lune. On résout enfin le triangle PZL dans lequel les côtés PZ et ZL sont connus ainsi que l'angle compris. On en déduit la déclinaison de la Lune et son angle au pôle. De ce dernier, on évalue la différence d'angle au pôle ΔP entre les deux astres qui est aussi la différence d'ascension droite ; celle de l'étoile étant connue, on en déduit celle de la Lune. De là, on passe aux coordonnées célestes, latitude et longitude, et on compare directement cette dernière, puisqu'il s'agit d'une longitude céleste vraie, à celle donnée par un almanach d'où on déduira, par interpolation, l'heure de l'observation au méridien de référence.

Au cas où l'observation de la hauteur de la Lune serait impossible, le Père Pézenas indique une seconde méthode dans laquelle on mesure les distances de la Lune à deux étoiles dont les coordonnées équatoriales sont connues.

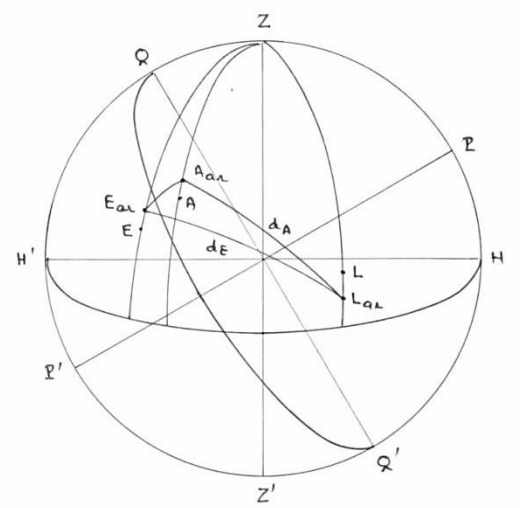


Fig : 4-2

À l'aide des éléments observés et fournis par un almanach, le problème consiste en premier lieu à calculer la hauteur de la Lune. Pour cela, après calcul des coordonnées horizontales des deux étoiles, on résout successivement les triangles $ZA_{ar}E_{ar}$ et $A_{ar}L_{ar}E_{ar}$ (figure 4-2) afin de déterminer la différence d'azimut entre la Lune et l'étoile E et l'angle en E_{ar} du triangle $E_{ar}ZL_{ar}$; la résolution de ce dernier triangle donne accès à la hauteur apparente réfractée de la Lune. On passe ensuite à la hauteur vraie et on poursuit la résolution du problème comme indiqué dans la première méthode.

Charles François Philippe de Charnières :

Charles de Charnières est officier de marine et inventeur, en 1766, du mégamètre, instrument d'optique conçu en vue de la mesure précise des courtes distances lunaires ; la distance angulaire mesurable était limitée à une dizaine de degrés avec une précision de lecture de quelques secondes d'arc. Bien qu'encombrant et ne pouvant être utilisé que sur un pied articulé, des expériences montrèrent que le maniement en était relativement facile « *même lorsque la mer était médiocrement agitée*[20] ». Mais, limité aux petits angles, le mégamètre ne pouvait pratiquement servir à la mesure des distances luni-solaires ; de nuit, il n'était que rarement utilisable pour observer une distance entre une étoile et la Lune dans une direction voisine de celle de la trajectoire de cette

[20] Selon l'astronome Mersais, pendant le voyage de *La Flore* en 1771-72 (cité par F. Marguet dans son « Histoire générale de la navigation »).

dernière. Son emploi fut donc rapidement abandonné au profit du sextant et du cercle. En 1767, le lieutenant de vaisseau de Charnières publia un « Mémoire sur l'observation des longitudes en mer » puis en 1772 une « Théorie et pratique des longitudes en mer ».

Ch. de Charnières propose de mesurer successivement une hauteur de l'étoile, une hauteur du centre de la Lune et la distance entre le bord éclairé de la Lune et l'étoile et de relever à chaque fois l'heure indiquée par la montre.

La mesure de hauteur d'étoile servira à fixer le temps vrai local Tvg puis, à l'aide de la longitude estimée, le temps vrai au méridien origine, Tvp, argument d'entrée dans l'almanach. Pour l'instant de la mesure de la distance lunaire, on y relèvera les coordonnées célestes de la Lune, longitude et latitude, sa parallaxe horizontale, son demi-diamètre et son moyen mouvement en longitude.

Dans la méthode imaginée par Ch. de Charnières, on détermine ensuite, pour l'heure Tvp, les coordonnées célestes apparentes de la Lune en utilisant les parallaxes en longitude et en latitude issues de la parallaxe horizontale donnée par l'almanach. Ce calcul, détaillé en annexe 4 ci-après, conduit à définir et à placer sur la sphère céleste le nonagésime, point culminant de l'écliptique au lieu de l'observation ou projection du zénith du lieu sur l'écliptique.

Ensuite, on corrige la distance observée entre le bord éclairé de la Lune et l'étoile des effets de la réfraction astronomique ce qui implique de calculer les angles à l'astre de chacun des triangles de position des deux astres. On évalue ainsi la distance apparente entre la Lune et l'étoile, corrigée de la réfraction astronomique, à laquelle on ajoute ou retranche, selon le cas de figure, le demi-diamètre pour se ramener au centre de la Lune.

À ce stade, on dispose des coordonnées célestes apparentes de la Lune et de l'étoile et de la distance apparente entre les centres des deux astres résultant de la mesure, l'ensemble restant affecté de la parallaxe de la Lune et non affecté de la réfraction. Dans ces conditions, il est maintenant possible de calculer, sur la sphère céleste, la différence de longitude apparente entre l'étoile et le centre de la Lune en utilisant leurs latitudes célestes et la distance apparente ; connaissant la longitude céleste de l'étoile, on évalue enfin celle de la Lune.

Si la longitude estimée qui a servi pour conduire les différents calculs est réellement celle de l'observateur, la longitude céleste apparente que l'on vient de trouver devrait être égale à celle donnée par l'almanach pour l'instant de l'observation corrigée comme on l'a vu de la parallaxe en longitude. D'une manière générale, on constatera un écart plus ou moins important entre les deux valeurs de longitude céleste conduisant à considérer une autre valeur de longitude géographique. Connaissant le moyen mouvement horaire en longitude de la Lune au voisinage de l'heure d'observation, il est ensuite facile de trouver la correction à apporter à la longitude estimée conduisant à la longitude réelle du lieu d'observation.

En résumé, on mesure ici les hauteurs des deux astres et la distance lunaire et on compare les longitudes célestes apparentes de la Lune issues de l'observation et du calcul.

Commentaires :

Pour résoudre le problème, les auteurs présentés ont fait différents choix dans la sélection de l'élément de comparaison entre résultats d'observation et données d'un almanach ; la référence, vraie, apparente ou apparente réfractée doit évidemment être commune. Le résumé de ces choix est indiqué dans le tableau ci-dessous :

Élément de comparaison ↓	Vrai ou géocentrique	Apparent ou topocentrique	Apparent réfracté
Distance de la Lune à l'astre	Feuillée Lacaille (chapitre 6)	d'Après de Manevillette	Halley
Longitude céleste	Pézenas Maskelyne (chapitre 7)	de Charnières	-
Ascension droite	-	-	Chabert

Remarquons en premier lieu que la comparaison entre éléments vrais est la plus simple puisque, partant d'éléments observés, les corrections de réfraction et de parallaxe s'exécutent naturellement. À l'inverse, lorsque l'on doit affecter à des éléments vrais la réfraction astronomique et la parallaxe en hauteur, les corrections sont à porter « à l'envers », ce qui peut nécessiter l'emploi d'approximations successives. En second lieu, il convient d'insister sur le fait qu'une bonne connaissance de la latitude φ, notamment lorsqu'il faut calculer l'une et/ou l'autre des hauteurs.

Du fait de l'absence de détails sur le mode opératoire utilisé, il ne sera pas fait de commentaires sur la solution du Père Feuillée.

La solution de Halley est, à notre sens, l'une des plus simples dans son principe qui est celui de la fausse position dans laquelle on pratique deux « essais » et l'on interpole entre les deux ; elle est de plus libre d'approximations à partir du moment où l'on admet que, sur l'intervalle de temps considéré, les coordonnées de la Lune sont connues avec une précision suffisante pour l'application de la méthode et que leurs taux de variation sont constants.

La solution de Pézenas est intéressante puisqu'elle s'affranchit presque complètement de la longitude estimée en évaluant une différence d'angle au pôle, donc d'ascensions droites, entre la Lune et l'astre. La précision du résultat dépend, outre la mesure de distance, d'une hauteur de la Lune qui peut être observée dans de bonnes conditions à l'aube ou au crépuscule, simultanément à la mesure de distance avec une étoile.

La méthode de d'Après de Mannevillette est à rapprocher de celle de Halley, avec cependant une formulation différente, les hauteurs étant mesurées, et plus compliquée de par l'utilisation des parallaxes en ascension droite et déclinaison.

La solution de Chabert s'appuie sur un unique calcul des coordonnées équatoriales de la Lune à une heure déduite de la longitude estimée ce qui, du fait du taux de variation de sa déclinaison qui peut être important, impose un calcul de seconde approximation à partir de la longitude trouvée. Dans le même esprit, de Charnières a imaginé une solution qui utilise les coordonnées célestes à la place des coordonnées équatoriales ; au prix d'une certaine complication dans les calculs, il évite ainsi la deuxième approximation finale puisque la latitude céleste de la Lune varie beaucoup moins rapidement que sa déclinaison.

En bref, quelle que soit la solution adoptée, les opérations sont fastidieuses et seuls des astronomes, rompus aux calculs numériques, et quelques rares marins savants seront en mesure de les mener à bien. Des simplifications, ainsi qu'une uniformisation des procédures de calcul, s'imposent pour que la détermination de la longitude par les distances lunaires puisse être pratiquement exécutée par les pilotes ; c'est vers ces objectifs que les recherches à venir vont tendre.

ANNEXE AU CHAPITRE 4

EXEMPLE DE CALCUL

Données du problème :

Le 27 mars 2020, la latitude est φ = 42° 12,0’ N ; la longitude estimée approximative est G_e = 28° 30’ W (Greenwich). On observe lors du crépuscule du soir une série de distances entre le bord éclairé de la Lune et l’étoile Aldébaran ainsi que deux séries de hauteur. Les moyennes, réduites à un même instant, sont :

- hauteur observée du bord inférieur de la Lune : H_{oL} = 26° 46,3’
- hauteur observée d’Aldébaran : H_{oA} = 48° 01,9’
- distance apparente réfractée (bord éclairé) : $L_{ar}A_{ar}$ = d = 25° 26,0’

L’élévation de l’œil est de 10 m ; l’erreur instrumentale du sextant est nulle, les mesures instrumentales sont donc directement des éléments observés.

Les données astronomiques extraites d’un almanach et exprimées en degrés décimaux sont les suivantes :

<u>Lune</u> :

Tcp	AHsp	ARL	D_L	$\mathcal{L}$	β	π	½ diam
20 h 21 h 22 h	125,7050° 140,7450° 155,7867°	43,7650° 44,2450° 44,7283°	N 12,8117° N 12,9817° N 13,1533°	45,1149° 45,6129° 46,1141°	- 3,7161° - 3,6873° - 3,6567°	0,9067°	0,2467°

<u>Aldébaran</u> :

ARa = 69,2633°, D_A = 16,5467° N, $\mathcal{L}$ = 70,0645°, β = - 5,4665°.

Passage au méridien de Greenwich à Tcp = 16h 14m 51s le 27 mars.

La configuration des deux astres lors des observations est représentée en figure A4-1 ci-dessous.

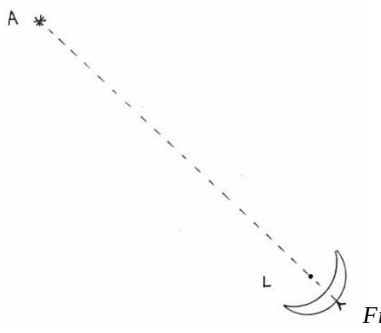


Fig :A4-1

Calcul de l’heure locale :

C’est la mesure de hauteur d’Aldébaran qui sera utilisée pour le calcul d’heure ; elle est assez proche du premier vertical Ouest, son azimut étant d’environ 245°. En pratique, un relèvement pris au compas permet de s’assurer que l’astre choisi est suffisamment éloigné du méridien pour donner un résultat sûr.

Les formules utilisables pour calculer l'angle horaire local sont indiquées à l'annexe 3-1. Les valeurs de dépression de l'horizon et de réfraction astronomique sont extraites des Éphémérides nautiques.

Le calcul peut se disposer ainsi :

Correction hauteur		Variables de calcul		Calcul d'heure	
H_o =	48° 01,9'	φ =	42,2000°	P =	39,1187°
- dep =	- 5,6'	D =	16,5467°	PMS à Greenwich =	16 h 14m 51s
- R_A =	- 0,9'	H_v =	47,9233°	+ (P + G_e)/15,0411 =	+ 4h 29m 44s
				- G_e/15 =	− 1h 54m 00s
H_v =	47° 55,4'			Tcg =	18h 50m 35s

Dans le cas de figure, l'astre est « à l'ouest » et l'angle horaire local AHag est égal à l'angle au pôle P. Le temps civil local[21] de l'observation qui servira dans les calculs ci-après est ***Tcg = 18h 50m 35s***.

Méthode de Halley :

L'heure locale étant déterminée, on ne considère ici que la seule mesure de distance entre la Lune et Aldébaran. Le demi-diamètre de la Lune étant de 0,2467° = 14,8' et le bord éclairé étant à l'extérieur (figure A4-1), la distance apparente réfractée entre l'étoile et le centre de la Lune est donc $L_{ar}A_{ar}$ = d = 25° 11,2' = 25,1867°.

<u>Premier calcul pour une longitude estimée G_e = 28° 30' W, soit pour Tcp = 20 h 44 m 35 s</u>

Détermination de l'heure correspondante au méridien origine et calculs des données astronomiques :

Calcul d'heure		Point vernal et Lune		Aldébaran	
Tcg =	18h 50m 35s	AHsp =	136,8806°	ARa =	69,2633°
+ G_e/15 =	1h 54m 00s	ARL =	44,1217°	D_A =	N 16,5467°
		D_L =	N 12,9380°		
Tcp =	20h 44m 35s				

Calcul des azimuts et hauteurs vraies et apparentes réfractées :

A l'aide des données de l'almanach, on calcule tout d'abord les angles horaires locaux des deux astres puis, dans les triangles de positions des deux astres P_NZL et P_NZA (figure A4-2), les hauteurs vraies connaissant de plus la latitude φ et les déclinaisons. On emploie ici la formule fondamentale, de la forme :

$$\sin H_v = \sin\varphi \,.\, \sin D + \cos\varphi \,.\, \cos D \,.\, \cos AH$$

On évalue ensuite les azimuts A_z avec cette même formule fondamentale dont l'expression sera ici :

$$\cos A_z = \frac{\sin D - \sin\varphi \,.\, \sin H_v}{\cos\varphi \,.\, \cos H_v}$$

[21] On utilise ici le temps civil local Tcg ainsi que le temps civil à Greenwich Tcp en lieu et place des temps vrais local Tvg et au méridien origine Tvp indiqués dans le texte.

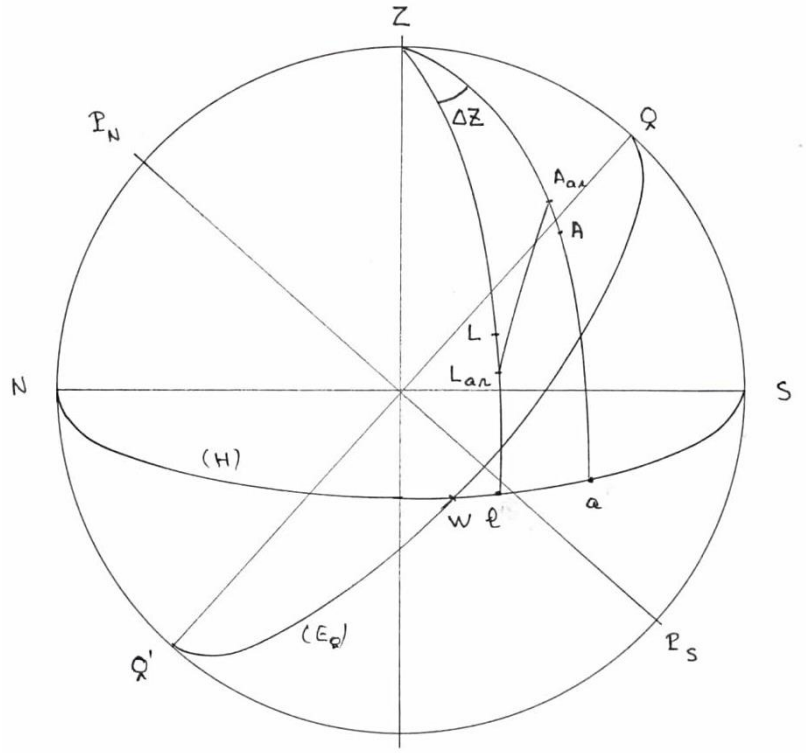


Fig : A4-2

On obtient :

Lune				Aldébaran			
AHsp =	136,8806°			AHsp =	136,8806°		
- ARL =	44,1217°			- ARa =	69,2633°		
- G_e =	28,5000°			- G_e =	28,5000°		
AHLg =	64,2589°			AHag =	39,1173°		
H_{vL} =	27,6432°	A_z =	N 97,6850° W	H_{vA} =	47,9243°	A_z =	N 115,5102° W
- ϖ =	0,8090°						
H_{aL} =	26,8342°			+ R_A =	0,0150°		
+ R_L =	0,0317°			H_{arA} =	47,9393°		
H_{arL} =	26,8659°						

La parallaxe en hauteur, $\varpi = \pi.\cos H_{aL}$ s'obtient en deux approximations successives. ΔZ est la différence d'azimut et est égal à 17,8252°.

Connaissant maintenant les hauteurs apparentes des deux astres et la différence d'azimut ΔZ, on peut calculer la distance apparente réfractée qui serait celle vue à l'instant Tcp. On emploie encore la formule fondamentale de la forme :

$$\cos d = \sin H_{arL} . \sin H_{arA} + \cos H_{arL} . \cos H_{arA} . \cos \Delta Z$$

On trouve : d = 25,2531° = 25° 15' 11''. Cette valeur est un peu supérieure à celle issue de la mesure et il convient de reprendre le calcul avec une autre valeur de longitude.

Second calcul pour une longitude estimée pour Tcp = 21 h 00 m 00 s soit pour une longitude G = 32° 21’ 15’’ W

Une petite étude sur la sphère locale montre qu’Aldébaran « rattrape » la Lune et qu’il faut donc trouver une distance plus petite ; l’instant Tcp de calcul doit être un peu plus tardif que le précédent ; ainsi la longitude à choisir doit être supérieure à 28° 30’ W. On choisit arbitrairement[22] 32° 21’ 15’’ W et on déroule un nouveau calcul (non détaillé ici) selon une procédure identique. On obtient une distance apparente de 25,1256° = 25° 07’ 32’’.

Il reste à interpoler entre les deux valeurs trouvées pour la distance apparente observée :

$d = L_{ar}A_{ar}$	G
25° 15’ 11’’	28° 30’
25° 11’ 12’’	G = ?
25° 07’ 32’’	32° 21’ 15’’

On trouve finalement : G = 30° 30’ 25’’ W, soit, arrondi à la minute, 30° 30’ W.

Méthode de Chabert :

Quelques éléments ont été calculés dans le déroulé de la méthode de Halley pour une longitude estimée de 28° 30’ W à l’heure Tcp = 20h 44m 35s. Il s’agit des angles horaires, des hauteurs vraies et des hauteurs apparentes réfractées des deux astres. On utilisera donc directement ces résultats. L’étape suivante consiste à calculer les angles à l’astre (en A et L) des triangles de position P_NZL et P_NZA (figure A4-3) des deux astres.

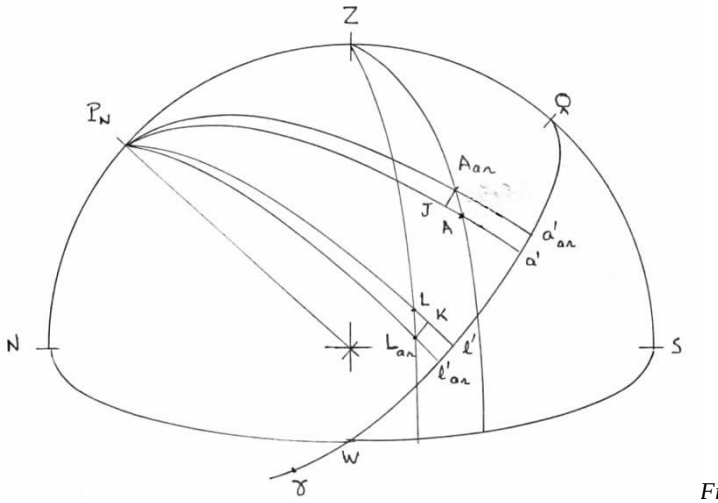


Fig : A4-3

Connaissant la latitude, les hauteurs vraies et les déclinaisons, on appliquera pour ce faire une nouvelle fois la formule fondamentale :

$$\cos L = \frac{\sin\varphi - \sin H_{vL} \,.\, \sin D_L}{\cos H_{vL} \,.\, \cos D_L} \quad \text{et} \quad \cos A = \frac{\sin\varphi - \sin H_{vA} \,.\, \sin D_A}{\cos H_{vA} \,.\, \cos D_A}$$

On trouve : L = 48,8748° et A = 44,2241°.

Calcul des parallaxes en déclinaison et en ascension droite et des valeurs apparentes.

[22] La longitude choisie correspond, pour Tcg = 18h 50m 35s, à Tcp = 21h 00m 00s, ce qui évite les interpolations dans l’almanach.

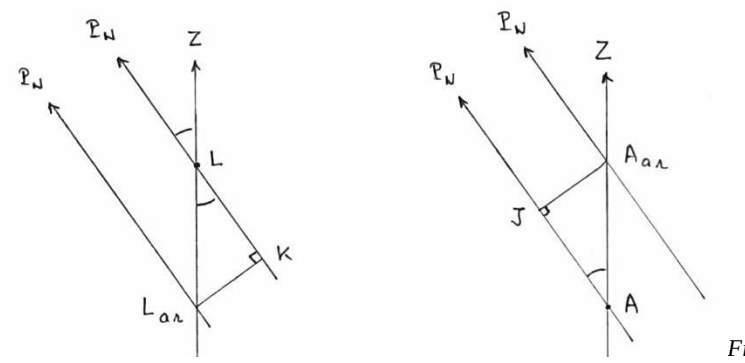


Fig : A4-4

Sur le schéma représenté en figure A4-4, L et L_{ar} sont les positions vraie et apparente réfractée de la Lune, A et A_{ar} celles d'Aldébaran. Les distances LL_{ar} et AA_{ar}, sont les différences entre hauteurs vraie et apparente réfractée, soit 0,7773° (parallaxe en hauteur moins la réfraction astronomique) pour la Lune et 0,0150° (réfraction astronomique) pour Aldébaran. Les corrections en déclinaison et ascension droite sont les projections de ces segments sur le cercle horaire et l'équateur, soit :

Lune : $KL = \varpi_D = 0{,}7773.\cos L = 0{,}5112°$, $KL_{ar}.\sec D_L = \varpi_{AR} = 0{,}7773.\sin L.\sec D_L = 0{,}6008°$;

Aldébaran : $JA = \varpi_D = 0{,}0150.\cos A = 0{,}0107°$, $JA_{ar}.\sec D_A = \varpi_{AR} = 0{,}0150.\sin A.\sec D_A = 0{,}0109°$.

On en déduit les déclinaisons et ascensions droites apparentes réfractées :

	Lune	Aldébaran
Déclinaison app réfract	$D_{arL} = 12{,}9380 - 0{,}5112 = 12{,}4268°$	$D_{arA} = 16{,}5467 + 0{,}0107 = 16{,}5574°$
Ascension droite app réfract	$ARL_{ar} = 44{,}1217 - 0{,}6008 = 43{,}5209°$	$ARa_{ar} = 69{,}2633 + 0{,}0109 = 69{,}2742°$

La différence d'ascensions droites apparentes réfractées calculée, pour la longitude $G_e = 28°\ 30'$ W, à l'instant Tcp, est alors : $\Delta AR_{calc} = (ARa_{ar} - ARL_{ar})_{calc} = 25{,}7533°$.

La différence d'ascensions droites apparentes observée, ΔAR_{obs} se déduit de la distance apparente réfractée observée de 25,1867° et des déclinaisons apparentes réfractées des deux astres. On applique alors une nouvelle fois la formule fondamentale dans le triangle $P_NA_{ar}L_{ar}$ (figure A4-3), soit :

$$\cos \Delta AR_{obs} = \frac{\cos d - \sin D_{arL} \,.\, \sin D_{arA}}{\cos D_{arL} \,.\, \cos D_{arA}}$$

On obtient $\Delta AR_{obs} = 25{,}6826°$, et on écrit : $(ARa_{ar} - ARL_{ar})_{calc} - (ARa_{ar} - ARL_{ar})_{obs} = 0{,}0707°$. Cette quantité est la variation d'ascension droite apparente réfractée de la Lune entre l'instant Tcp du calcul et l'instant de l'observation puisque l'ascension droite de l'étoile est constante.

Le moyen mouvement horaire en ascension droite de la Lune se déduit du tableau de données et a pour valeur 0,4817°/h. La différence de temps correspondant à la différence entre ascensions droites calculée et observée est donc de 0,0707°/0,4817° = 0,1468 h soit 2,2020° = 2° 12,1'. En suivant un raisonnement analogue à celui tenu dans la méthode de Halley, cette variation de temps correspond à une variation de longitude vers l'ouest. On obtient donc finalement G = 28° 30' + 2° 12,1', soit, arrondi à la minute, 30° 42' W.

La longitude trouvée montre que l'heure Tcp utilisée est en retard de 8 m 48 s par rapport à celle qu'il aurait fallu employer pour évaluer les angles horaires locaux, la déclinaison de la Lune et les hauteurs vraies. On reprend donc les calculs avec une heure Tcp déduite de l'heure Tcg calculée au départ (18h 50m 35s) et de la longitude qui vient d'être évaluée de 30° 42' W. L'heure Tcp est donc de 20 h 53 m 23 s.

Les différents résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous :

	Lune	Aldébaran
AHsg =	108,3864°	108,3864°
Ascension droite =	44,1921°	69,2633°
AHag =	64,1943°	39,1231°
Déclinaison =	12,9629°	16,5467°
H_v =	27,7070°	47,9204°
ϖ =	0,8085°	
ϖ_D =	0,5109°	0,0107°
ϖ_{AR} =	0,6005°	0,0109°
	L = 48,878°	A = 44,227°
ΔAR_{calc} =	25,6826°	
ΔAR_{obs} =	25,6884°	
Différence =	- 0,0058°	
Ecart en longitude =	- 10,8’	
Longitude observée =	30° 42’ – 11’ = 30° 31’ W	

On remarque, dans ce cas de figure, que les angles L et A sont peu affectés par la différence de temps ce qui fait que les parallaxes en déclinaison et ascension droite restent quasi inchangées ; en revanche, les écarts en déclinaison et en ascension droite de la Lune ne sont pas négligeables. Ce nouveau calcul conduit au résultat correct.

Méthode de d’Après de Mannevillette :

On part ici de la distance apparente réfractée entre l’étoile et le centre de la Lune $L_{ar}A_{ar}$ = 25,1867° et des hauteurs qui ont été mesurées dont on recherche en premier lieu les valeurs apparentes réfractées :

Lune		Aldébaran	
H_0 =	26° 46,3’	H_0 =	48° 01,9’
- dep =	- 5,6’	- dep =	- 5,6’
+ ½ diam =	+ 14,8’	- R_A =	- 0,9’
- R_L =	- 1,9’		
H_{aL} =	26° 53,6’	H_{aA} =	47° 55,4’

La longitude estimée utilisée pour le premier calcul est G_e = 28° 30’ W et l’heure correspondante au méridien origine est Tcp = 20h 44m 35s ; ascension droite ARL = 44,1217° et déclinaison D_L = 12,9380° de la Lune évaluées pour cet instant.

On calcule ensuite, à l’aide de la formule fondamentale, une valeur approchée[23] de l’angle à l’astre du triangle de position apparente de la Lune P_NZL_a connaissant la latitude φ, la hauteur apparente et la déclinaison.

On obtient ici : angle en L_{ar} = 48,98°, angle en A_{ar} = 44,21°.

Par un raisonnement analogue à celui utilisé dans la méthode de Chabert (figure A4-4), on évalue les parallaxes en déclinaison et en ascension droite de la Lune. Après évaluation de la parallaxe en hauteur (48,5’ = 0,8083°) on obtient pour la Lune :

[23] En toute rigueur il faudrait utiliser les déclinaisons apparentes, donc procéder par approximations successives.

$KL = \varpi_D = 0{,}8083.\cos L_{ar} = 0{,}5305°$, $KL_a.\sec D_L = \varpi_{AR} = 0{,}8083.\sin L_{ar}.\sec D_L = 0{,}6258°$.

On en déduit la déclinaison et l'ascension droite apparente de la Lune :

	Lune
Déclinaison apparente	$D_{aL} = 12{,}9380° – 0{,}5305° = 12{,}4075°$
Ascension droite apparente	$ARL_a = 44{,}1217° – 0{,}6258° = 43{,}4959°$

On calcule enfin la distance apparente connaissant les déclinaisons apparentes et la différence des ascensions droites apparentes calculée pour la longitude et l'instant considérés, $\Delta AR_{calculée} = 25{,}7679°$. On obtient, en employant la formule fondamentale $L_aA_{acalculée} = 25{,}2711°$.

Il convient ensuite de corriger la distance observée de la réfraction astronomique pour obtenir une distance apparente. La correction est de +1,0' ; son calcul sera explicité ci-après, dans la méthode de de Charnières. Dans ces conditions, la distance apparente observée est $L_aA_{aobservé} = 25°\ 12{,}2' = 25{,}2033°$.

Les distances observée et calculée étant différentes, il convient d'effectuer un nouveau calcul pour une autre valeur de longitude. Compte tenu de ce qui précède, on choisira une longitude de 32° 21' 15'' W, ce qui conduira à trouver, après déroulement du calcul complet (non représenté), une distance calculée de 25,1437°.

L'interpolation finale donnera G = 30° 33' W.

Méthode de de Charnières :

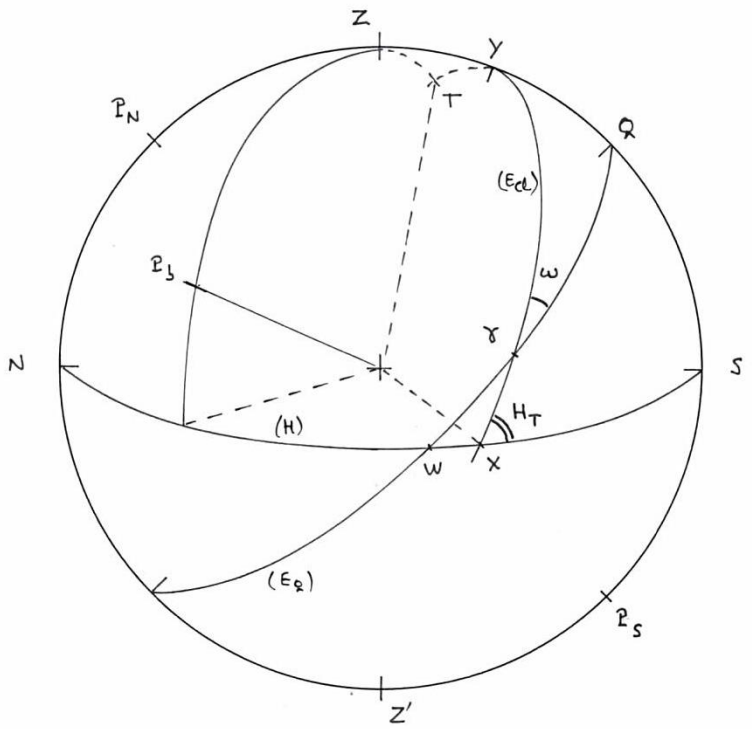
Il faut ici ajouter une donnée, l'obliquité de l'écliptique $\omega = 23{,}4367°$ en moyenne en 2020.

La longitude estimée étant $G_e = 28°\ 30'$ W, l'instant correspondant au méridien origine est Tcp = 20h 44m 35s et les coordonnées célestes à considérer sont :

	Longitudes $\mathcal{L}$	Latitudes β
Lune	45,4849°	- 3,6947°
Aldébaran	70,0645°	- 5,4665°

On détermine également l'ascension droite du milieu du ciel ou angle horaire sidéral local pour l'instant considéré, $AHsg = AHsp – G_e$ qui est égal à 108,3806°.

La hauteur apparente du centre de la Lune (calculée dans l'application précédente) est $H_{aL} = 26°\ 53{,}6' = 26{,}8933°$.



A4-5

Détermination de la hauteur et de la longitude céleste du nonagésime T (figure A4-5) :

En un lieu donné, le nonagésime est le point le plus haut de l'écliptique ou encore la projection orthogonale du zénith Z sur l'écliptique.

	Formules utilisées	Résultats
Longitude point culminant	$\tan \gamma Y = \tan AHsg / \cos \omega$	$\gamma Y = 106{,}9547°$
Déclinaison point culminant	$\tan QY = \sin AHsg \,.\, \tan \omega$	$QY = 22{,}3615°$
Angle écliptique/méridien	$\cos Y = \cos AHsg \,.\, \sin \omega$	$Y = 97{,}2048°$
Hauteur du nonagésime	$YS = QY + 90° - \varphi$ $\cos X = \sin Y \,.\, \cos YS$	$YS = 70{,}1615°$ $X = 70{,}3246°$
Arc XY	$\tan XY = \tan YS / \cos Y$	$XY = 87{,}4093°$
Longitude du nonagésime	$\gamma T = \gamma Y - (90° - XY)$	$\gamma T = 104{,}3640°$

La différence entre les longitudes célestes de la Lune et du nonagésime est donc $\Delta\mathcal{L} = \gamma T - \mathcal{L}_L = 58{,}8791°$.

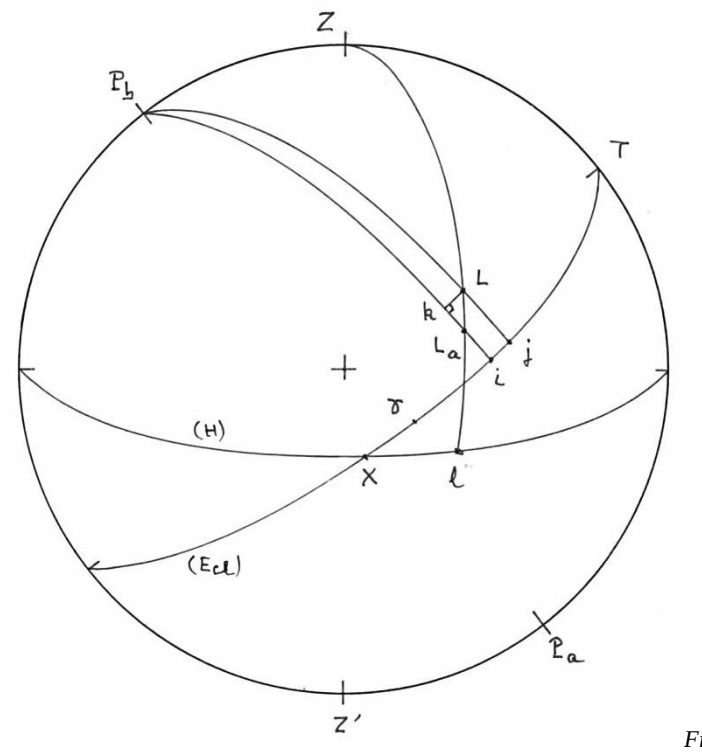


Fig : A4-6

On calcule ensuite l'angle en L_a du triangle P_bZL_a (figure A4-6) ; on peut ici appliquer l'analogie des sinus :

$$\sin L_a = \frac{\sin X \,.\, \sin \Delta L}{\cos H_{aL}}$$

Ce qui donne L_a = 64,6685°.

Selon un raisonnement équivalent à celui employé pour calculer les parallaxes en déclinaison et ascension droite, on évalue ici les parallaxes en latitude et longitude célestes de la Lune. Après évaluation de la parallaxe en hauteur (48,5' = 0,8083°), on obtient :

$$\varpi_\beta = 0{,}8083.\cos L_a = 0{,}3458°,\ \varpi_L = 0{,}8083.\sin L_a.\sec\beta_L = 0{,}7321°.$$

On obtient une première approximation des coordonnées célestes apparentes de la Lune (les parallaxes sont toutes deux soustractives), notamment de la longitude, $\mathcal{L}_{La}$ = 44,7528° qui va être utilisée pour évaluer l'angle en P_b du triangle P_bZL_a entre le méridien céleste du nonagésime et le méridien céleste apparent de la Lune, soit ΔL = 59,6112°. On reprend alors, avec cette dernière valeur, les calculs des parallaxes qui donnent :

$$L_a = 65{,}6086°,\ \varpi_\beta = 0{,}8083.\cos L_a = 0{,}3338°,\ \varpi_L = 0{,}8083.\sin L_a.\sec\beta_L = 0{,}7377°.$$

On obtient finalement: $\mathcal{L}_{La}$ = 44,7472 et β_{La} = -4,0285 (austral).

On calcule ensuite la distance lunaire corrigée des simples effets de la réfraction astronomique qui est, pour ce qui est de la correction de hauteur, de 1,9' pour la Lune et 0,9' pour Aldébaran. Pour évaluer les termes correctifs correspondants, il faut calculer les angles en L_a et en A_a du triangle sphérique ZL_aA_a.(voir figure A4-2) dans lequel on connait les trois côtés (compléments des hauteurs apparentes et distance apparente). On trouve ainsi, toujours en appliquant la formule fondamentale, que l'angle en L_a est de 28,7° et l'angle en A_a de 140,2°. Par projection des arcs représentatifs des réfractions sur l'arc de distance, on obtient la correction globale de distance : 1,9.cos L_a + 0,9. cos A_a = 0,98' = + 0,0163°.

La distance corrigée des réfractions est donc de 25,1867° + 0,0163° = 25,2030°. Cette distance reste entachée de l'effet de la parallaxe horizontale de la Lune.

Il est maintenant possible de calculer une longitude apparente de la Lune, corrigée des effets de la réfraction astronomique, comparable à celle calculée précédemment compte tenu de la parallaxe en longitude. On raisonne donc sur la sphère céleste, à partir du triangle sphérique $P_bL_aA_a$ dans lequel les trois côtés sont connus (colatitudes célestes apparentes et distance apparente calculée ci-dessus) et on évalue, toujours à l'aide de la formule fondamentale, l'angle en P_b, différence de longitude céleste apparente des deux astres :

$$\cos \Delta L_a = \frac{\cos L_a A_a - \sin \beta_{aL} \,.\, \sin \beta_{aA}}{\cos \beta_{aL} \,.\, \cos \beta_{aA}} = 25{,}2507°$$

En retranchant cette différence de la longitude apparente de l'étoile, on obtient la longitude céleste apparente observée de la Lune, soit 44,8138° qu'il s'agit de comparer à la longitude céleste apparente calculée ci-dessus pour l'instant Tcp considéré, à la longitude G_e, qui est de 44,7472°. Connaissant le moyen mouvement en longitude céleste déduit du tableau de données, il est ensuite facile de déterminer le retard cherché, donc l'écart en longitude par rapport à la longitude estimée.

Moyen mouvement : 0,4996°/h ; écart en longitude céleste : 0,0666° ; écart en longitude résultant : 0h 08m 00s, soit 2° 00,0' d'où une longitude observée G = 30° 30' W.

Il est inutile, dans ce cas de figure, d'effectuer une itération partant de la longitude qui vient d'être trouvée. En effet, la variation de latitude céleste qui résulte d'une différence de temps de 8 minutes est quasiment sans effet sur le calcul de la différence des longitudes célestes apparentes entre la Lune et Aldébaran. Le calcul a été fait, pour vérification, et aboutit à une égalité (au 1/10' près) entre longitudes célestes apparentes et observées et calculées.

Méthode de Pézenas :

On ne traitera ici d'une façon abrégée que de la première méthode.

Hauteur et azimut d'Aldébaran			
P_A =	39,1173°	H_{vA} =	47° 55' 27''
φ =	42,2000°		
D_A =	16,5467°	Z_A =	N115,5101°W

Hauteurs apparentes réfractées des deux astres : Aldébaran : H_{arA} = 47° 56' 18'' ; Lune : H_{arL} = 26° 55' 30''.

Différence d'azimut et azimut Lune			
H_{arL} =	26,9250°	ΔZ=	17,7930°
H_{arA} =	47,9389°		
d =	25,1867°	Z_L=	N97,7182°W

Hauteur vraie du centre de la Lune: H_{vL} = 27° 42' 07''.

Coordonnées horaires Lune			
Z_L =	97,7182°	D_L =	12° 57' 16''
φ =	42,2000°		
H_{vL} =	27,7019°	P_L =	64° 11' 37''W

La différence des ascensions droites est égale à celle des angles au pôle, l'ascension droite de la Lune est donc de 44° 11' 13''.

L'obliquité de l'écliptique étant de 23,4367°, les formules de passage des coordonnées équatoriales aux coordonnées célestes donnent, pour la Lune, une latitude de 3,6972° austral et une longitude de 45,5508°. L'interpolation dans l'extrait d'éphéméride donne une heure Tcp = 20 h 52 m 31s d'où une longitude de 30° 29' W.

Récapitulatif des résultats :

Méthodes	Longitude calculée
Halley	30° 30' W
Chabert	30° 42' W
Chabert une itération	30° 31' W
d'Après de Mannevillette	30° 33' W
Pézenas	30° 29' W
de Charnières	30° 30' W

CHAPITRE 5

MÉTHODE DE L'ANGLE HORAIRE

L'astronome Pierre-Charles Lemonnier (1715-1799) et le chanoine génovéfain et astronome Alexandre-Guy Pingré (1711-1796) sont les principaux promoteurs de la méthode dite de l'angle horaire dont le principe est fondé sur une observation unique de la hauteur de la Lune ; comme on va le voir, elle demande cependant plusieurs opérations annexes et non simultanées pour être correctement conduite à son terme.

Principe général :

On dispose d'une montre calée, avec précision, sur le temps vrai local Tvg et on connaît la latitude φ du lieu d'observation de même que la déclinaison D de la Lune. On mesure ensuite, à une heure vraie locale Tvg_1, la hauteur d'un bord de la Lune que l'on corrige de l'erreur instrumentale, de la dépression apparente de l'horizon, de la réfraction astronomique, du demi-diamètre et de la parallaxe en hauteur ; suite à ces opérations on obtient la hauteur vraie, géocentrique, du centre de la Lune. Connaissant les trois côtés du triangle de position, il est possible de calculer l'angle horaire local de la Lune à l'instant de l'observation que l'on notera $AHag_1$.

Disposant d'un almanach permettant le calcul des coordonnées horaires de la Lune, l'observateur peut ensuite évaluer l'angle horaire de la Lune par rapport au méridien origine, $AHap_2$, à l'instant $Tvp_2 = Tvg_1$.

La relation générale des temps simultanés donne, pour l'instant Tvg_1 :

$$Tvg_1 + ARv_1 = AHag_1 + ARa_1$$

Et pour l'instant Tvp_2 :

$$Tvp_2 + ARv_2 = AHap_2 + ARa_2$$

La différence membre à membre des deux relations donne ensuite

$$AHap_2 - AHag_1 = (ARv_2 - ARv_1) - (ARa_2 - ARa_1)$$

On a d'autre part $Tvp_2 = Tvg_2 + G/15$, G étant la longitude cherchée, en degrés. On a donc, puisque $Tvp_2 = Tvg_1$ par hypothèse, $G/15 = Tvg_1 - Tvg_2 = - \Delta t$, intervalle de temps entre les deux instants considérés. Connaissant, grâce aux données de l'almanach, les moyens mouvements horaires en ascension droite du Soleil, m_S, et de la Lune[24] m_L, on peut ensuite écrire :

$$\mathrm{AHap_2 - AHag_1 = (m_S - m_L).\Delta t = (m_L - m_S).G/15}$$

D'où la longitude G, exprimée en degrés :

$$\mathrm{G = \frac{AHap_2 - AHag_1}{m_L - m_S}.15}$$

L'explication ci-dessus du principe de la méthode de l'angle horaire correspond, en langage d'aujourd'hui, à celle donnée par A.-G. Pingré dans son « État du Ciel pour l'année 1757 ».

[24] La différence $m_L - m_S$ est en moyenne d'environ 30'/h.

L'observation pratique :

A.-G. Pingré a détaillé les différentes opérations à effectuer à partir des données d'un almanach qu'il a entièrement calculé pour servir la méthode de détermination de la longitude par l'angle horaire. Cet almanach, « L'État du Ciel », a été publié pour les années 1754 à 1757 ; pour résoudre le problème on y distingue trois cas de figure pour lesquels trois procédures d'observation et de calcul sont indiquées.

Quel que soit le cas de figure envisagé, la latitude φ du navire a été déterminée avec autant de précision que possible et une bonne montre a été calée sur le temps vrai local ; ceci suppose un « calcul d'heure » avec le Soleil au voisinage de son passage au premier vertical, donc en début de matinée ou en fin d'après-midi, et une observation précise du passage du Soleil au méridien estimé, ou méridienne, pour évaluer la latitude. Le navire étant évidemment en mouvement, il conviendra d'en tenir compte pour actualiser la latitude et l'heure vraie locale avec les éléments de l'estime.

<u>1re cas de figure</u> :

L'observation de la hauteur de la Lune au moment de son passage au méridien estimé est possible ; connaissant la latitude, on peut déterminer simplement, et précisément, la déclinaison de la Lune à cet instant. On note évidemment l'heure indiquée par la montre à cet instant. On attend ensuite de se trouver dans les circonstances favorables au calcul de l'angle horaire de la Lune, c'est-à-dire lorsqu'elle arrive au voisinage du premier vertical. On en mesure la hauteur et on note l'heure ; l'intervalle de temps depuis le passage de la Lune au méridien permet, connaissant le moyen mouvement en déclinaison fourni par l'almanach, de rectifier la valeur obtenue précédemment ; la latitude est corrigée du déplacement du navire. On a maintenant à disposition les trois côtés du triangle de position de la Lune connaissant la latitude, la déclinaison et la hauteur ; on peut donc calculer l'angle horaire $AHag_1$. A.-G. Pingré effectue ce dernier calcul à partir de la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique qu'il transforme pour la rendre calculable par logarithmes. La suite du calcul est conforme à ce qui a été énoncé dans le principe général.

<u>2e cas de figure</u> :

Il n'a pas été possible d'observer le passage de la Lune au méridien ; la déclinaison n'est donc pas connue avec précision et il faudra procéder par itérations connaissant une valeur approchée de la longitude – la longitude estimée G_e – au moment de la mesure de hauteur en vue de calculer l'angle horaire. L'heure vraie locale Tvg_1 ayant été notée, on évalue, avec la longitude estimée G_e, l'heure approximative correspondante au méridien origine : $Tvp_{app} = Tvg_1 + G_e$. Cette heure donne accès à une valeur approchée de la déclinaison de la Lune à partir des données de l'almanach. On effectue alors, à partir de cette donnée, un premier calcul d'angle horaire suivi du calcul de longitude. Si la longitude trouvée G est très voisine de la longitude estimée G_e, on adoptera cette valeur. Dans le cas contraire, on effectue une nouvelle détermination de la déclinaison de la Lune à partir de l'heure Tvp déduite de la longitude G trouvée. On effectue alors un second calcul d'angle horaire suivi du calcul de longitude. De même, si la longitude trouvée G' est très voisine de la longitude G, on adoptera cette valeur. Dans le cas contraire, on cherchera, par une simple proportion, la longitude G'' telle que l'écart ε soit nul.

	1re itération	2e itération
Longitude de calcul	G_e	G
Longitude calculée	G	G'
Écart	$\varepsilon_1 = G - G_e$	$\varepsilon_2 = G' - G$

On vérifie, sur la base des deux premières itérations (voir figure 5-1) :

$$G'' = G_e + \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} = G' + \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}$$

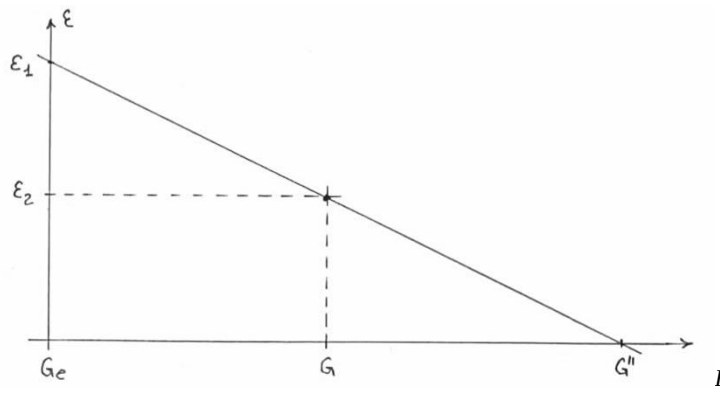


Fig : 5-1

3e cas de figure :

Comme dans le 2e cas, il n'a pas été possible d'observer le passage de la Lune au méridien ; la déclinaison n'est donc pas connue avec précision. De plus, les conditions d'observation n'ont pas permis de mesurer précisément la hauteur de la Lune (horizon mal défini par exemple) par contre, on a pu mesurer la distance de la Lune à une étoile (ou au Soleil) et noter l'heure vraie locale correspondante ; on a également obtenu une mesure approximative de la hauteur de cette étoile (ou du Soleil). Il faudra de même procéder par itérations connaissant une valeur approchée de la longitude au moment de la mesure de hauteur en vue de calculer l'angle horaire.

La première opération consiste à réduire la distance lunaire pour obtenir la distance vraie, géocentrique ; A.-G. Pingré utilise une méthode indirecte, ou différentielle, ne faisant intervenir que les termes correctifs du premier ordre (voir chapitre 7). Cette distance étant obtenue, on effectue le calcul de la différence des angles horaires de l'étoile (ou du Soleil) et de la Lune connaissant en outre la déclinaison de l'étoile et une valeur approchée de la déclinaison de la Lune obtenue, comme dans le 2e cas de figure, en faisant intervenir la longitude estimée.

On calcule enfin l'angle horaire local de l'étoile (ou du Soleil) auquel on ajoute (ou retire suivant la configuration des deux astres) la différence ci-dessus : on obtient ainsi l'angle horaire local de la Lune. On effectue enfin le calcul final de longitude. Si cette longitude G est très voisine de la longitude estimée G_e, on adoptera cette valeur. Dans le cas contraire, il faut reprendre l'ensemble du calcul avec la valeur de longitude trouvée et procéder à une seconde itération, d'où, comme dans le 2e cas de figure, on extraira une longitude G' à partir de laquelle on recherchera, le cas échéant et par un processus identique, la longitude G''.

Pour vérifier la faisabilité théorique de la méthode, dans ses trois cas de figure, un exemple monté de toutes pièces a été conçu et intégralement traité en annexe 5-1 ci-après. Pour simplifier les calculs et obtenir des résultats numériques significatifs, on a fait l'hypothèse de l'observateur immobile, des moyens mouvements horaires constants, en déclinaison comme en angle horaire, sur la durée de l'opération et on s'est astreint à travailler à la seconde d'arc près pour limiter l'effet des arrondis. On arrive, dans ces conditions, pour les trois cas de figure, sensiblement au même résultat.

Le réquisitoire de l'abbé de La Caille :

En 1754, de retour de son voyage au cap de Bonne-Espérance, l'abbé Nicolas-Louis de La Caille, qui avait un projet d'almanach nautique et de promotion de la méthode des distances lunaires à destination des marins, prend connaissance des travaux de Pingré. La Caille apprend alors que, d'une part ces travaux ont été engagés sous la direction de Lemonnier, son rival à l'Académie royale des sciences et que, d'autre part, son propre projet a été ignoré par cette Académie[25]. La Caille va donc se livrer à une étude critique approfondie de la méthode de détermination de la longitude par l'angle horaire. Cette étude figure dans le « Mémoire sur l'observation des

[25] Voir la thèse de G. Boistel pages 405-406.

longitudes en mer par le moyen de la Lune » publié en 1759 par l'Académie royale des sciences. Elle s'ouvre comme suit :

> *« (...) mais la méthode principale pour laquelle il* [Pingré] *a dressé les Tables de calculs* [l'État du Ciel] *dans les trois dernières années, n'étoit que spécieuse dans la théorie ; il eut été très dangereux qu'un navigateur y eût mis quelque confiance : comme quelques personnes mieux intentionnées qu'éclairées pourroient souhaiter qu'on reprît ce travail, je me crois obligé d'entrer ici dans quelque détail, pour prouver ce que je viens d'avancer. »*

L'abbé de La Caille va donc se livrer à une analyse détaillée de l'ensemble des causes d'erreur inhérentes à la méthode, notamment la non simultanéité des observations : évaluation de la latitude du navire lors du passage au méridien du Soleil, évaluation du temps vrai local, évaluation de la déclinaison de la Lune lors de son passage au méridien, puis observation de la hauteur de la Lune lorsqu'elle est éloignée du méridien pour le calcul final d'angle horaire. Le déplacement du navire entre chacune de ces opérations nécessite en effet d'effectuer de multiples opérations de réduction sur la base d'éléments d'estime souvent imprécis : distances parcourues et directions réellement suivies. La Caille évoque également les circonstances d'observation de la hauteur de la Lune, notamment de nuit, où la mesure peut être complètement fantaisiste.

De plus, l'effet des différentes erreurs entachant les trois paramètres de calcul de l'angle horaire local – latitude, déclinaison et hauteur – dépend de leur valeur intrinsèque et de celle de l'angle au pôle caractérisant l'angle horaire local. La Caille va donc se livrer à un calcul d'incertitude prenant en compte la latitude de l'observateur, la déclinaison de la Lune et son angle horaire ; il distinguera ainsi 3 valeurs de latitude (0°, 30°, 60°), 3 valeurs de déclinaison (24° de même nom que la latitude, 0°, 24° de nom contraire à la latitude), 3 à 4 valeurs d'angle au pôle (30°, 50°, 70°, 90°). Il fixe enfin des valeurs d'incertitude qui sont de 4' pour la latitude et la hauteur, de 2' pour la déclinaison et de 2' pour l'angle horaire au méridien origine de la Lune ; il suppose ensuite que l'incertitude sur la longitude résultant de l'incertitude dans la détermination du temps vrai local est de 8' ; enfin, il utilise un moyen mouvement horaire en ascension droite – par rapport au Soleil – de 28' 00'' lorsque la Lune est dans le plan de l'équateur (D = 0°) et de 33' 21'' lorsque la Lune est au voisinage de ses points solsticiaux (D = ± 24°). A partir de ces différentes hypothèses, il dresse le tableau[26] donnant le détail des différentes incertitudes et l'incertitude résultante sur la longitude (voir l'annexe 7-2 indiquant la méthode de calcul des éléments du tableau). Les résultats sont édifiants, faisant état d'une incertitude minimale de 3° 20' sur la longitude (observateur à l'équateur, déclinaison nulle de la Lune, angle au pôle d'au moins 50°) et d'une incertitude maximale sur la longitude d'environ 19° (latitude de 60°, déclinaison nulle de la Lune, angle au pôle de 30°). La moyenne de tous les cas de figure envisagés donne une incertitude d'environ 300 milles marins.

Commentaires :

L'analyse de l'abbé de La Caille, à la fois rigoureuse et réaliste, signifiera l'abandon de la méthode de l'angle horaire. A.-G. Pingré admettra les critiques et se ralliera à la théorie des distances lunaires qui permettent, suite à une même séquence d'observations, d'obtenir le temps vrai local et les éléments de calcul de la longitude avec une bien meilleure précision. Il participera par la suite au voyage de *La Flore* (1771-1772), en compagnie de Borda et de Verdun de la Crenne.

Malgré son imprécision, on constatera l'existence d'un procédé similaire mis en évidence environ deux siècles plus tard. On remarque en effet, peu après le milieu du XXe siècle, l'apparition d'une méthode voisine fondée sur des mesures de hauteur de la Lune et du Soleil ou d'étoiles et sur le calcul des angles horaires locaux correspondants. Le procédé vise essentiellement les navigateurs qui pourraient être confrontés à une perte totale de l'heure, avarie relativement courante à bord d'un petit bateau avant la généralisation des montres à quartz. On y reviendra à la fin de cette étude (chapitre 11).

[26] Une faute d'impression figure dans les intitulés de colonne du tableau original publié par l'Académie : il faut permuter « hauteur du Pôle » et « hauteur de la Lune » pour retrouver les valeurs correctes d'incertitude.

ANNEXES AU CHAPITRE 5

ANNEXE 5-1

EXEMPLE D'APPLICATION DE LA MÉTHODE DE L'ANGLE HORAIRE

L'observateur est supposé immobile. Les éléments astronomiques utiles extraits de l'almanach, pour le jour considéré, sont les suivants :

Tvp	ARv	D Soleil	ARa Lune	D Lune	AHsp
10 h	41° 11' 24''	N 15° 56' 00''	145° 38' 42''	N 13° 05' 24''	191° 11' 24''
11 h	41° 13' 52''	N 15° 56' 42''	146° 11' 34''	N 12° 57' 06''	206° 13' 52''
12 h	41° 16' 20''	N 15° 57' 24''	146° 44' 26''	N 12° 48' 48''	221° 16' 20''
13 h	41° 18' 48''	N 15° 58' 06''	147° 17' 18''	N 12° 40' 30''	236° 18' 48''
14 h	41° 21' 16''	N 15° 58' 48''	147° 50' 10''	N 12° 32' 12''	251° 21' 16''
15 h	41° 23' 44''	N 15° 59' 30''	148° 23' 02''	N 12° 23' 54''	266° 23' 44''
16 h	41° 26' 12''	N 16° 00' 12''	148° 55' 54''	N 12° 15' 36''	281° 26' 12''
17 h	41° 28' 40''	N 16° 00' 54''	149° 28' 46''	N 12° 07' 18''	296° 28' 40''
	0° 59' 12''/24 h	+ 42''/h	13° 08' 48''/24 h	- 8' 18''/h	15° 02' 28''/h

La latitude a été fixée précisément à $\varphi = 40°$ N ; une estimation de la longitude est $G_e = 57°\ 20'$ W.

Alors que la montre indique Tvg_e = 6 h 20 m 00 s en temps vrai local, on mesure une première hauteur du Soleil en vue de caler précisément cette montre ; cette mesure conduit à une hauteur vraie $H_v = 7°\ 27'\ 36''$.

On évalue l'angle horaire local du Soleil (ou temps vrai local) à l'aide de la formule :

$$\cos \mathrm{AHvg} = \frac{\sin \mathrm{H_v} - \sin \varphi . \sin \mathrm{D}}{\cos \varphi . \cos \mathrm{D}} \quad (1)$$

On détermine donc en premier lieu une valeur de déclinaison en utilisant la longitude estimée :

Tvg_e =	6 h 20 m 00 s	φ =	N 40° 00' 00''
$+G_e$ =	3 h 49 m 20 s	Soleil H_v =	7° 27' 36''
Tvp_e =	10 h 09 m 20 s	→ Soleil D =	N 15° 56' 07''

L'exécution de la formule (1) donne une heure Tvg = 6 h 14 m 31 s ; ce résultat met en évidence une avance de la montre de 5 m 29 s, valeur que l'on considèrera comme constante sur l'ensemble des opérations.

45 minutes plus tard, on observe le passage au méridien de la Lune et on mesure sa hauteur. On en déduit la hauteur vraie de son centre $H_v = 62°\ 58'\ 00''$. Sa déclinaison s'obtient par :

$$\mathrm{D} = \varphi - (90° - \mathrm{H_v}) = 12°\ 58'00''\mathrm{N}$$

Enfin, à l'instant noté Tvg_1 = 12 h 14 m 43 s, on mesure une hauteur de la Lune en vue d'un calcul d'angle horaire ; la hauteur vraie correspondante du centre de la Lune est $H_v = 18°\ 25'\ 12''$. Il s'est écoulé 5h 15 m depuis le passage de la Lune au méridien ; sa déclinaison a donc diminué de 43' 35'' ; celle-ci est donc maintenant de D = 12° 14' 25'' N. Le calcul d'angle horaire par la formule (1) donne $AHag_1 = 76°\ 06'\ 40''$.

Pour l'instant $Tvp_2 = Tvg_1$ = 12 h 14 m 43 s, l'almanach donne, par interpolation dans le tableau, un angle horaire de la Lune au méridien origine $AHap_2$ = 78° 05' 12''. Les moyens mouvements journaliers étant m_S = 0° 59' 12''/24 h et m_L = 13° 08' 48''/24 h, le calcul de longitude s'écrit et donne :

$$G = \frac{78°05'12'' - 76°06'40''}{13{,}146667° - 0{,}986667}.24.15 = 58°29'13''W$$

Ce que l'on écrira, à la minute près : **G = 58° 29' W**.

Admettons maintenant qu'il ait été impossible de déterminer la déclinaison de la Lune par l'observation, les autres éléments de calculs restant inchangés. La longitude estimée G_e permet de calculer le temps vrai au méridien origine d'où l'on déduira une première valeur D_1 de la déclinaison de la Lune :

Tvg_1 =	12 h 14 m 43 s	φ =	N 40° 00' 00''
$+G_e$ =	3 h 49 m 20 s	Lune H_v =	18° 25' 12''
Tvp_e =	16 h 04 m 03 s	→ Lune D_{1L} =	N 12° 15' 02''

La formule (1) permet ensuite le calcul d'une première approximation de l'angle horaire local de la Lune, soit $AHag_1$ = 76° 07' 10''.

Pour l'instant $Tvp_2 = Tvg_1$, l'angle horaire de la Lune reste celui calculé précédemment, de même que les moyens mouvements : le calcul de longitude conduit à G = 58° 14' 24'' W, valeur qui va servir à une seconde itération.

Tvg_1 =	12 h 14 m 43 s	φ =	N 40° 00' 00''
+G =	3 h 52 m 58 s	Lune H_v =	18° 25' 12''
Tvp =	16 h 07 m 41 s	→ Lune D_{2L} =	N 12° 14' 32''

L'angle horaire local est alors $AHag_1$ = 76° 06' 46'' ce qui conduira, tous les autres éléments étant inchangés, à une longitude G' = 58° 26' 15'' W.

On évalue les écarts $\varepsilon_1 = G - G_e$ = 0° 54' 24'' et ε_2 = G' – G = 0° 11' 51'' qui conduisent, par la proportion indiquée dans le texte, à la longitude cherchée **G = 58° 30' W**.

Admettons pour terminer qu'il n'ait pas été possible de mesurer précisément la hauteur de la Lune à l'instant Tvg_1 mais que l'on ait pu, pour cet instant, mesurer la distance entre un bord de la Lune et l'étoile l'Épi dont les coordonnées équatoriales sont AVa = 158° 28' 12'' et D_E = 11° 15' 06'' S. On a pu d'autre part mesurer des valeurs approchées des hauteurs qui permettent d'obtenir la distance vraie du centre de la Lune à l'étoile qui est, tous calculs faits, LE = 57° 11' 20''.

La première étape consiste à calculer la différence des angles horaires de la Lune et de l'étoile. Une première approximation est faite pour l'heure Tvp_e = 16 h 04 m 03 s calculée précédemment pour laquelle la déclinaison de la Lune est D_{1L} = 12° 15' 02'' N. Cette différence d'angles horaires ΔAH est obtenue par :

$$\cos \Delta AH = \frac{\cos LE - \sin D_{1L}.\sin D_E}{\cos D_{1L}.\cos D_E} \quad (2)$$

Le calcul donne : ΔAH = 52° 30' 52''.

Pour obtenir l'angle horaire local de la Lune, il convient, dans ce cas de figure, d'ajouter à la différence ΔAH, l'angle horaire local de l'étoile à l'instant considéré.

On commence donc par calculer l'heure du passage de l'Épi au méridien estimé ; cette heure est obtenue dans l'almanach pour un angle horaire sidéral AHsp = 360° + G_e – AVa = 258° 51' 48''. L'interpolation donne un temps vrai au méridien origine Tvp = 14 h 29 m 57 s. On calcule ensuite le temps vrai local correspondant, la

différence de temps avec l'heure de l'observation puis la variation d'angle horaire correspondante de l'étoile qui est l'angle horaire local cherché puisque celui-ci est nul (à 360° près) au passage au méridien.

Tvp = - G_e =	14 h 29 m 57 s 3 h 49 m 20 s	Tvg_1 = Tvg =	12 h 14 m 43 s 10 h 40 m 37 s
Tvg =	10 h 40 m 37 s	Δt = AHag = Δt.15° 02' 28'' =	1 h 34 m 06 s 23° 35' 22''

L'angle horaire local cherché est donc : $AHag_1$ = AHag + ΔAH = 76° 06' 14''.

Pour l'instant Tvp_2 = Tvg_1, l'angle horaire de la Lune reste celui calculé précédemment, de même que les moyens mouvements : le calcul de longitude conduit à G = 58° 42' 02'' W, valeur qui va servir à une seconde itération.

On évalue donc la nouvelle valeur de la déclinaison de la Lune D_{2L} pour l'heure vraie au méridien origine :

Tvg_1 = +G =	12 h 14 m 43 s 3 h 54 m 48 s	D_E = LE =	S 11° 15' 06'' 57° 11' 20''
Tvp =	16 h 09 m 31 s	→ Lune D_{2L} =	N 12° 14' 17''

Puis on calcule, avec ces éléments, la nouvelle variation d'angle horaire ΔAH : 52° 31' 11''. Il convient ensuite de réévaluer l'angle horaire local de l'Épi dont l'heure vraie au méridien origine de passage au méridien de longitude G = 58° 42' 02'' W est 14 h 35 m 24 s :

Tvp = - G =	14 h 35 m 24 s 3 h 54 m 48 s	Tvg_1 = Tvg =	12 h 14 m 43 s 10 h 40 m 36 s
Tvg =	10 h 40 m 36 s	Δt = AHag = Δt.15° 02' 28'' =	1 h 34 m 07 s 23° 35' 37''

L'angle horaire local cherché est donc : $AHag_1$ = AHag + ΔAH = 76° 06' 48''.

Pour l'instant Tvp_2 = Tvg_1, l'angle horaire de la Lune reste celui calculé précédemment, de même que les moyens mouvements : le calcul de longitude conduit à G' = 58° 25' 16'' W.

On évalue enfin les écarts $\varepsilon_1 = G - G_e$ = 1° 22' 02'' et ε_2 = G' – G = – 0° 16' 46'' qui conduisent, par la proportion indiquée dans le texte, à la longitude cherchée **G = 58° 28' W**.

ANNEXE 5-2

CALCUL DES INCERTITUDES

Dans l'utilisation de la méthode de l'angle horaire, la longitude G est obtenue par la formule suivante :

$$G = 15.\frac{AHap_2 - AHag_1}{m_L - m_S}$$

Si on appelle $\Delta AHag_1$ et $\Delta AHap_2$ les incertitudes respectives sur l'angle horaire local de la Lune calculé avec les données d'observation $AHag_1$ et sur l'angle horaire de la Lune au méridien origine $AHap_2$, l'incertitude sur la longitude ΔG s'écrit :

$$\Delta G = 15.\frac{\Delta AHap_2 + \Delta AHag_1}{m_L - m_S}$$

L'angle au pôle P d'où l'on déduit l'angle horaire local $AHag_1$ est une fonction des trois données de calcul, latitude φ, déclinaison D et hauteur H de la forme :

$$\cos AHag_1 = \cos P = \frac{\sin H - \sin\varphi . \sin D}{\cos\varphi . \cos D}$$

Si on considère les petites variations Δφ, ΔD et ΔH, la variation correspondante ΔP sur l'angle au pôle est de la forme :

$$\Delta AHag_1 = \Delta P = \alpha.\Delta\varphi + \beta.\Delta H + \gamma.\Delta D \text{ avec } \alpha = \cot Z . \sec\varphi ; \beta = \csc Z . \sec\varphi ; \gamma = \cot L . \sec D$$

Expressions dans lesquelles Z est l'azimut de la Lune et L l'angle à la Lune du triangle sphérique de position PZL.

On assimile maintenant ces petites variations aux incertitudes. Les valeurs fixées par La Caille sont ici : ΔH = Δφ = 4' et ΔD = 2'.

L'incertitude sur $AHap_2$ est liée à la précision des tables de la Lune. La Caille l'évalue à 2'.

En reprenant les calculs de La Caille pour φ = 30°, D = 24° et P = 50°, on obtient tout d'abord H = 45,391° , Z 85,210° et L = 70,852° ; il vient ensuite :

Δφ = 4' ΔH = 4' ΔD = 2'	α = 0,0968 β = 1,1587 γ = 0,3801	α.Δφ = β.ΔH = γ.ΔD =	0' 23'' 4' 38'' 0' 45''
		$\Delta AHag_1$ =	5' 46''
		$\Delta AHap_2$ =	2' 00''
		Total =	7' 46''

Dans ce cas de figure, le Lune étant à proximité d'un point solsticial, on prend, en suivant La Caille un moyen mouvement en angle horaire $m_S - m_L$ de 33' 21'' et on obtient une incertitude en longitude de 3° 29' 36'', valeur que l'on abondera de 8' pour tenir compte d'une incertitude sur le temps local vrai utilisé. On retiendra donc, en définitive, une incertitude globale sur la longitude de 3° 38'.

Avec les données de l'exemple traité en annexe 5-1, on pourrait fixer Δφ = 1' (observateur immobile), ΔD = 0,1' (observateur immobile et connaissance précise de la variation horaire de déclinaison), ΔH = 5' (observation de nuit). $AHap_2$ est d'autre part connu avec précision. On obtient ainsi :

$\Delta\varphi$ = 1’ ΔH = 5’ ΔD = 0,1’	α = 0,0166 β = 1,3055 γ = 0,8107	$\alpha.\Delta\varphi$ = $\beta.\Delta H$ = $\gamma.\Delta D$ =	0’ 01’’ 6’ 32’’ 0’ 05’’
		$\Delta AHag_1$ =	6’ 38’’
		$\Delta AHap_2$ =	0’ 00’’
		Total =	6’ 38’’

Dans ce cas de figure, on avait obtenu $m_L - m_S$ = 30’ 24’’. Si on suppose le temps vrai local connu avec précision, on obtient directement une incertitude sur la longitude ΔG = 3° 16’.

CHAPITRE 6

LES PROPOSITIONS DE L'ABBÉ DE LA CAILLE

Almanach Nautique et châssis de réduction :

Une préoccupation majeure de Nicolas-Louis abbé de La Caille était de rendre la méthode de détermination des longitudes par les distances lunaires *« praticable au commun des navigateurs »*. Dans ce domaine, il fait part des résultats de ses recherches à son retour de l'expédition au Cap (voir d'Après de Mannevillette) avec la communication d'un premier mémoire[27] en 1754 puis d'un second[28] publié en 1759 suivi, en 1760, de sa révision du « Nouveau Traité de Navigation » de Pierre Bouguer décédé en 1758.

Dans ces différents documents, La Caille propose une procédure d'observations des distances lunaires et donne des recommandations relatives à la pratique des observations. La détermination finale de la longitude du lieu d'observation est fondée sur l'existence d'un « Almanach Nautique » donnant toutes les 4 heures de temps au méridien de référence (Paris) les distances entre le centre de la Lune et quelques étoiles zodiacales ; l'Almanach indique également pour chaque jour la parallaxe horizontale de la Lune et les heures vraies des passages des étoiles sélectionnées au méridien de référence. Sans rejeter complètement le calcul logarithmique, La Caille préconise l'utilisation d'un « châssis de réduction » pour effectuer graphiquement les opérations intermédiaires. Le projet d' « Almanach Nautique », qui permettra à la méthode des distances lunaires d'être réellement accessible aux marins, ne deviendra en fait réalité qu'un peu plus tard.

Après vérification du quartier de réflexion, de l'octant ou du sextant, « construit selon les principes de M. Hadley et garni d'une lunette », La Caille propose la séquence d'observations suivante :

1. Mesure de la hauteur de l'étoile zodiacale choisie par rapport à l'horizon *« le plus exactement qu'il pourra »*, relevé de l'heure correspondante à la montre et prise de son relèvement au compas à un demi-rhumb près (soit environ 5° près).
2. Mesure de la distance entre cette étoile et le bord éclairé de la Lune et relevé de l'heure correspondante à la montre.
3. Mesure de la hauteur d'un bord de la Lune (8 à 10' près), relevé de l'heure correspondante à la montre et prise de son relèvement au compas à un demi-rhumb près.

L'ensemble de ces opérations ne doit pas prendre plus de 10 minutes et doit nécessairement se situer à l'aube ou au crépuscule afin d'être en mesure de voir simultanément l'étoile et la ligne d'horizon dans la lunette du quartier de réflexion.

On procède ensuite à la rectification de l'heure donnée par la montre. Comme on l'a écrit précédemment, cette opération nécessite d'évaluer l'angle horaire local de l'étoile et suppose que la latitude φ soit connue avec une précision suffisante. On évalue ordinairement cet angle à l'aide d'une formule de trigonométrie sphérique calculée par logarithmes mais La Caille propose une méthode graphique à l'aide du châssis de réduction reproduit en figure 6-1. Celui-ci comporte essentiellement un cercle gradué d'une cinquantaine de centimètres de diamètre sur lequel les constructions nécessaires seront effectuées. Sur la gauche de ce cercle, trois abaques permettent d'évaluer les corrections de réfraction astronomique (en haut), les réductions de hauteur à une heure commune (au milieu) et les corrections de parallaxe (en bas). Les graduations figurant sur les côtés du cadre permettent l'interpolation finale de la distance vraie.

[27] « Projet pour rendre la méthode des longitudes praticable au commun des navigateurs », mémoire manuscrit écrit par La Caille à Maraldi ; lu à l'Académie royale des sciences le 20 février 1754 (voir thèse de G. Boistel, page 899).
[28] « Mémoire sur l'observation des longitudes en mer » (Académie royale des sciences, 1759).

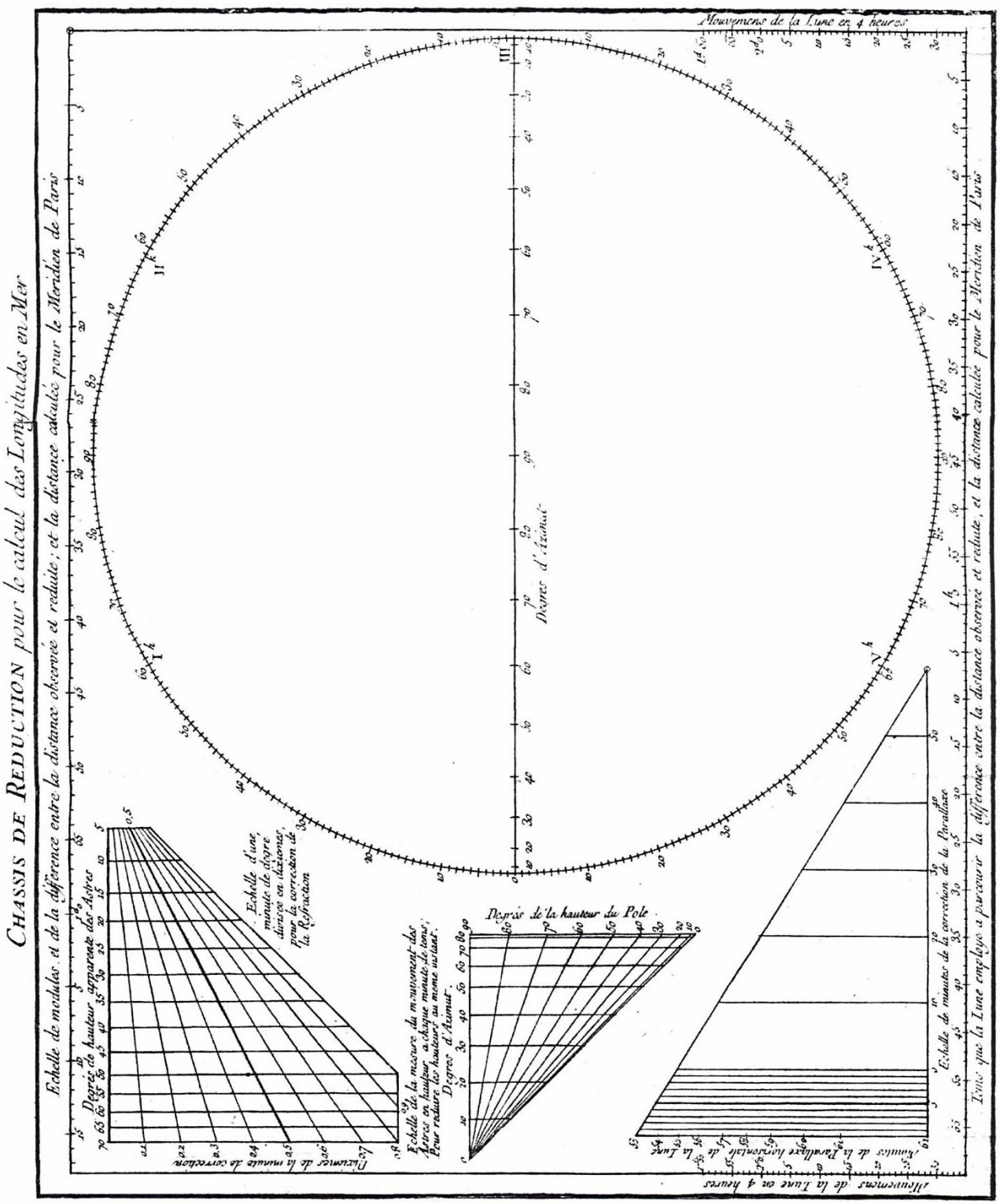


Fig : 6-1

La détermination de l'angle au pôle – qui donnera accès à l'angle horaire local – d'un astre, à l'aide du châssis, connaissant la latitude, sa hauteur et sa déclinaison s'effectue de la manière suivante. Considérons tout d'abord la sphère locale de l'observateur et le triangle de position de l'astre, PZE (figure 6-2), à l'instant de l'observation.

On a représenté sur cette figure les petits cercles CED, parallèle diurne de l'astre, et AEB, almicantarat (cercle d'égale hauteur). Les plans de ces deux cercles se coupent suivant EF, perpendiculaire au plan du méridien (plan de figure) puisque les plans auxquels appartiennent les deux petits cercles AEB et CED sont aussi perpendiculaires au plan du méridien. L'angle au pôle cherché est l'angle dièdre entre les plans des méridiens de l'astre et du lieu : il est donné par la mesure de l'angle EGF que l'on peut évaluer en rabattant le petit cercle CED dans le plan de figure. Dans le rabattement, E vient en K et il suffit de lire avec un rapporteur la valeur de l'angle FGK égale à celle l'angle au pôle cherché.

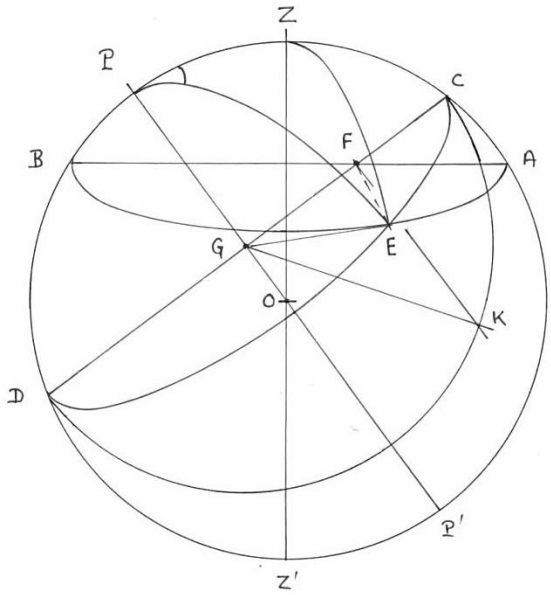


Fig : 6-2

En pratique, tout se passe dans le plan du méridien (figure 6-3). Après avoir construit la ligne des pôles connaissant la latitude (hauteur du pôle au-dessus de l'horizon), il suffit de porter à l'aide d'un rapporteur les traces du parallèle diurne CD et de l'almicantarat AB connaissant la déclinaison et la hauteur. Le point F est situé à l'intersection des segments AB et CD et le point G à l'intersection de la ligne des pôles et de CD. On trace ensuite le rabattement du parallèle diurne, qui est le demi-cercle de centre G et de diamètre CD. K se trouve à l'intersection de ce demi-cercle et de la perpendiculaire à CD issue de F.

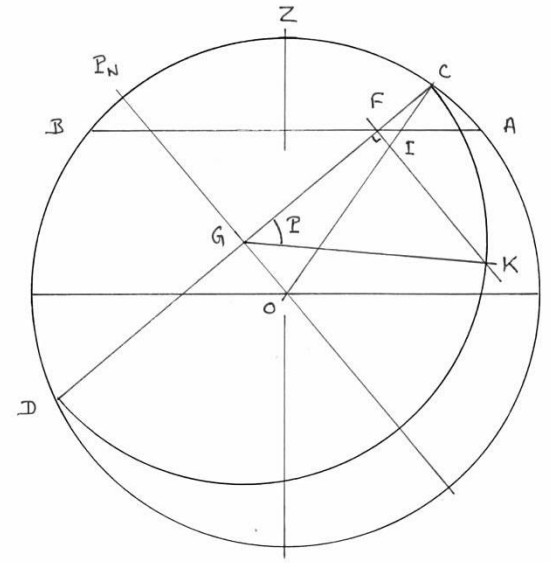


Fig : 6-3

La mesure de l'angle FGK donne l'angle au pôle cherché P ; il restera à passer à l'angle horaire selon que l'astre est dans l'Est ou dans l'Ouest de l'observateur.

La construction de La Caille vise à lire directement l'angle sur le cercle du châssis gradué en degrés. Il convient donc de substituer au segment GF, représentatif du cosinus de P dans le cercle de rayon GC ou GD, un segment OI, représentatif de ce même cosinus, mais dans le grand cercle gradué. Dans ce but, on trace le rayon OC qui coupe FK en I. Les triangles CFI et CGO étant semblables, on a :

$$\frac{GF}{GC} = \frac{OI}{OC} = \cos P$$

La méthode se décline ensuite comme suit. On commence, sur le cercle gradué (figure 6-4), par définir le zénith Z et la trace de l'horizon représentée par le diamètre horizontal du cercle. On porte ensuite les points A et B connaissant la hauteur ; on définit ainsi la trace AB de l'almicantarat ; on porte ensuite la direction du pôle P_N qui forme l'angle φ avec l'horizon. Du point P_N, on reporte de part et d'autre les points C et D qui lui sont distants du complément de la déclinaison (distance polaire) ; on définit ainsi la trace CD du cercle diurne de l'astre. On remarque que, grâce au cercle gradué, tous les points ont été placés sans avoir eu recours à un rapporteur.

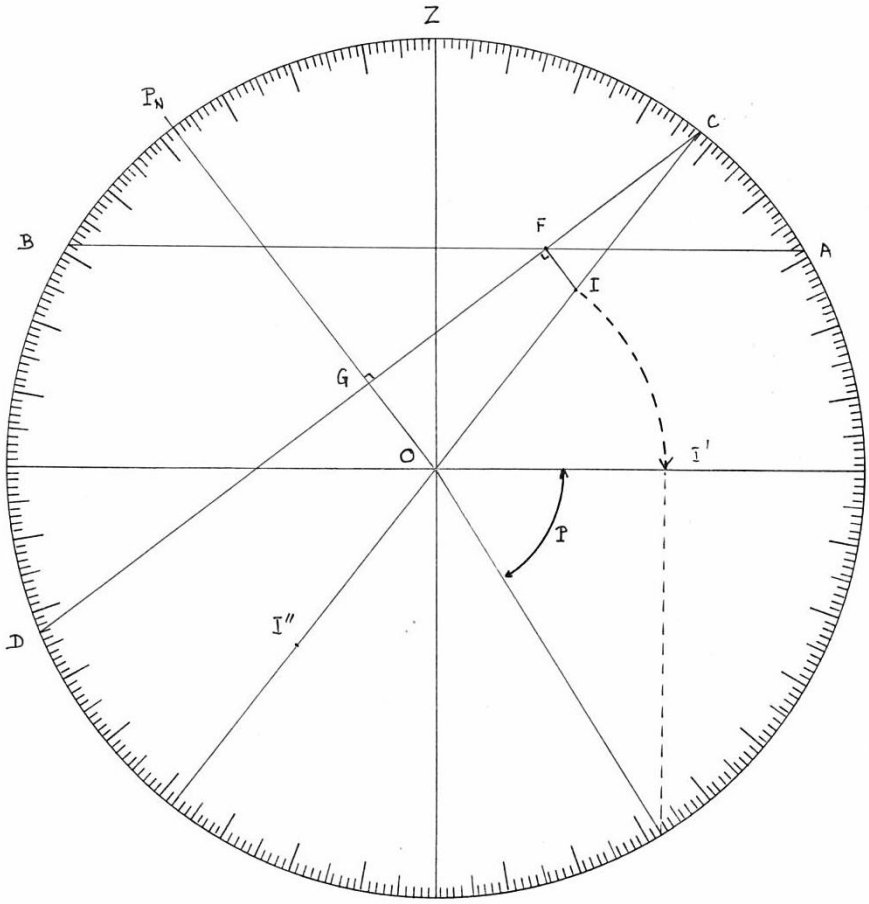


Fig : 6-4

On marque les points G, centre du cercle diurne et F, intersection des traces de l'almicantarat et du cercle diurne. Les triangles CGO et CFI étant semblables, FI est nécessairement parallèle à GO, I étant sur le diamètre du cercle gradué passant par C. Pour lire commodément l'angle P, il convient ensuite de rabattre I en I' sur le diamètre horizontal. OI' étant la longueur correspondant à cosP sur le cercle gradué, on lit directement la valeur cherchée. Pour construire la figure 6-4, on a fixé une latitude de 52° N, une déclinaison de 15° N et une hauteur de 31°. L'angle au pôle lu est de 58° ; le calcul donne P = 58° 27'. La Caille propose une détermination plus précise en construisant le point I'', symétrique de I par rapport à O et en considérant sur le cercle gradué deux cordes successives de longueur égale à II''. On vérifie que la différence angulaire entre les deux extrémités des cordes est égale à 4 fois le complément de l'angle cherché. Dans le cas de figure, on trouve 128°, d'où un angle P = 58°.

Cette opération étant effectuée, on corrige l'heure pour laquelle on a mesuré la distance entre l'étoile et le bord éclairé de la Lune de l'avance ou du retard de la montre et on réduit pour cet instant les hauteurs mesurées de la Lune et de l'étoile. Les réductions des hauteurs font intervenir les gisements de l'astre considéré et les distances respectivement parcourues entre les heures d'observations des hauteurs et l'heure considérée.

On procède ensuite à la réduction de la distance lunaire c'est-à-dire à la correction des effets de la réfraction astronomique et de la parallaxe en hauteur des astres observés, cette dernière correction n'étant à considérer que pour la Lune – où elle est importante – et, dans une moindre mesure, pour le Soleil, Vénus et Mars. Il s'agit donc de passer de la distance mesurée entre positions apparentes réfractées des deux astres $L_{ar}A_{ar}$ à la distance vraie LA (figure 6-5).

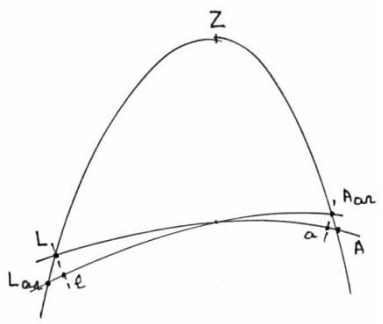


Fig : 6-5

Pour la Lune, la quantité $L_{ar}L$ représente la parallaxe en hauteur diminuée de la réfraction astronomique et, pour l'étoile, la quantité $A_{ar}A$ représente la simple réfraction astronomique. Les valeurs de réfraction sont extraites du châssis en fonction des hauteurs apparentes réfractées respectives. Dans le cas de figure, la correction de la distance consiste à retirer à la distance apparente l'arc $L_{ar}l$ et lui ajouter l'arc Aa. Les valeurs correspondantes sont calculées dans les petits triangles supposés plans $L_{ar}Ll$ et $A_{ar}Aa$ pour lesquels il convient de connaître les angles en L_{ar} et A (ou, à peu de choses près A_{ar}). Ces angles sont calculés dans le triangle sphérique $L_{ar}ZA_{ar}$ dans lequel les trois côtés sont connus[29]. Comme dans l'opération précédente du calcul d'heure, cette opération peut s'effectuer par un calcul logarithmique ou en utilisant le cercle gradué du châssis. Une fois l'opération effectuée, on corrigera la distance réduite du demi-diamètre de la Lune.

Étant maintenant en possession d'une distance vraie entre les centres des deux astres à l'heure locale, il reste à interpoler entre les distances calculées et données par l'Almanach toutes les quatre heures sur le méridien de référence pour connaître directement l'heure correspondante au méridien de référence. La longitude cherchée G est la différence entre les deux heures, locale et au méridien de référence. L'interpolation peut s'effectuer par le calcul ou graphiquement à partir des échelles figurant sur les bords du châssis.

Commentaire :

Si une forme de simplification apparait par la mise en évidence d'une méthode différentielle – ou indirecte – de réduction de la distance observée par ajout et retrait des termes correctifs du premier ordre, la méthode graphique mise au point par l'abbé de La Caille n'eut probablement pas le succès que l'on pouvait en attendre. Plusieurs raisons peuvent être évoquées : tout d'abord la difficulté pratique de manipulation d'un graphique dans un milieu mouvant et humide, ensuite l'absence de traçabilité puisque le châssis est effacé pour traiter l'observation suivante et enfin le constat que la construction graphique demande un très grand soin pour une précision très moyenne alors que le calcul logarithmique, certes long mais mécanique, apporte la pleine précision. Un peu plus

[29] Dans un mémoire présenté à l'Académie royale des sciences en 1741 « Calcul des différences dans la trigonométrie sphérique », La Caille a indiqué les expressions des termes correctifs qui sont ceux du premier degré dans un développement limité (voir chapitre 7).

tard, on remarquera les réticences des scientifiques qui invitent les navigateurs à maîtriser le calcul numérique et voient dans l'emploi des méthodes graphiques un simple moyen de vérification des calculs[30].

ANNEXE AU CHAPITRE 6

EXEMPLE DE CALCUL

Méthode graphique de La Caille :

Les données de calcul sont celles de l'exemple figurant en annexe 4. La distance apparente réfractée entre le centre de la Lune et l'étoile Aldebaran est $L_{ar}A_{ar}$ = 25° 11,2' et les hauteurs simplement corrigées de la dépression de l'horizon (donc hauteurs apparentes réfractées) et, pour la Lune, corrigée du demi-diamètre, sont H_{arL} = 26° 55,5' et H_{arA} = 47° 56,3'. Les mesures ont été réduites à l'heure civile locale Tcg = 18 h 50 m 35 s.

La détermination des éléments de correction de la distance apparente nécessite de connaître les angles en L_{ar} et en A_{ar} du triangle sphérique $ZL_{ar}A_{ar}$ dont les trois côtés ont les valeurs ci-dessus. Cette détermination, utilisant la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique, s'effectue graphiquement en utilisant le cadre de réduction, sur le même principe que l'évaluation d'un angle horaire. La marche à suivre est la suivante (voir figure A6-1) :

- on reporte les almicantarats de la Lune (AB) et de l'astre (A'B'),
- on trace la direction d'un pôle P dont la colatitude est $L_{ar}A_{ar}$,
- de ce pôle, on porte les traces des petits cercles de distance polaire 90° - H_{arL} (CD) et 90° - H_{arA} (C'D'),
- on détermine ensuite les points I et I' et on rabat les segments OI et OI' sur le diamètre YY',
- on projette les points obtenus sur le cercle extérieur où on lit les angles cherchés.

On trouve ici un angle en L_{ar} de 28,5° et en A_{ar} de 140°. La précision de lecture est de l'ordre du demi-degré ; un calcul de vérification donne 28,754° et 140,192°.

On calcule ensuite les deux termes correctifs $L_{ar}l$ et Aa (voir figure 6-5) dans les petits triangles $L_{ar}Ll$ et $A_{ar}Aa$ considérés comme plan connaissant les hypoténuses LL_{ar} (parallaxe horizontale moins réfraction soit 46,6') et AA_{ar} (réfraction soit 0,9'). La correction a pour expression :

$$C^{ion} = 46{,}6.\cos 28{,}5° + 0{,}9.\cos(180° - 140°) = 41{,}6'$$

Quantité qu'il faudra, dans ce cas de figure, retirer à la distance apparente pour obtenir la distance vraie ce qui donne LA = 24° 29,6'.

L'almanach donne, pour la date considérée :

Heure Tcp	18 h 00	21 h 00
Lune-Aldébaran	25° 55' 00''	24° 26' 06''

L'interpolation donne une heure Tcp d'observation de 20 h 52 m 55 s d'où une longitude G = 30° 35' W.

[30] Conclusion du rapport de Borda et Lévêque sur le mémoire et la carte trigonométrique présentés par le citoyen Maingon. Académie des Sciences, séance du 11 vendémiaire an VII (02/10/1798).

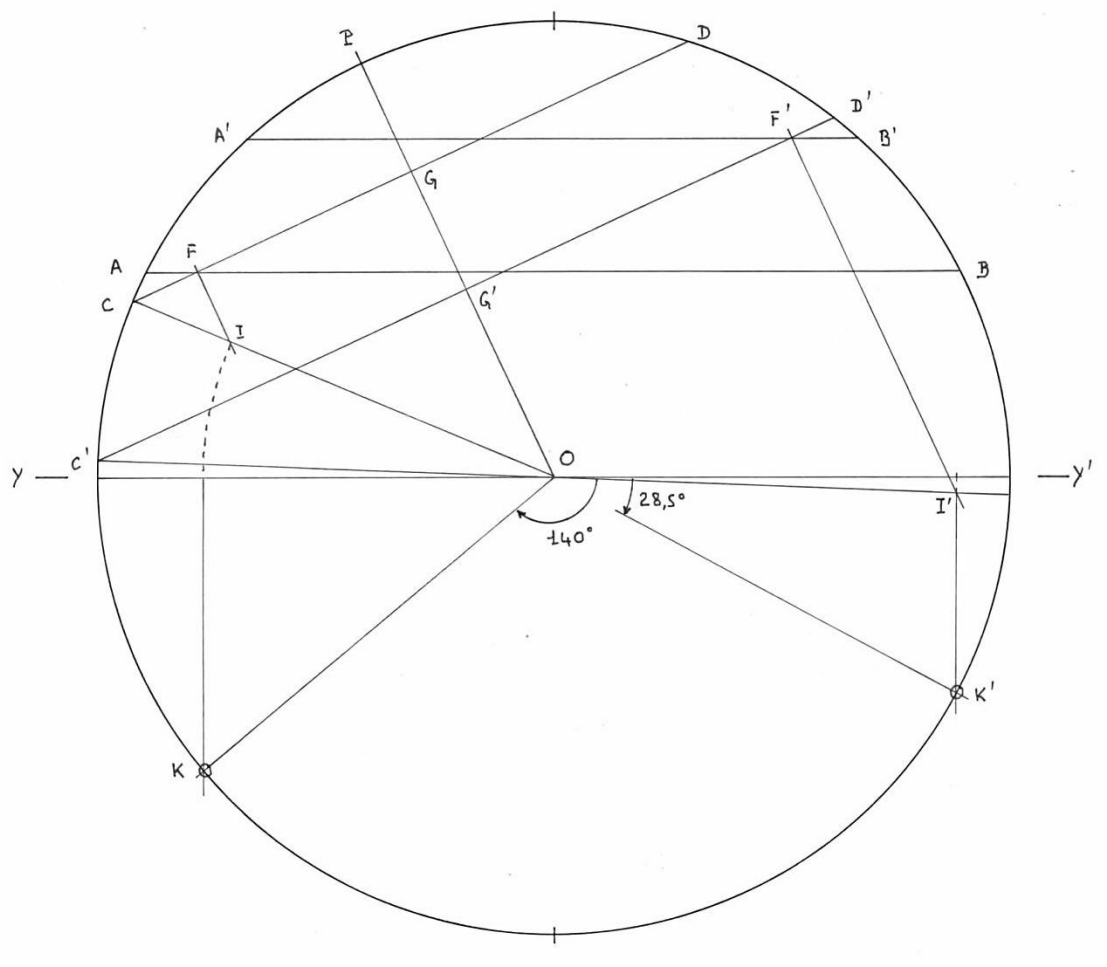


Fig : A6-1

CHAPITRE 7

TRAVAUX DE L'ASTRONOME ROYAL NEVIL MASKELYNE

ET DES CALCULATEURS DU NAUTICAL ALMANAC

L'astronome britannique Nevil Maskelyne (1732-1811) a été missionné en 1761 par la Royal Society pour aller à Sainte Hélène observer le passage de Vénus devant le Soleil. Au cours de ce voyage, il effectue de nombreuses observations de distances lunaires visant à déterminer la longitude tant à terre qu'à la mer. À son retour, il publie en 1763 le « British Mariner's Guide » qui constitue, entre autres, un mode d'emploi de la pratique des distances lunaires pour déterminer la longitude. Il travaille ensuite à la première publication du Nautical Almanac qui contiendra notamment des distances pré-calculées entre la Lune et le Soleil ainsi que quelques principales étoiles zodiacales toutes les 3 heures de temps vrai. L'ouvrage est publié en 1765[31] pour l'année 1767. Au fil du temps, l'almanach contiendra également une série de tables destinées à faciliter les calculs de réduction de la distance. Celles établies par N. Maskelyne, ou sous sa direction, ainsi que celles proposées par des calculateurs du Nautical Almanac, seront rassemblées sous le titre de « Tables Requisite to be used with the Nautical Ephemeris for finding Latitude and Longitude at Sea ». Nevil Maskelyne sera nommé Astronome royal en 1765, succédant à Nathaniel Bliss, et occupera ce poste jusqu'à sa mort en 1811.

Quelques éléments préliminaires :

Comme indiqué au début de cette étude, l'Astronome royal Nevil Maskelyne va essentiellement travailler à développer la méthode de réduction indirecte d'une distance lunaire. Rappelons que le procédé consiste à calculer la correction, que l'on notera δ, à apporter à la distance apparente réfractée $L_{ar}A_{ar}$ ou d pour obtenir la distance vraie cherchée LA ou D. On écrit ainsi, algébriquement :

$$D = d + \delta$$

Cette correction δ, relativement petite, résulte de la parallaxe en hauteur des deux astres et de la réfraction astronomique qui affecte les visées ; elle peut être calculée à partir d'un développement limité établi à partir d'une expression trigonométrique dans laquelle interviennent la distance apparente réfractée issue de la mesure et les hauteurs des deux astres. Ce développement limité, qui est établi en annexe 7-1, se présente sous la forme d'une somme algébrique comportant des termes du premier degré (ou du premier ordre) en x (parallaxe en hauteur de la Lune moins la réfraction qui l'affecte) et en y (réfraction qui affecte la direction de l'astre moins son éventuelle parallaxe en hauteur), puis de termes du second degré (ou du second ordre) en x.y, x^2 et y^2. On vérifie, toujours à l'annexe 7-1, que les termes prépondérants du développement sont ceux du premier ordre ainsi que celui du second ordre en x^2 ; le terme en xy est en général très faible quant à celui en y^2, il est pratiquement toujours négligeable.

Comme on va le voir ci-après, Nevil Maskelyne a établi deux formulations pour évaluer la correction δ, non pas à partir de l'analyse, mais en suivant un raisonnement géométrique ; les valeurs des termes exprimés sont évidemment identiques pour les mêmes quantités correctives considérées.

Le développement limité dont il est question n'est donc pas nécessaire pour suivre l'établissement des formulations de N. Maskelyne et de ses collaborateurs de l'époque mais il fournit une base de comparaison rigoureuse permettant de relever clairement les éléments pris en compte dans le calcul de la correction δ. Ce développement sera aussi utilisé pour étudier d'autres formulations élaborées ultérieurement.

[31] À titre de comparaison, la première livraison de la Connaissance des temps française est celle de l'an 1679.

British Mariner's Guide (1763) :

Pour effectuer les observations, N. Maskelyne indique qu'il faut disposer d'un quadrant de Hadley et d'une montre – « *a tolerably good watch* » –. On doit ensuite connaître la latitude φ et une estimation de la longitude G_e. La procédure d'observations qu'il préconise est la suivante :

- prendre une première hauteur du Soleil ou d'une étoile brillante pour déterminer le temps vrai local ;
- mesurer la distance entre le bord éclairé de la Lune et le Soleil ou une étoile ;
- mesurer les hauteurs de la Lune et du Soleil ou de l'étoile à l'instant de la mesure précédente ou à moins d'une minute ;
- si possible, prendre des séries de mesure que l'on réduira à une heure commune.

La première prise de hauteur n'est pas nécessaire si celle prise ensuite du Soleil ou de l'étoile est suffisamment précise, et convenable, pour effectuer un calcul d'heure. On remarque ici qu'il est prévu que la distance lunaire et les deux hauteurs doivent être prises quasi-simultanément ce qui nécessite trois observateurs.

Nevil Maskelyne détaille le classique calcul d'heure locale sur lequel on ne reviendra pas. Vient ensuite la recherche des éléments de calcul qui sont, au méridien de référence et pour l'instant de la mesure de distance :

- longitude céleste et moyen mouvement en longitude du Soleil ou longitude et latitude célestes de l'étoile ;
- longitude et latitude célestes de la Lune ;
- parallaxe horizontale, demi-diamètre et moyen mouvement en longitude de la Lune.

Vient ensuite la réduction de la distance qui se décline ainsi :

- corriger la distance observée de l'erreur instrumentale ;
- corriger cette distance du demi-diamètre de la Lune et, le cas échéant, du Soleil, pour se ramener aux centres ; on obtient une distance apparente réfractée ;
- corriger les hauteurs mesurées de l'erreur instrumentale et de la dépression apparente de l'horizon ainsi que du demi-diamètre ; on obtient des hauteurs apparentes réfractées ;
- évaluer les termes correctifs de la distance apparente réfractée $L_{ar}A_{ar}$ consécutifs aux effets de la réfraction astronomique et de la parallaxe en hauteur et en déduire la distance vraie LA.

Cette distance vraie va être utilisée pour calculer la différence des longitudes célestes entre les deux astres, connaissant aussi leurs latitudes célestes[32]. Par ajout, ou soustraction selon le cas de figure, de cet angle à la longitude céleste de l'étoile (ou le cas échéant du Soleil), on déduit la longitude céleste observée de la Lune. Cette dernière est comparée à la longitude céleste calculée, à partir des données d'un almanach, pour l'heure au méridien de référence considérée déduite de la longitude estimée G_e. Si cette dernière est exacte, il y aura égalité entre les longitudes célestes observée et calculée. Dans le cas contraire, une différence de temps Δt peut être calculée connaissant le moyen mouvement horaire en longitude céleste m_L de la Lune relevé dans l'almanach :

$$\Delta t = \frac{L_{observée} - L_{calculée}}{m_L}$$

Ce Δt est ajouté, algébriquement, à l'heure qui a servi à déterminer la longitude céleste calculée ; on obtient ainsi l'heure de l'observation au méridien de référence. En lui retranchant l'heure locale déterminée au début des opérations, on obtient la longitude du lieu d'observation.

L'Astronome royal a donc choisi, pour réduire la distance, une méthode différentielle – ou indirecte – analogue, dans le principe, à celle présentée par La Caille. Trois corrections, que l'on notera C1, C2 et C3 sont mises en évidence : les deux premières sont des éléments du premier ordre résultant respectivement de la réfraction astronomique et de la parallaxe, la troisième est une correction du second ordre fonction de la parallaxe de la

[32] La latitude céleste d'une étoile est constante, celle du Soleil est, par définition, nulle et celle de la Lune suffisamment lentement variable avec le temps pour utiliser celle déterminée à partir du temps déduit de la longitude estimée.

Lune. N. Maskelyne a recherché les expressions mathématiques de ces trois corrections par un raisonnement géométrique et l'introduction d'arcs auxiliaires puis des transformations trigonométriques. Les démonstrations ont été présentées à la Royal Society le 15 novembre 1764 et font l'objet d'un mémoire publié dans le volume 54 des Philosophical Transactions. L'essentiel en est explicité en annexe 7-2 ci-après, accompagné d'un exemple en annexe 7-5.

Le « British Mariner's Guide » est un document relativement court (environ 130 pages de texte et 35 pages de tables) ; il permet, sans avoir recours à aucun autre document, de calculer la longitude à partir d'une séquence d'observations de distance lunaire telle que décrite ci-dessus. Il se veut un document pratique, à l'usage des marins comme l'indique son titre, et ne comporte aucune démonstration. Le « British Mariner's Guide » contient donc les éléments de calcul de position de la Lune, du Soleil et des principales étoiles zodiacales ; pour la Lune, des tables sont établies à partir de celles conçues par Tobias Mayer en 1755 et permettent le calcul des coordonnées célestes de cet astre jusqu'en 1780. Le document ne comporte par contre aucune table permettant d'alléger le calcul des termes correctifs de la distance mesurée ; ces calculs devront tous être effectués par logarithmes.

En appendice du « British Mariner's Guide », N. Maskelyne indique comment calculer les hauteurs des astres considérés s'il n'a pas été possible de les mesurer – notamment dans le cas d'observations de nuit où l'horizon est invisible – permettant ainsi de résoudre le problème si l'on ne dispose que d'une unique série de mesures de distances lunaires.

Le Nautical Almanac :

Le Nautical Almanac est publié pour la première fois en 1765, pour l'année 1767, sous l'égide de l'Astronome royal. Outre l'ensemble des données nécessaires aux différents calculs astronomiques, le document donne, calculées toutes les 3 heures, les distances entre le centre de la Lune et les principales étoiles zodiacales ainsi que le centre du Soleil (figure 7-1). L'argument d'entrée est le temps solaire vrai au méridien de Greenwich. Le progrès est d'importance pour le navigateur puisque, si la séquence d'observation reste la même, le calcul se réduit à la correction de la distance observée pour obtenir la distance vraie puis à une simple interpolation pour obtenir l'heure correspondante de l'observation à Greenwich.

Simultanément à la publication de la première livraison du Nautical Almanac, Nevil Maskelyne publie les « Tables Requisite to be used with the Nautical Ephemeris for finding Latitude and Longitude at Sea ». Le document contient toutes les tables usuelles nécessaires aux calculs de navigation astronomique. Ces tables seront rééditées, complétées et mises à jour, au moins deux fois (1781 et 1802) du vivant de leur auteur. Elles comportent des contributions d'autres astronomes et calculateurs comme notamment Richard Dunthorne, Israel Lyons et George Witchell.

Dans le Nautical Almanac pour l'année 1772, Nevil Maskelyne propose des perfectionnements à la procédure de calcul qu'il avait explicitée dans le « British Mariner's Guide » de 1763. Il s'agit toujours d'une méthode indirecte mais il supprime le passage intermédiaire par les positions apparentes, affectées de la seule parallaxe en hauteur : on passe ainsi directement des positions apparentes réfractées des deux astres à leurs positions vraies. Afin d'améliorer la précision, il considère ensuite les valeurs affinées de la réfraction astronomique et non plus une approximation qui permettait d'alléger le calcul. Sur ces bases, et conservant les mêmes arcs auxiliaires, N. Maskelyne définit et donne les expressions de cinq termes correctifs, deux du premier ordre et trois du second ordre qui sont à ajouter algébriquement à la distance apparente réfractée pour obtenir la distance vraie. Le calcul de réduction s'effectue entièrement par logarithmes avec le concours de trois petites tables spécifiques.

On donne en annexe 7-3 ci-après la formulation et la procédure de calcul proposées par N. Maskelyne dans le Nautical Almanac pour l'année 1772. Un exemple est traité en annexe 7-5.

[36] MARCH 1767.

Days.	Stars Names.	Distances of ☽'s Center from ☉, and from Stars weft of her. 12 Hours.	15 Hours.	18 Hours.	21 Hours.
		° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
3	The Sun.	47. 35. 32	49. 14. 7	50. 52. 15	52. 29. 58
4		60. 31. 52	62. 6. 53	63. 41. 28	65. 15. 37
5		72. 59. 57	74. 31. 33	76. 2. 45	77. 33. 33
6		85. 1. 42	86. 30. 12	87. 58. 22	89. 26. 11
7		96. 40. 30	98. 6. 26	99. 32. 5	100. 57. 27
8		108. 0. 35	109. 24. 27	110. 48. 7	112. 11. 34
9		119. 6. 21			
6	α Arietis.	36. 56. 52	38. 32. 5	40. 7. 2	41. 41. 42
7		49. 30. 50	51. 3. 51	52. 36. 36	54. 9. 5
8	Aldebaran.	30. 50. 33	32. 16. 45	33. 43. 9	35. 9. 45
9		42. 24. 35	43. 51. 40	45. 18. 45	46. 45. 51
10		54. 1. 29	55. 28. 35	56. 55. 42	58. 22. 48
11		65. 38. 23	67. 5. 29	68. 32. 35	69. 59. 42
12	Pollux.	34. 42. 35	36. 10. 18	37. 38. 5	39. 5. 57
13		46. 26. 22	47. 54. 39	49. 23. 0	50. 51. 26
14	Regulus.	21. 13. 28	22. 42. 27	24. 11. 34	25. 40. 48
15		33. 8. 32	34. 38. 25	36. 8. 24	37. 38. 30
16		45. 10. 46	46. 41. 36	48. 12. 32	49. 43. 36
17		57. 20. 54	58. 52. 45	60. 24. 45	61. 56. 54
18	Spica ♍	15. 48. 39	17. 20. 33	18. 52. 46	20. 25. 17
19		28. 12. 30	29. 46. 44	31. 21. 15	32. 56. 1
20		40. 53. 41	42. 30. 0	44. 6. 34	45. 43. 27
21		53. 51. 55	55. 30. 27	57. 9. 17	58. 48. 25
22		67. 8. 48	68. 49. 50	70. 31. 11	72. 12. 52
23	Antares.	34. 55. 40	36. 39. 31	38. 23. 42	40. 8. 14
24		48. 56. 5	50. 42. 38	52. 29. 31	54. 16. 45
25		63. 17. 49	65. 6. 58	66. 56. 24	68. 46. 7
26	β Capricorni.	23. 43. 43	25. 32. 9	27. 21. 11	29. 10. 44
27	α Aquilæ.	46. 57. 42	48. 20. 33	49. 44. 53	51. 10. 35
28		58. 36. 8	60. 7. 55	61. 40. 21	63. 13. 19

Fig : 7-1

Logarithmes proportionnels :

Encore appelés « logarithmes logistiques », ils ont été conçus pour effectuer l'interpolation de la distance vraie entre deux valeurs de distances données par l'almanach pour trouver l'heure vraie de l'observation au méridien origine (Greenwich pour le Nautical Almanac). Ces logarithmes sont mis en table, pour un intervalle d'argumentation des distances de 3 heures, dans tous les documents de calcul d'astronomie nautique de l'époque, notamment dans les « Tables Requisite » ; leur théorie est indiquée en annexe 7-6.

Solution d'Israel Lyons (1766) :

Israel Lyons (1739-1775) est mathématicien, astronome et botaniste ; il participe à l'élaboration du Nautical Almanac à partir de 1765. Comme l'Astronome royal, Israël Lyons utilise la méthode indirecte pour effectuer la réduction d'une distance lunaire ; il considère trois termes correctifs à ajouter algébriquement à la distance apparente réfractée, les deux du premier ordre et le terme prépondérant du second ordre, fonction de la parallaxe de la Lune, termes que l'on a noté C1, C2 et C3 dans le paragraphe ci-avant relatif au procédé conçu par N. Maskelyne et explicité dans le « British Mariner's Guide ».

Après transformation de la formule donnant la somme corrective cherchée, I. Lyons met en évidence 4 arcs qu'il calcule par logarithmes et à l'aide d'une courte table qui figure notamment dans les « Tables Requisite » de N. Maskelyne (voir annexe 7-4).

Cambridge Tables (1772) :

Le titre complet de ces tables est « Tables for correcting the apparent distance of the Moon and a Star from the effects of Refraction and Parallax » ; elles furent éditées à Cambridge (d'où leur nom d'usage) en 1772 et sont aussi parfois appelées « Shepherd's Tables » du nom du mathématicien auteur de la préface de la table. Sous la direction d'Israel Lyons, les principaux calculateurs étaient MM. Parkinson et Williams. Ces tables donnent directement la valeur de la réduction en fonction des valeurs apparentes réfractées des hauteurs et de la distance exprimées avec un intervalle d'argumentation de 1°. Les calculs sont conduits pour une valeur « plancher » de la parallaxe horizontale de la Lune de 53' et des valeurs de réfraction astronomique évaluées pour un état moyen de l'atmosphère ; des tables de correction permettent de se ramener aux conditions existantes ainsi qu'aux observations du Soleil. L'ouvrage comporte 4 pages d'introduction, 7 pages d'instructions et environ 1.100 pages de données, soit environ 300.000 valeurs de réduction. Sauf cas exceptionnel, leur usage faisait nécessairement appel à une interpolation triple pour trouver une valeur précise de la réduction. Ces tables, volumineuses et chères, n'eurent que peu de succès à la mer mais ont été utiles à certains auteurs (comme peut-être D. Thomson et, plus certainement, J. Taylor ; voir chapitre 9) pour calculer leurs propres tables.

Solution de George Witchell (1772):

George Witchell (1728-1785) est professeur à l'académie navale royale de Portsmouth ; comme son compatriote I. Lyons, il participe à l'élaboration du Nautical Almanac à partir de 1765. La solution qu'il préconise pour réduire une distance lunaire figure dans le Nautical Almanac pour l'an 1772 ainsi qu'en annexe des « Tables Requisite » de N. Maskelyne (réédition de 1781). Elle consiste à calculer par logarithmes les trois principaux termes correctifs de la distance apparente réfractée en utilisant une approximation de la correction de réfraction astronomique de l'astre. Le procédé, qui fait appel aux mêmes arcs auxiliaires que ceux définis par N. Maskelyne dans le « British Mariner's Guide », est décrit en annexe 7-4.

Commentaires :

En Grande-Bretagne, face à la concurrence du chronomètre, Nevil Maskelyne fut le promoteur de l'utilisation des distances lunaires pour déterminer la longitude. Outre la définition d'une procédure d'observation et de calcul puis la publication des distances pré-calculées dans le Nautical Almanac, il a porté à son perfectionnement la méthode indirecte de calcul de la distance vraie. La formulation qu'il propose est obtenue par d'élégantes considérations géométriques complétées de transformations trigonométriques ; elle met en évidence les valeurs possibles des termes du second ordre, notamment lorsque la distance mesurée est de faible valeur, qui étaient auparavant négligés et contribue à améliorer la précision du calcul ; la contrepartie réside dans son importance, tant en volume qu'en durée. Les tentatives de simplification d'Israel Lyons et de George Witchell conduisent à des opérations encore assez compliquées et on peut s'interroger sur leur réelle application pratique par les navigateurs ; de toute évidence elles restent encore des méthodes de spécialiste, rompu au calcul numérique.

ANNEXES AU CHAPITRE 7

ANNEXE 7-1

DÉFINITION DES TERMES CORRECTIFS À L'AIDE D'UN DÉVELOPPEMENT LIMITÉ

La méthode indirecte de réduction est fondée sur le calcul de la différence δ entre distance apparente réfractée et distance vraie, cette dernière étant ensuite obtenue par :

$$LA = D = L_{ar}A_{ar} + \delta = d + \delta$$

δ résultant des différences entre hauteurs apparentes réfractées et vraies x et y qui ont des petites valeurs (respectivement moins de 1° et moins d'une dizaine de minutes d'arc), la recherche d'une expression donnant cette différence va s'effectuer en écrivant :

$$H_{vL} = H_{arL} + x \quad \text{et} \quad H_{vA} = H_{arA} - y$$

Pour simplifier l'écriture des expressions qui suivent, on note :

Éléments géocentriques ou vrais	Éléments topocentriques et apparents réfractés
D = LA distance lunaire vraie A = H_{vL} hauteur vraie de la Lune B = H_{vA} hauteur vraie de l'astre	d = $L_{ar}A_{ar}$ distance lunaire apparente réfractée a = H_{arL} hauteur apparente réfractée de la Lune b = H_{arA} hauteur apparente réfractée de l'astre
A = a + x, B = b – y, D = d + δ	

En écrivant l'expression de la distance lunaire dans chacun des triangles sphériques ZAL et AAarLar (voir figure 1-1 par exemple), on obtient :

$$\cos D = \sin A \,.\, \sin B + \cos A \,.\, \cos B \,.\, \cos \Delta Z \quad \text{et} \quad \cos d = \sin a \,.\, \sin b + \cos a \,.\, \cos b \,.\, \cos \Delta Z$$

On écrit ensuite l'expression de cos ΔZ selon la seconde équation que l'on replace ensuite dans la première, on obtient ainsi :

$$\cos D = \frac{\cos d \,.\, \cos A \,.\, \cos B}{\cos a \,.\, \cos b} - \tan a \,.\, \tan b \,.\, \cos A \,.\, \cos B + \sin A \,.\, \sin B$$

soit, en utilisant uniquement les quantités apparentes réfractées et les éléments de correction :

$$\cos(d + \delta) = \frac{\cos d \,.\, \cos(a + x) \,.\, \cos(b - y)}{\cos a \,.\, \cos b} - \tan a \,.\, \tan b \,.\, \cos(a + x) \,.\, \cos(b - y) + \sin(a + x) \,.\, \sin(b - y)$$

On développe ensuite les lignes trigonométriques des arcs (d + δ), (a + x) et (b – y) et, x, y et δ étant « petits » (en radians), on écrit :

$$\sin x \approx x \quad \sin y \approx y \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} \quad \cos y \approx 1 - \frac{y^2}{2} \quad \cos \delta \approx 1 - \frac{\delta^2}{2}$$

On développe ensuite complètement les deux membres de l'expression donnant la distance vraie, en limitant ce développement au second degré (ou second ordre). On obtient ainsi, en reprenant les notations d'origine et tous calculs faits[33] :

$$\delta = -x.\frac{\sin H_{arA} - \cos d\,.\sin H_{arL}}{\sin d\,.\cos H_{arL}} + y.\frac{\sin H_{arL} - \cos d\,.\sin H_{arA}}{\sin d\,.\cos H_{arA}}$$

$$+\frac{x^2}{2}.\cot d\,.\left[1 - \left(\frac{\sin H_{arA} - \cos d\,.\sin H_{arL}}{\sin d\,.\cos H_{arL}}\right)^2\right]$$

$$+x.y.\frac{2.\cos d\,.\sin H_{arL}\,.\sin H_{arA} + (\sin d)^2 - (\sin H_{arL})^2 - (\sin H_{arA})^2}{(\sin d)^3.\cos H_{arL}\,.\cos H_{arA}}$$

$$+\frac{y^2}{2}.\cot d\,.\left[1 - \left(\frac{\sin H_{arL} - \cos d\,.\sin H_{arA}}{\sin d\,.\cos H_{arA}}\right)^2\right]$$

Les deux premiers termes sont ceux du premier ordre, les plus importants, les trois suivants sont dits du second ordre. L'équation est cohérente si les petits arcs sont exprimés en radians. Si on utilise la minute, les trois termes du second ordre ci-dessus devront être divisés par 10800/π.

On peut simplifier l'écriture en exprimant les termes du développement en fonction des angles à la Lune et à l'astre (en L_{ar} et A_{ar}), α et β. Par identification, on arrive rapidement à :

$$\delta = -x.\cos\alpha + y.\cos\beta + x.y.\sin\alpha\,.\sin\beta\,.\csc d + \frac{x^2}{2}.\cot d\,.(\sin\alpha)^2 + \frac{y^2}{2}.\cot d\,.(\sin\beta)^2$$

$$x = \pi_L.\cos H_{arL} - R_L \quad \text{et} \quad y = R_A - \pi_A.\cos H_{arA}$$

π_L et π_A désignant les parallaxes horizontales de la Lune et de l'astre A, R_L et R_A les réfractions astronomiques.

Compte tenu de ce qui précède, la formule donnant δ peut s'écrire :

$$\delta = +\pi_L.\sin H_{arL}\,.\cot d - \pi_L.\sin H_{arA}\,.\csc d + R_L.\cos\alpha + R_A.\cos\beta + \pi_A.(\sin H_{arA}\,.\cot d - \sin H_{arL}.\csc d)$$

$$+\frac{1}{2}.[\pi_L^2.(\cos H_{arL}.\sin\alpha)^2.\cot d] - \pi_L.R_L.\cos H_{arL}\,.(\sin\alpha)^2.\cot d + \pi_L.R_A.\cos H_{arL}\,.\sin\alpha\,.\sin\beta\,.\csc d +$$

$$+\frac{1}{2}.[(R_L.\sin\alpha)^2 + (R_A.\sin\beta)^2].\cot d - R_A.R_L.\sin\alpha\,.\sin\beta\,.\csc d$$

Les différents termes de cette équation, sont numérotés comme suit afin de pouvoir y faire par la suite facilement référence :

$(1) = +\pi_L.\sin H_{arL}\,.\cot d$ $(2) = -\pi_L.\sin H_{arA}\,.\csc d$ $(3) = +R_L.\cos\alpha + R_A.\cos\beta$ $(4) = +\frac{1}{2}.[\pi_L^2.(\cos H_{arL}.\sin\alpha)^2.\cot d]$	$(5) = -\pi_L.R_L.\cos H_{arL}\,.(\sin\alpha)^2.\cot d + \pi_L.R_A.\cos H_{arL}\,.\sin\alpha\,.\sin\beta\,.\csc d$ $(6) = +\frac{1}{2}.[(R_L.\sin\alpha)^2 + (R_A.\sin\beta)^2].\cot d - R_A.R_L.\sin\alpha\,.\sin\beta\,.\csc d$ $(7) = +\pi_A.(\sin H_{arA}\,.\cot d - \sin H_{arL}.\csc d)$

Le terme (7), du premier ordre, n'est à considérer que si la parallaxe horizontale de l'astre n'est pas négligeable.

De même, si parallaxes et réfractions sont exprimées en minutes, il faudra diviser les termes du second ordre (4), (5) et (6) par 10800/π.

[33] Il parait inutile de reproduire l'ensemble du développement. Le lecteur intéressé le trouvera dans le mémoire de l'officier de la marine royale espagnole Joseph de Mendoza y Rios qui fit l'objet d'une présentation à la Royal Society en 1796 et qui figure en français dans les Philosophical Transactions n° 87 de 1797 sous le titre : « Recherches sur les principaux problèmes de l'astronomie nautique ».

Ordre de grandeur des termes du second ordre :

En admettant que x < 60', y < 5' (la hauteur de l'astre est alors supérieure à une dizaine de degrés) et sachant que sin α < 1 et sin β < 1, on obtient les majorations suivantes des termes du second ordre pour différentes valeurs de la distance apparente réfractée $L_{ar}A_{ar}$ ou d :

d = $L_{ar}A_{ar}$	Terme en x^2	Terme en y^2	Terme en xy
10°	< 2,97'	< 0,02'	< 0,50'
20°	< 1,44'	< 0,01'	< 0,26'
45°	< 0,52'	0	< 0,12'
90°	0	0	< 0,09'

On constate la prépondérance du terme en x^2 et la très faible valeur maximale du terme en y^2 que l'on pourra toujours négliger sauf si la distance est très faible. Le terme en xy n'est significatif que pour une distance inférieure à 45°.

ANNEXE 7-2

RÉDUCTION DES DISTANCES SELON LA MÉTHODE

EXPLICITÉE DANS LE BRITISH MARINER'S GUIDE

Correction de réfraction astronomique :

Sur la figure A7-1 ci-dessous, on note Z le zénith de l'observateur, L_{ar} et A_{ar} les positions apparentes réfractées de la Lune et d'une étoile. En corrigeant les hauteurs de ces astres de la réfraction astronomique on obtient leurs positions apparentes L_a et A_a. L'astre A étant une étoile, la position apparente est confondue avec la position vraie (parallaxe horizontale nulle). On note ensuite M_i le milieu de l'arc de distance apparente réfractée $L_{ar}A_{ar}$ et P le pied de la perpendiculaire sphérique abaissée de Z sur l'arc de distance $L_{ar}A_{ar}$; α et β désignent les angles du triangle sphérique $ZL_{ar}A_{ar}$ en L_{ar} et A_{ar}.

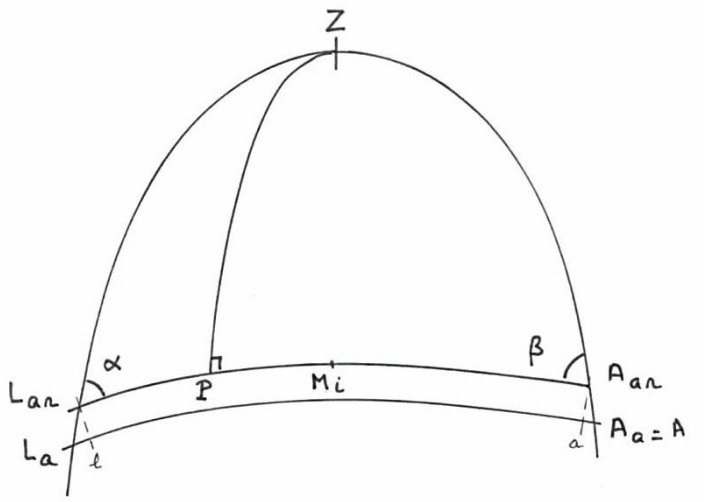


Fig : A7-1

La correction de réfraction astronomique, que l'on notera C1, permet de passer de la distance apparente réfractée à la distance apparente ; on a ainsi, dans ce cas de figure, en considérant les petits triangles L_aL_arl et A_aA_ara plans :

$$L_aA_a = L_arA_ar + C1 \text{ avec } C1 = L_al + A_aa \approx L_aL_ar.\cos\alpha + A_aA_ar.\cos\beta$$

Les arcs L_aL_{ar} et A_aA_{ar} sont les corrections de réfraction astronomique des hauteurs dont les expressions couramment utilisées en cette seconde moitié du XVIIIe siècle sont :

$$L_aL_{ar} = R.\cot H_{arL} \quad A_aA_{ar} = R.\cot H_{arA} \quad \text{avec } R = 57'' = 0{,}95'$$

En considérant ensuite les triangles rectangles $ZL_{ar}P$ et $ZA_{ar}P$, on obtient ensuite :

$$\cos\alpha = \tan L_{ar}P\,.\tan H_{arL} \quad \text{et} \quad \cos\beta = \tan A_{ar}P.\tan H_{arA}$$

La correction C1 a alors pour expression approchée :

$$C1 = R.(\tan L_{ar}P + \tan A_{ar}P)$$

Les arcs $L_{ar}P$ et A_{ar} P sont inconnus. On peut cependant rechercher une expression facilement calculable de la quantité figurant entre parenthèse à l'aide d'une série de transformation trigonométrique dont nous n'indiquerons pas les détails. Retenons simplement que N. Maskelyne pose :

$$\tan M = \cot\frac{H_{arL} + H_{arA}}{2}.\tan\frac{|H_{arL} - H_{arA}|}{2}$$

et note M « arc the first » (ou arc 1). Il recherche ensuite l'expression, en fonction de M, de l'arc M_iP qu'il note « arc the second » (ou arc 2) ; il trouve :

$$\tan M_iP = \tan M\,.\cot\frac{d}{2}$$

Il établit enfin que :

$$C1 = 2R.\tan 2M\,.\csc 2M_iP$$

Correction de parallaxe horizontale de la Lune :

Sur la figure A7-2 ci-dessous, on note A et L les positions vraies de la Lune et de l'étoile. L'arc L_aL est la parallaxe horizontale de la Lune. On admet que les points M_i et P définis ci-dessus peuvent être placés sans erreur sensible sur l'arc de distance apparente.

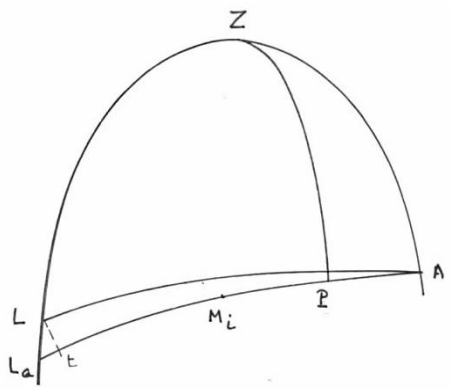


Fig : A7-2

En admettant que le petit triangle L_aLt est plan, la distance vraie cherchée a pour expression approchée :

$$LA = L_aA - C2 \quad \text{avec } C2 \approx L_aL.\cos\alpha$$

L_aL est la parallaxe en hauteur de la Lune dont l'expression est :

$$\varpi = \pi_L.\cos H_{aL}$$

π_L étant la parallaxe horizontale. N. Maskelyne pose ensuite :

$$Q = \frac{d}{2} \pm M_iP$$

qu'il note « arc the third » (ou arc 3); le signe plus ou moins à adopter pour évaluer Q se détermine en fonction de la position relative de M_i par rapport à P, ce dernier point pouvant être à l'extérieur de l'arc L_aA. En exprimant l'angle α dans le triangle sphérique rectangle ZL_aP, on arrive ensuite facilement à:

$$C2 = \pi_L.\sin H_{arL}.\tan Q$$

Correction du second ordre :

Les corrections C1 et C2 dont on vient d'écrire les expressions sont dites du premier ordre : les petits arcs dont elles dépendent sont, dans les formules, exprimés au 1er degré. On remarque d'autre part que des approximations ont été faites : les petits triangles dans lesquels apparaissent les quantités correctives ont été considérés comme plans et les distances $L_{ar}A_{ar}$ et la (figure A7-1) puis LA et tA (figure 7-2) ont été respectivement admises comme égales. Il y a donc lieu d'apporter de nouvelles corrections qui, elles, seront du second ordre, faisant intervenir des petites quantités élevées au carré.

Dans le British Mariner's Guide, N. Maskelyne n'en met en évidence qu'une seule qui constitue une rectification de la correction C2.

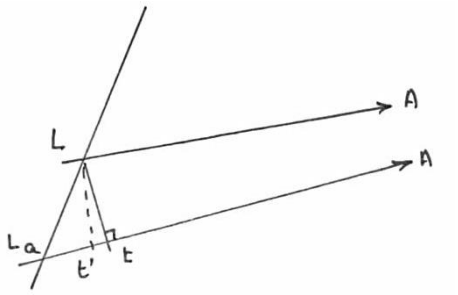


Fig : A7-3

Sur les figures A7-2 et A7-3, t étant la projection orthogonale de L sur l'arc L_aA, on a considéré l'égalité entre tA et LA. Il faudrait en fait considérer un point t' tel que LA = t'A. On met ainsi une petite correction supplémentaire C3 dont l'expression, obtenue à partir d'un raisonnement géométrique est :

$$C3 = \frac{(\pi_L.\cos H_{aL})^2 - C2^2}{2.\tan d}.\text{arc}1' \quad \text{ou} \quad C3 = \frac{(\pi_L.\cos H_{aL})^2 - C2^2}{2.\tan d}.\text{arc}1''$$

suivant que l'on travaille en minutes ou en secondes d'arc (arc1' = π/10800, arc1'' = π/648000).

La distance vraie cherchée a donc, en définitive, pour expression :

$$D = d + C1 - C2 + C3$$

Les équivalences entre les termes correctifs établis et ceux du développement limité sont les suivantes :

- la somme des termes notés C1 et C2 correspond, compte tenu de la simplification utilisée dans le Guide, à la somme des termes du 1er ordre du développement limité,
- le terme noté C3 correspond à la part de la parallaxe en hauteur intervenant dans le terme en x^2 du développement, référencé (4) dans l'encadré.

ANNEXE 7-3

RÉDUCTION DES DISTANCES SELON LA MÉTHODE EXPLICITÉE

DANS LE NAUTICAL ALMANAC POUR L'AN 1772

Notations, et nouvelle formulation du problème :

Sur la figure A7-4 ci-après, représentant une partie de la sphère locale de l'observateur ainsi que des schémas d'agrandissements au voisinage des projections de la Lune et de l'astre, on note :

L_{ar} et A_{ar}, les positions apparentes réfractées, de la Lune et de l'astre considéré (Soleil, étoile ou planète) : la distance $L_{ar}A_{ar}$ est la distance apparente réfractée issue de la mesure ; L et A, les positions vraies de la Lune et de l'astre considéré ; la distance LA est la distance vraie cherchée. α et β sont les angles à la Lune $ZL_{ar}A_{ar}$ et à l'astre $ZA_{ar}L_{ar}$. M_i désigne le milieu de l'arc $L_{ar}A_{ar}$ et P le pied de la hauteur sphérique du triangle $ZL_{ar}A_{ar}$ issue de Z.

On définit ensuite les points :

l_1 : projection orthogonale de L sur l'arc $L_{ar}A_{ar}$,

l_2 : sur l'arc $L_{ar}A_{ar}$ tel que $l_2a_2 = La_1$,

a_1 : projection orthogonale de A sur l'arc $L_{ar}A_{ar}$,

a_2 : projection orthogonale de A sur l'arc La_1,

a_3 : sur l'arc La_1 et tel que $La_3 = LA$.

Compte tenu de ces dispositions, la distance vraie cherchée peut ainsi s'écrire :

$$LA = La_3 = La_1 + a_1a_2 + a_2a_3 = L_{ar}A_{ar} - L_{ar}l_1 + l_1l_2 + A_{ar}a_1 + a_1a_2 + a_2a_3$$

Cette distance se déduit donc de la distance apparente réfractée à laquelle on ajoute algébriquement 5 termes correctifs dont il s'agit d'établir les expressions.

Les 4 arcs préceptes définis par N. Maskelyne :

Les trois premiers arcs préceptes ont été définis et leurs expressions établies dans le mémoire présenté par N. Maskelyne à la Royal Society le 15 novembre1764 ; le quatrième est l'angle à la Lune α. On les rappelle ci-dessous :

Arc 1 : M tel que :

$$\tan M = \cot\frac{H_{arL} + H_{arA2}}{2} . \tan\frac{|H_{arL} - H_{arA}|}{2}$$

Arc 2 : M_iP dont l'expression est :

$$\tan M_iP = \tan M . \cot\frac{d}{2}$$

Arc 3 : Q tel que :

$$Q = L_{ar}P = \frac{d}{2} \pm M_iP \text{ avec} + \text{si } H_{arA} > H_{arL} , - \text{si } H_{arA} < H_{arL}$$

Arc 4 : angle à la Lune noté α dont l'expression est :

$$\cos\alpha = \tan Q . \tan H_{arL}$$

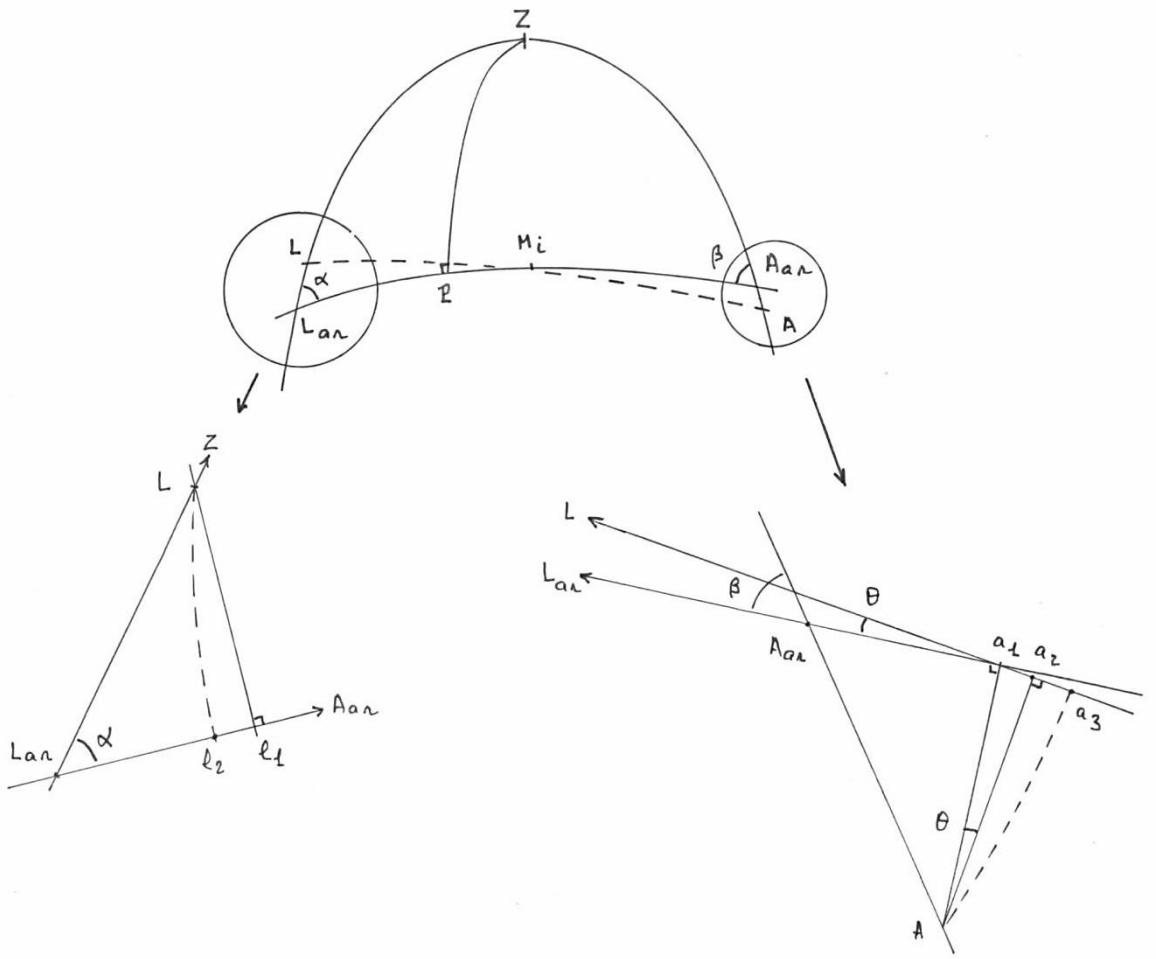


Fig : A7-4

Termes correctifs du premier ordre :

Ces termes sont ceux dans lesquels les arcs représentatifs des corrections interviennent au premier degré. On a ainsi :

$$-L_{ar}l_1 + A_{ar}a_1 = (R_L - \pi_L.\cos H_{arL}).\cos\alpha + R_A.\cos\beta$$

Expression dans laquelle R_L et R_A désignent respectivement les corrections de réfraction astronomique à appliquer aux hauteurs de la Lune et de l'astre et π_L désigne la parallaxe horizontale de la Lune.

Nota : dans le cas où l'astre considéré est le Soleil (ou une planète), le second terme de l'égalité ci-dessus est à compléter de la correction de parallaxe de l'astre et s'écrira $(R_A - \pi_A.\cos H_{arA}).\cos\beta$. Pour alléger les écritures, on considèrera dans ce qui suit que la correction de parallaxe a été, si nécessaire, intégrée dans le terme noté R_A.

Cette première relation permet, après transformations trigonométriques, de mettre en évidence les deux termes correctifs du premier ordre qui sont :

$$C'1 = 2.R'_A.\tan 2M.\csc 2M_iP \quad \text{avec} \quad R'_A = R_A.\tan H_{arA}$$

Et

$$C'2 = \left[-(\pi_L - R''_L) - \frac{R'_A}{\sin H_{arL}}\right].\sin H_{arL}.\tan Q \quad \text{avec} \quad R''_L = R_L.\sec H_{arL}$$

Les quantités figurant entre les parenthèses d'une part et les crochets d'autre part ont été appelées respectivement « parallaxe horizontale diminuée », que l'on notera π_{Ldim}, et « parallaxe horizontale corrigée » par N. Maskelyne.

Termes correctifs du second ordre :

Arc l_1l_2 ou C'3 :

L'expression de cet arc, obtenue selon la méthode exposée dans l'analyse du mémoire de 1764, est de la forme :

$$l_1l_2 = \frac{Ll_1{}^2}{2.\tan La_1} = \frac{(L_{ar}L.\sin\alpha)^2}{2.\tan La_1}$$

avec $La_1 = d + C'1 + C'2$ et $L_{ar}L = \pi_{Ldim}.\cos H_{arL}$, la correction C'3 s'écrit ainsi :

$$C'3 = l_1l_2 = \frac{(\pi_{Ldim}.\cos H_{arL}.\sin\alpha)^2}{2.\tan La_1}$$

Si π_{Ldim} est exprimée en minutes, il conviendra de diviser le résultat par 10800/π pour obtenir la correction C'3 en minutes également.

Arc a_1a_2 ou C'4 :

L'expression de ce terme correctif s'établit en recherchant celle de l'angle θ dans le triangle sphérique $LL_{ar}a_1$ puis celles des arcs Ll_1 et Aa_1 en fonction des angles α et β. On obtient, après transformations trigonométriques :

$$C'4 = a_1a_2 = \frac{2.C'3.A_{ar}A.\cos H_{arL}}{L_{ar}L.\cos La_1.\cos H_{aS}} = \frac{2.C'3.R''_A}{\pi_{Ldim}.\cos La_1} \quad \text{avec} \quad R''_A = R_A.\sec H_{arA}$$

Si les quantités R''_A et π_{Ldim} sont exprimées dans la même unité, C'4 sera obtenu directement dans l'unité de C'3.

Arc a_2a_3 ou C'5 :

Le raisonnement à appliquer est identique à celui utilisé pour calculer les arcs C'3 et C'4. On obtient ainsi :

$$C'5 = a_2a_3 = C'3.\left(\frac{A_{ar}A.\cos H_{arL}}{L_{ar}L.\cos H_{arA}}\right)^2 = C'3.\left(\frac{R''_A}{\pi_{Ldim}}\right)^2$$

qui constitue la 5e correction. Si R''_A et π_{Ldim} sont exprimés dans la même unité, C'5 sera obtenue directement dans l'unité de C'3.

En définitive, la distance vraie s'écrit algébriquement : D = d + C'1 + C'2 + C'3 + C'4 + C'5.

Selon les instructions figurant dans le Nautical Almanac on commence par calculer par logarithmes les 4 arcs préceptes puis les deux termes du premier ordre C'1 et C'2. Le logarithme[34] de la quantité R'_A est donnée par la table 1 (ou la table 2 s'il s'agit du Soleil) en fonction de la hauteur apparente réfractée de l'astre et de la valeur précise de la réfraction astronomique pour cette hauteur. La table 3 donne directement les quantités R''_L et R''_A en fonction des hauteurs apparentes réfractées et, là aussi, des valeurs précises des réfractions astronomiques pour les hauteurs considérées. Les termes correctifs du second ordre sont ensuite calculés par logarithmes.

Les correspondances entre les termes correctifs définis dans le Nautical Almanac 1772 et ceux établis à l'aide du développement limité sont les suivantes :

- la somme des termes notés C'1 et C'2 correspond à la somme des termes du 1er ordre du développement,
- le terme noté C'3 correspond à celui du 2e ordre en x^2 du développement, dans son intégralité,
- le terme noté C'4 correspond à une partie de celui du 2e ordre en xy du développement,
- le terme noté C'5 correspond à celui du 2e ordre en y^2 du développement, dans son intégralité.

ANNEXE 7-4

SOLUTIONS D'ISRAEL LYONS ET DE GEORGE WHITCHELL

Solution d'Israel Lyons :

Israël Lyons utilise la formule générale donnant la correction δ en ne considérant que la partie principale et le terme prépondérant du second ordre, soit le terme en x^2 (parallaxe et réfraction de la Lune). La relation utilisée devient :

$$\delta = y.\cos\beta - x.\cos\alpha + \frac{1}{2}.(x.\sin\alpha)^2.\cot d$$

Il exprime ensuite dans cette formule les angles α et β selon leurs expressions en fonction des hauteurs apparentes réfractées et de la distance et obtient :

$$\delta = y.\frac{\sin H_{arL}}{\cos H_{arA}.\sin d} - y.\tan H_{arA}.\cot d - x.\frac{\sin H_{arA}}{\cos H_{arL}.\sin d} + x.\tan H_{arL}.\cot d + \frac{1}{2}.(x.\sin\alpha)^2.\cot d$$

Il pose ensuite :

[34] Les tables 1 et 2 donnent en fait les logarithmes proportionnels du double de l'argument.

$$\text{arc1} = y.\frac{\sin H_{arL}}{\cos H_{arA}\,.\sin d}\,;\;\; \text{arc2} = y.\tan H_{arA}\,.\cot d\,;\;\; \text{arc3} = x.\frac{\sin H_{arA}}{\cos H_{arL}\,.\sin d}\,;\;\; \text{arc4} = x.\tan H_{arL}\,.\cot d$$

En exprimant le sin α en fonction du cosinus et sachant que x.cos α = - (arc4 – arc3), il obtient :

$$\delta = (\text{arc1} - \text{arc2}) + (\text{arc4} - \text{arc3}) + \frac{1}{2}.x^2.\cot d - \frac{1}{2}.(\text{arc4} - \text{arc3})^2.\cot d$$

Les arcs 1 à 4 sont calculés par logarithmes et les deux derniers termes le sont à l'aide d'une courte table à double argument, la distance apparente et la quantité x puis la différence (arc4 – arc3). On fait ainsi deux entrées successives dans cette table qui figure notamment dans les « Tables Requisite » de N. Maskelyne sous le n° XIII.

Un exemple de calcul est donné en annexe 7-5.

Solution de George Witchell:

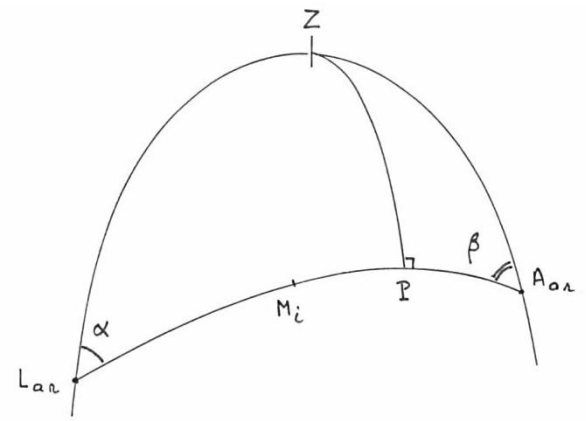


Fig : A7-5

Après avoir déterminé l'arc auxiliaire M_iP (arc précepte 2 et figure A7-5 ci-dessus), la solution proposée par G. Witchell consiste à évaluer les arcs $L_{ar}P$ et $A_{ar}P$ pour exprimer ensuite les cosinus des angles α et β :

$$\tan M_iP = \cot\frac{H_{arL} + H_{arA}}{2}.\tan\frac{|H_{arL} - H_{arA}|}{2}.\cot\frac{d}{2}\;\;,\qquad L_{ar}P = Q = \frac{d}{2} \pm M_iP \;\;\text{et}\;\; A_{ar}P = Q' = \frac{d}{2} \mp M_iP$$

La première correction définie par G. Witchell est relative à la réfraction astronomique sur l'astre A, R_A ; elle est de la forme :

$$C^{ion}1 = R_A.\cos\beta = R_A.\tan Q'.\tan H_{arA}$$

G. Witchell admet ensuite que R_A est, en minutes, peu différente de cot H_{arA}. La correction a alors pour expression simplifiée :

$$C^{ion}1 = \tan Q'$$

La seconde correction concerne ensuite la parallaxe en hauteur et la réfraction sur la Lune dont l'expression[35] est :

$$C^{ion}2 = x.\cos\alpha = (\pi_L.\cos H_{arL} - R_L).\tan Q\,.\tan H_{arL}$$

[35] Les signes des corrections 1 et 2 sont fonction de la configuration et se détermine à partir d'un simple schéma.

Enfin, la troisième correction est celle prépondérante du second ordre qui s'écrit :

$$C^{ion}3 = \frac{x^2 - C^{ion}2^2}{2} . \cot d$$

Un exemple de calcul figure en annexe 7-5 ci-après.

ANNEXE 7-5

EXEMPLE

Les données sont celles de l'exemple figurant au chapitre 4. Les éléments utiles sont résumés dans le tableau ci-dessous :

Lune	Aldébaran
Hauteur apparente réfractée : H_{arL} = 26° 55' 30'' Parallaxe horizontale : π_L = 54' 24'' Réfraction astronomique : R_L = 1,91'	Hauteur apparente réfractée : H_{arA} = 47° 56' 18'' Réfraction astronomique : R_A = 0,88'
Distance apparente réfractée $L_{ar}A_{ar}$ = d = 25° 11' 12''	

Le problème consiste à évaluer la distance vraie D par la méthode indirecte, selon les procédés exposés dans ce chapitre 7.

Calcul de la distance vraie selon le British Mariner's Guide :

$\tan M = \cot\frac{H_{arL} + H_{arA}}{2} . \tan\frac{\lvert H_{arL} - H_{arA}\rvert}{2}$	Arc1 = M =	13,6199°
$\tan M_iP = \tan M . \cot\frac{d}{2}$	Arc2 = M_iP =	47,3226°
$Q = \frac{d}{2} + M_iP$	Arc3 = Q =	59,9159°
$C1 = 2. R. \tan 2M . \csc 2M_iP$	C1 =	0,98'
$C2 = \pi_L . \sin H_{arL} . \tan Q$	C2 =	42,52'
$C3 = \frac{(\pi_L . \cos H_{arL})^2 - C2^2}{2. \tan d} . arc1'$	C3 =	0,17'
$\delta = C1 - C2 + C3$	δ =	- 41,37'
$LA = d + \delta$	LA =	24° 29' 50''

Calcul de la distance vraie selon le Nautical Almanac pour l'an 1772 :

Les arcs 1, 2 et 3 figurent dans le tableau précédent.

$\cos\alpha = \tan Q \,.\, \tan H_{arL}$	Arc4 = α =	28,7535°
$R'_A = R_A . \tan H_{arA}$	R'$_A$ =	0,975'
$R''_A = R_A . \sec H_{arA}$	R''$_A$ =	1,314'
$R''_L = R_L . \sec H_{arL}$	R''$_L$ =	2,142'
$\pi_{Ldim} = \pi_L - R''_L$	π_{Ldim} =	52,258'
$C'1 = 2 . R'_A . \tan 2M \,.\, \csc 2M_i P$	C'1 =	1,007'
$C'2 = \left[-\pi_{Ldim} - \frac{R'_A}{\sin H_{arL}}\right] . \sin H_{arL} \,.\, \tan Q$	C'2 =	- 42,531'
$La_1 = d + C'1 + C'2$	La_1 =	24,4946°
$C'3 = \frac{(\pi_{Ldim} . \cos H_{arL} . \sin\alpha)^2}{2 . \tan La_1} . arc1'$	C'3 =	0,160'
$C'4 = \frac{2 . C'3 . R''_A}{\pi_{Ldim} . \cos La_1}$	C'4 =	0,009'
$C'5 = C'3 \left(\frac{R''_A}{\pi_{Ldim}}\right)^2$	C'5 =	0
$\delta = C'1 + C'2 + C'3 + C'4 + C'5$	δ =	- 41,35'
$LA = d + \delta$	LA =	24° 29' 51''

Calcul de la distance vraie selon les termes du développement limité :

L'angle α figure dans le tableau ci-dessus.

$\cos\beta = \tan(d - Q) \,.\, \tan H_{arA}$	β =	140,1923°
$x = \pi_L . \cos H_{arL} - R_L \quad y = R_A$	x = y =	46,593' 0,88'
$C''1 = -x . \cos\alpha$	C''1 =	- 40,848'
$C''2 = y . \cos\beta$	C''2 =	- 0,676'
$C''3 = \frac{x^2}{2} . (\sin\alpha)^2 . \cot d \,.\, arc1'$	C''3 =	0,155'
$C''4 = x . y . \sin\alpha \,.\, \sin\beta \,.\, \csc d \,.\, arc1'$	C''3 =	0,009'
$C''5 = \frac{y^2}{2} . (\sin\beta)^2 . \cot d . arc1'$	C''5 =	0
$\delta = C''1 + C''2 + C''3 + C''4 + C''5$	δ =	- 41,36'
$LA = d + \delta$	LA =	24° 29' 51''

Calcul de la distance vraie selon la solution d'Israel Lyons :

x =	$\pi_L . \cos H_{arL} - R_L =$	46,59'
y =	$R_A =$	0,88'
arc1 =	$y . \frac{\sin H_{arL}}{\cos H_{arA} . \sin d} =$	1,40'
arc2 =	$y . \tan H_{arA} . \cot d =$	2,07'
arc3 =	$x . \frac{\sin H_{arA}}{\cos H_{arL} . \sin d} =$	91,17'
arc4 =	$x . \tan H_{arL} . \cot d =$	50,32'
	arc1 – arc2 =	- 0,67'
	arc4 – arc3 =	- 40,85'
	$\frac{1}{2} . x^2 . \cot d . arc1' =$	0,67'
	$-\frac{1}{2} . (arc4 - arc3)^2 . \cot d . arc1' =$	- 0,52'
	$\delta =$	- 41,37'
Distance vraie =	D =	24° 29' 50''

Calcul de la distance vraie selon la solution de George Witchell :

$\tan M = \cot \frac{H_{arL} + H_{arA}}{2} . \tan \frac{\lvert H_{arL} - H_{arA} \rvert}{2}$	M =	13,6199°
$\tan M_i P = \tan M . \cot \frac{d}{2}$	$M_i P =$	47,3226°
$Q = \frac{d}{2} + M_i P$	Q =	59,9159°
$Q' = M_i P - \frac{d}{2}$	Q' =	34,7292°
$C^{ion}1 = \tan Q'$	$C^{ion}1 =$	- 0,69'
$C^{ion}2 = x . \tan Q . \tan H_{arL}$	$C^{ion}2 =$	- 40,85'
$C3 = \frac{x^2 - C^{ion}2^2}{2 . \tan d} . arc1'$	Cion3 =	0,16'
$\delta = C^{ion}1 + C^{ion}2 + C^{ion}3$	$\delta =$	- 41,38'
$LA = d + \delta$	LA =	24° 29' 49''

ANNEXE 7-6

LOGARITHMES PROPORTIONNELS

Considérons une table donnant la distance vraie entre le centre de la Lune et celui d'un astre à intervalle de 3 heures. On dispose ainsi pour t_1 d'une distance D_1 et pour $t_1 + 3h = t_2$ d'une distance D_2. Supposons qu'à l'instant t, compris entre t_1 et t_2, une observation donne une distance D comprise entre D_1 et D_2.

La relation d'interpolation linéaire – ou de proportionnalité – entre les différents éléments s'écrit alors :

$$D - D_1 = \frac{D_2 - D_1}{t_2 - t_1}.(t - t_1)$$

Avec les éléments de la table, la relation ci-dessus permet de trouver une valeur approchée de D connaissant t ou, inversement, une valeur approchée de t connaissant D. Sous forme logarithmique, la relation s'écrit maintenant :

$$\log(D - D_1) = \log(D_2 - D_1) - \log(t_2 - t_1) + \log(t - t_1)$$

On pose maintenant $h = t_2 - t_1$, on inverse le signe des deux membres de l'équation et on ajoute à ces deux membres le logarithme de h ; il vient :

$$\log h - \log(D - D_1) = \log h - \log(D_2 - D_1) + \log h - \log(t - t_1)$$

On définit ensuite le logarithme proportionnel d'un nombre x comme étant :

$$\text{prop}\log x = \log h - \log x$$

h étant fixé (3 heures dans le cas qui nous intéresse) on peut ainsi en construire une table dont l'argument est x.

La relation de départ s'écrit maintenant :

$$\text{prop}\ \log(D - D_1) = \text{prop}\log(D_2 - D_1) + \text{prop}\log(t - t_1)$$

On écrira plutôt, dans le cas du problème des distances lunaires où l'inconnue est t :

$$\text{prop}\log(t - t_1) = \text{prop}\ \log(D - D_1) - \text{prop}\log(D_2 - D_1)$$

On fera donc deux entrées directes dans la table pour trouver les logarithmes proportionnels du membre de droite dont on formera la différence, puis une entrée inverse dans la table, avec cette différence, pour extraire l'intervalle de temps $t - t_1$ dont on déduira l'heure t cherchée.

CHAPITRE 8

LES DÉVELOPPEMENTS DE LA MÉTHODE DIRECTE

SOLUTIONS DE R. DUNTHORNE, J.-Ch. DE BORDA, W.-L. KRAFFT

ET DIVERSES VARIANTES DE LA FIN DU XVIIIe SIÈCLE

Ce chapitre est consacré à l'étude de méthodes de calcul qui ont été mises au point au cours du dernier tiers du XVIIIe siècle dans lesquelles la comparaison se fait entre des distances vraies, l'une étant issue de la mesure et l'autre d'éléments extraits d'un almanach. Dès cette période, cette dernière distance y est donnée directement toutes les trois heures. On a vu au chapitre précédent que les distances du centre de la Lune au centre du Soleil ainsi qu'aux principales étoiles zodiacales figurent dans le Nautical Almanac à partir de la livraison de l'année 1767. Ces distances figureront dans la Connaissance des temps à partir du volume pour l'année 1774 ; il s'agit alors d'une copie du Nautical Almanac et l'heure de référence est celle de Greenwich. Elles seront données en heure de Paris à partir du volume de 1778 puis seront calculées et préparées intégralement en France pour le volume de 1789. Les distances lunaires disparaîtront de la Connaissance des temps à partir du volume de 1905 ; elles seront supprimées du Nautical Almanac à partir du volume de 1907.

Considérations générales sur la méthode directe :

Rappelons qu'une méthode directe consiste à rechercher une expression trigonométrique donnant directement la distance vraie D = LA en fonction des différents éléments connus, c'est-à-dire la distance apparente réfractée $L_{ar}A_{ar}$ = d et les hauteurs apparentes réfractées H_{arL} et H_{arA} qui, après corrections donneront les hauteurs vraies correspondantes H_{vL} et H_{vA}. La mise en équation consiste à exprimer, à l'aide de la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique, l'angle commun ΔZ aux deux triangles sphériques $ZA_{ar}L_{ar}$ (triangle apparent réfracté) et ZAL (triangle vrai) (figure 8-1).

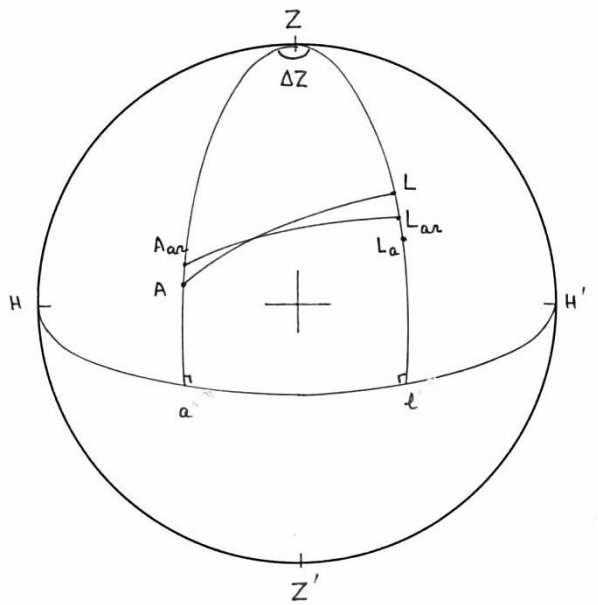


Fig : 8-1

On obtient ainsi :

$$\cos \Delta Z = \frac{\cos D - \sin H_{vL} \,.\, \sin H_{vA}}{\cos H_{vL} \,.\, \cos H_{vA}} = \frac{\cos d - \sin H_{arL} \,.\, \sin H_{arA}}{\cos H_{arL} \,.\, \cos H_{arA}}$$

ΔZ pourrait être calculé avec l'expression « apparente réfractée » puis être utilisé dans l'expression « vraie » pour en extraire D, seule inconnue. C'est une méthode, directe, facilement applicable de nos jours avec une calculette scientifique ordinaire. Il en allait tout autrement au XVIIIe et XIXe siècles où la réduction s'effectuait avec des tables de logarithmes et/ou des tables des valeurs naturelles des rapports trigonométriques ce qui nécessitait une transformation de l'expression ci-dessus pour que la distance soit aisément calculable. D'une manière générale, on ne calculait pas ΔZ et l'étape suivante dans la transformation consistait à écrire, à partir de l'égalité ci-dessus :

$$\cos D = \sin H_{vL} \,.\, \sin H_{vA} + (\cos d - \sin H_{arL} \,.\, \sin H_{arA}) . \frac{\cos H_{vL} \,.\, \cos H_{vA}}{\cos H_{arL} \,.\, \cos H_{arA}}$$

La distance D pourrait être évaluée directement par un calcul semi-logarithmique mais la plupart des chercheurs ont travaillé à établir une formulation soit entièrement logarithmique, c'est-à-dire ne comportant que des produits et des quotients de rapports trigonométriques, soit entièrement algébrique, ne comportant que des sommes ou différences de valeurs naturelles de ces rapports.

Dans l'expression ci-dessus, apparaît un rapport de produit de cosinus. On le retrouvera dans quasiment toutes les formulations directes et on le symbolisera par la lettre K ; outre-Manche, le logarithme de K est ordinairement appelé « logarithmic difference ».

Solution de R. Dunthorne (1766) :

Richard Dunthorne (1711-1775) est astronome et a participé à l'élaboration du Nautical Almanac à partir de 1765. Il est l'auteur d'une solution directe de réduction de la distance observée qui figure dans le Nautical Almanac pour l'année 1767 ainsi que dans celui de l'an 1772.

À partir de la formulation ébauchée ci-dessus et en faisant intervenir les différences des hauteurs, Richard Dunthorne simplifie l'expression puis décompose le logarithme de K en une part variable, fonction des hauteurs vraie et apparente réfractée de la Lune, donc notamment de la parallaxe, et une part qu'il admet comme constante dès lors que l'astre est une étoile et que sa hauteur est supérieure à 25°. Dans le cas où cette hauteur serait inférieure, ou lorsqu'il s'agit d'un astre errant dont la parallaxe n'est pas nulle, une table auxiliaire donnera le terme correctif à ajouter en fonction de la hauteur apparente réfractée de cet astre.

La formule mise au point par R. Dunthorne n'est pas logarithmique ; le calcul de la distance vraie par ce moyen requiert l'emploi d'une table des valeurs naturelles des rapports trigonométriques, d'une table de logarithmes et d'une table spéciale pour évaluer le logarithme de K et l'éventuelle correction de la part constante. Cette table figure dans le Nautical Almanac pour l'an 1767 puis, sous une forme plus étendue, dans les « Tables Requisite to be used with the Nautical Ephemeris for finding Latitude and Longitude at Sea » de Nevil Maskelyne.

Richard Dunthorne est l'auteur d'une autre formulation directe pour réduire la distance. Plus complexe que la précédente, mais utilisant toujours le facteur K, elle sera aussi publiée dans les Tables Requisite.

La première formule de R. Dunthorne est explicitée en annexe 8-1 et un exemple est développé en annexe 8-4.

Solution du chevalier J.-Ch. de Borda (1771-1772) :

Le chevalier Jean-Charles de Borda (1733-1799) fit ses débuts à l'école du Génie à Mézières et pénètre le milieu maritime en 1767, année où il est nommé lieutenant de port à Brest. Scientifique, il est géomètre à l'Académie

royale des sciences puis membre de l'Académie de marine à Brest en 1769. Il participe au voyage scientifique de la frégate *La Flore*, commandée par Verdun de la Crenne, en 1771-1772 en qualité de lieutenant de vaisseau et commissaire de l'Académie royale des sciences. Cette expédition avait pour objectif le test des montres marines de, entre autres, Leroy et Berthoud ainsi que d'un certain nombre d'instruments d'observations : sextants, octants, mégamètre etc. Au cours de ce voyage, la détermination de la longitude par les distances lunaires fut pratiquée de façon intensive et l'ensemble des opérations et calculs a été, dès cette époque, rigoureusement normalisé par J.-Ch. de Borda. L'astronome Edme-Sébastien Jeaurat (1725-1803) en donne la teneur, résumée ci-après, dans la Connaissance des temps pour l'année 1779 (publiée en 1777), de même que Borda lui-même dans la relation[36] du voyage de *La Flore* puis dans son ouvrage[37] relatif au cercle de réflexion.

Comme dans toutes les autres méthodes, la latitude φ du navire est supposée connue ainsi qu'une estimation G_e de sa longitude. Dans l'idéal, 3 observateurs sont requis pour prendre la distance entre la Lune et une étoile ou le Soleil et les hauteurs des deux astres. Il est recommandé de prendre une série de 5 à 6 mesures dans un faible intervalle de temps. Les instants correspondants sont relevés sur une bonne montre calée sur l'heure vraie ou moyenne locale (Tvg ou Tmg). Les opérations successives, indiquées par E.-S. Jeaurat, sont les suivantes.

1. ***Conclure la distance et les hauteurs moyennes observées :***

- faire les moyennes,
- corriger les mesures des erreurs instrumentales,
- corriger les hauteurs de la dépression apparente de l'horizon.

2. ***Conclure la distance apparente du centre des astres observés :***

- rechercher dans la Connaissance des temps la parallaxe horizontale de la Lune et son demi-diamètre ainsi que, le cas échéant celui du Soleil ;
- corriger la distance du (ou des) demi(s)-diamètre(s) pour obtenir la distance apparente réfractée entre centre(s).

3. ***Conclure les hauteurs apparentes et les hauteurs vraies des deux astres :***

- corriger les hauteurs du demi-diamètre pour obtenir les hauteurs apparentes réfractées des centres des astres ;
- effectuer les corrections de réfraction astronomique et de parallaxe en hauteur pour obtenir les hauteurs vraies.

4. ***Conclure la distance vraie du centre des deux astres :***

- J.-Ch. de Borda applique ici une méthode directe dont le principe général d'établissement de la formulation est exposé au début de ce chapitre ;
- la formule est transformée pour ne comporter que des produits ou des quotients de rapports trigonométriques de façon à être calculable aisément par logarithmes ; elle fait l'objet d'un type de calcul imprimé.

5. ***Conclure l'heure du méridien des éphémérides :***

- En 1777, année où ces instructions ont été publiées, la Connaissance des temps donne les distances entre la Lune et le Soleil ainsi que quelques étoiles toutes les 3 heures ; l'heure cherchée (Tmp ou Tvp)

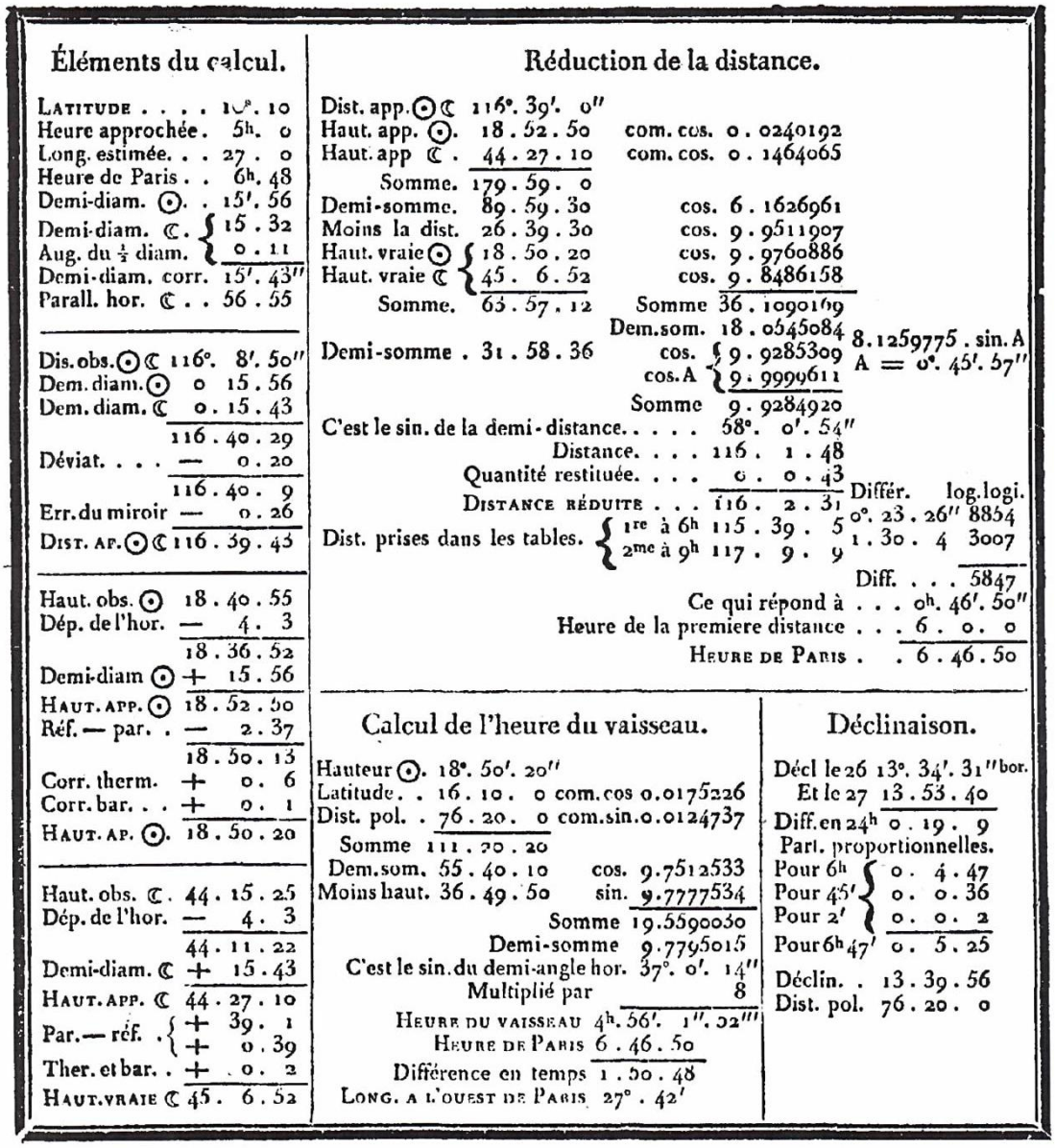
[36] « Voyage fait par ordre du Roi en 1771 et 1772 en diverses parties de l'Europe, de l'Afrique et de l'Amérique pour vérifier l'utilité de plusieurs méthodes & instruments servant à déterminer la latitude et la longitude … » par Verdun de la Crenne, Borda et Pingré. 1778.
[37] « Description et usage du cercle de réflexion avec différentes méthodes pour calculer les observations nautiques » par le chevalier de Borda, 1787.

se calcule par interpolation linéaire pour la distance trouvée entre deux valeurs successives calculées dans l'almanach.

6. *Calcul de l'heure locale et connaissance de la longitude :*

- l'observation du Soleil (ou de l'étoile), si elle est suffisamment précise et éloignée du méridien, peut servir au calcul de l'heure Tvg (ou Tmg) ; si ce n'est pas le cas, il faudra utiliser une observation ultérieure (ou précédente), effectuée dans ce seul but ;
- la longitude s'en déduit immédiatement : G = Tvp – Tvg = Tmp – Tmg.

La procédure de calcul fait l'objet d'un modèle opératoire sous la forme d'une grille de calcul sur lequel l'observateur va inscrire et effectuer les différentes opérations (voir la figure 8-2 ci-dessous extraite de l'ouvrage de J.-Ch. de Borda relatif au cercle de réflexion de 1787).



Éléments du calcul.

Latitude	10°. 10
Heure approchée.	5h. 0
Long. estimée. . .	27 . 0
Heure de Paris . .	6h. 48
Demi-diam. ☉. .	15'. 56
Demi-diam. ☾.	15 . 32
Aug. du ½ diam.	0 . 11
Demi-diam. corr.	15'. 43"
Parall. hor. ☾ . .	56 . 55
Dis. obs. ☉☾	116°. 8'. 50"
Dem. diam. ☉	0 15 . 56
Dem. diam. ☾	0 . 15 . 43
	116 . 40 . 29
Déviat. . . .	— 0 . 20
	116 . 40 . 9
Err. du miroir	— 0 . 26
Dist. ap. ☉☾	116 . 39 . 43
Haut. obs. ☉	18 . 40 . 55
Dép. de l'hor.	— 4 . 3
	18 . 36 . 52
Demi-diam ☉	+ 15 . 56
Haut. app. ☉	18 . 52 . 50
Réf. — par. .	— 2 . 37
	18 . 50 . 13
Corr. therm.	+ 0 . 6
Corr. bar. . .	+ 0 . 1
Haut. ap. ☉.	18 . 50 . 20
Haut. obs. ☾.	44 . 15 . 25
Dép. de l'hor.	— 4 . 3
	44 . 11 . 22
Demi-diam. ☾	+ 15 . 43
Haut. app. ☾	44 . 27 . 10
Par. — réf. .	+ 39 . 1
	+ 0 . 39
Ther. et bar. .	+ 0 . 2
Haut. vraie ☾	45 . 6 . 52

Réduction de la distance.

Dist. app. ☉☾	116°. 39'. 0"		
Haut. app. ☉.	18 . 52 . 50	com. cos.	0 . 0240192
Haut. app ☾ .	44 . 27 . 10	com. cos.	0 . 1464065
Somme.	179 . 59 . 0		
Demi-somme.	89 . 59 . 30	cos.	6 . 1626961
Moins la dist.	26 . 39 . 30	cos.	9 . 9511907
Haut. vraie ☉	18 . 50 . 20	cos.	9 . 9760886
Haut. vraie ☾	45 . 6 . 52	cos.	9 . 8486158
Somme.	63 . 57 . 12	Somme	36 . 1090169
		Dem. som.	18 . 0545084
Demi-somme .	31 . 58 . 36	cos.	9 . 9285309
		cos. A	9 . 9999611
		Somme	9 . 9284920

8.1259775 . sin. A
A = 0°. 45'. 57"

C'est le sin. de la demi-distance. . . . . 58°. 0'. 54"
Distance. . . . 116 . 1 . 48
Quantité restituée. . . . 0 . 0 . 43
Distance réduite . . . 116 . 2 . 31

Dist. prises dans les tables.		Différ.	log. logi.
1re à 6h	115 . 39 . 5	0°. 23 . 26"	8854
2me à 9h	117 . 9 . 9	1 . 30 . 4	3007
		Diff. . . .	5847

Ce qui répond à . . . 0h. 46'. 50"
Heure de la premiere distance . . . 6 . 0 . 0
Heure de Paris . . 6 . 46 . 50

Calcul de l'heure du vaisseau.

Hauteur ☉.	18°. 50'. 20"		
Latitude. .	16 . 10 . 0	com. cos	0.0175226
Dist. pol. .	76 . 20 . 0	com. sin.	0.0124737
Somme	111 . 20 . 20		
Dem. som.	55 . 40 . 10	cos.	9.7512533
Moins haut.	36 . 49 . 50	sin.	9.7777534
		Somme	19.5590030
		Demi-somme	9.7795015
C'est le sin. du demi-angle hor.			37°. 0'. 14"
Multiplié par			8
Heure du vaisseau			4h. 56'. 1". 52'''
Heure de Paris			6 . 46 . 50
Différence en temps			1 . 50 . 48
Long. a l'ouest de Paris			27° . 42'

Déclinaison.

Décl le 26	13°. 34'. 31" bor.
Et le 27	13 . 53 . 40
Diff. en 24h	0 . 19 . 9
Part. proportionnelles.	
Pour 6h	0 . 4 . 47
Pour 45'	0 . 0 . 36
Pour 2'	0 . 0 . 2
Pour 6h 47'	0 . 5 . 25
Déclin. .	13 . 39 . 56
Dist. pol.	76 . 20 . 0

Fig : 8-2

Le type de calcul ci-dessus appelle les explications et commentaires suivants :

- en haut à gauche figurent les éléments de calcul extraits des données de navigation et de la Connaissance des temps pour une heure de Paris approchée de la série d'observations ; on remarquera que le demi-diamètre de la Lune donné par la Connaissance des temps, pour le centre de la Terre, est corrigé pour être ramené à sa surface (voir annexe 1-2) ;
- en 2e position, à gauche, figure le calcul de détermination de la distance apparente réfractée entre les centres des deux astres par ajout des demi-diamètres et correction de déviation de la visée résultante lorsqu'elle n'est pas prise selon l'axe optique de la lunette mais légèrement décalée ; on effectue ensuite la correction de l'erreur du miroir résultant du fait que les faces étamée et nue du miroir ne sont pas parallèles (prismaticité) ;
- on trouve ensuite en 3e et 4e positions les calculs de correction des hauteurs observées du Soleil et de la Lune ; on remarquera la présence des corrections thermométrique et barométrique de la réfraction astronomique (voir annexe 1-2) ;
- dans le grand espace du haut à droite du type de calcul, on trouve tout d'abord le calcul logarithmique, selon la formule établie en annexe 8-2 ; ce calcul donne la distance vraie réduite ; il est suivi de celui de l'heure de Paris, par interpolation linéaire entre les distances données par la Connaissance des temps à 6 h et à 9 h à l'aide de logarithmes logistiques ou proportionnels (voir annexe 7-6) ;
- la déclinaison du Soleil est calculée à partir des données de la Connaissance des temps pour l'heure de Paris obtenue ci-dessus ; ce calcul figure en bas à droite ;
- enfin, en bas au milieu, figure le calcul logarithmique de l'heure vraie locale, à partir de l'observation du Soleil, à l'aide de la formule de Borda indiquée en annexe 3-1 ; le calcul est suivi de celui de la longitude.

L'ensemble des opérations, que l'on a décrit très succinctement ci-dessus, fait l'objet d'explications claires et détaillées par J.-Ch. de Borda dans son ouvrage relatif au cercle de réflexion.

Dans ses différents écrits, J.-Ch. de Borda prévoit – et explicite – le cas où l'observateur est seul. Il indique également comment procéder pour traiter les distances entre la Lune et une étoile observées de nuit, sans pouvoir mesurer les hauteurs. Il conviendra alors de prévoir l'opération en fin d'après-midi en observant le Soleil pour déterminer l'heure vraie locale et trouver l'avance ou le retard de la montre utilisée ; on tiendra ensuite une estime rigoureuse pour connaître le chemin parcouru en longitude jusqu'à l'instant de mesure des distances. On calculera, pour cet instant, les coordonnées horaires de la Lune et de l'étoile (angle horaire local et déclinaison) à l'aide de la Connaissance des temps puis les hauteurs vraies et apparentes réfractées. La suite des opérations est identique à ce qui a été indiqué plus haut.

Le détail de la formulation élaborée par J.-Ch. de Borda est indiqué en annexe 8-2. On remarque la complexité apparente de la formule mais, en revanche, on notera que celle-ci est entièrement logarithmique et que son exécution ne fait appel à aucune règle de signe ; le calcul s'effectue ainsi avec une simple table des logarithmes des rapports trigonométriques à 6 ou 7 décimales.

Jean-Charles de Borda a non seulement normalisé la procédure de calcul de la longitude par l'observation des distances lunaires mais il a aussi perfectionné l'instrument de mesure angulaire, en l'occurrence le cercle de réflexion mis au point en 1752 par l'astronome Tobias Mayer. Sans rentrer dans les détails, le cercle perfectionné sous la direction de Borda entre 1774 et 1776 permet d'effectuer une série de n distances, en nombre pair, et de lire en fin d'observation de la série l'angle correspondant à la somme de ces n distances. Une division par n donnera la distance observée à utiliser. On minimise ainsi les effets des erreurs aléatoires et des imperfections des graduations et de centrage dès lors que l'arc total décrit par l'alidade du cercle est voisin de 360° (soit un angle total lu de l'ordre de 720°).

Solutions de Ch. Romme (1789) et de J.-B. Delambre (fin XVIIIe siècle) :

Charles Romme (1745-1805) était professeur de mathématiques et de navigation à Rochefort. Il présente dans la Connaissance des Temps pour l'année 1789 une formule de calcul dont la mise en équation initiale est identique à celle de Borda, Ch. Romme utilisant les distances zénithales à la place des hauteurs. Les transformations successives conduisent à déterminer la distance par différence entre des valeurs naturelles des cosinus. S'agissant d'une variante de la formule de Borda, on en trouvera l'expression en annexe 8-2.

L'astronome et mathématicien Jean-Baptiste Delambre (1749-1822) élabora également une formule de calcul de la distance vraie. Elle est équivalente à celle de Charles Romme en utilisant les hauteurs et figure également en annexe 8-2.

Solutions de W.- L. Krafft (1791) et J. de Mendoza y Rios (1796) ; variante de J. Garnett :

Wolfgang-Ludwig Krafft (1743-1814), astronome allemand, et Josef de Mendoza y Rios (1761-1816), officier de la marine royale espagnole, définissent un arc auxiliaire θ tel que :

$$2.\cos\theta = K$$

K étant le rapport de produit de cosinus voisin de l'unité défini au début de ce chapitre. Ceci étant posé, et en suivant une même démarche, Krafft et Mendoza transforment l'expression donnant la distance vraie en une somme de valeurs naturelles des rapports trigonométriques verses, sinus verse (versine) et susinus verse (suversine). Ainsi, après avoir évalué l'arc auxiliaire θ, la distance vraie peut être calculée par une simple somme algébrique.

Pour faciliter le calcul, J. de Mendoza y Rios a conçu les « Tables for facilitating the Calculations of Nautical Astronomy » qui donnent, entre autres, les valeurs naturelles dont on a besoin et permettent le calcul de l'arc auxiliaire θ. Les tables IX et X qui facilitent ce calcul sont de conception identique à celles conçues par Dunthorne. Les tables de Mendoza y Rios furent publiées à Londres en 1801 et adaptées en France par le commandant Richard sous le titre de « Principales tables de Mr. de Mendoza » et publiées en 1844.

L'utilisation des distances zénithales par Krafft, en lieu et place des hauteurs utilisées par Mendoza, permet de n'utiliser que la fonction versine. Sous cette forme, la formule fut « récupérée » en 1821 par J. Inman qui mettra en table l'arc auxiliaire θ.

À la même époque, l'astronome John Garnett (1748 ou 1751-1820) modifie la formule obtenue par Mendoza, tout en gardant l'emploi des rapports trigonométriques verses. Pour établir la formule dont il est l'auteur, il emploie, comme Krafft, les distances zénithales en lieu et place des hauteurs puis défini un facteur F = 1 – K et n'utilise que la seule fonction versine pour effectuer le calcul. L'emploi de cette formule est commode si on dispose d'une table des versines ainsi que d'une table donnant le facteur F en fonction de la hauteur apparente réfractée de la Lune et de sa parallaxe horizontale. La méthode requiert un minimum d'opérations mais, on relève qu'il faut effectuer deux soustractions – souvent source d'erreur – et un produit qu'il est conseillé d'effectuer par multiplication abrégée.

Les méthodes sont explicitées en annexe 8-3, un exemple étant traité en annexe 8-4.

Solution d'A. Mackay (1793/1801) :

Le mathématicien et astronome écossais Andrew Mackay (1760-1809) est l'auteur de « Theory and Practice of finding Longitude » ; une première édition parait en 1793, suivie d'une seconde en 1801. Dans cet ouvrage, six méthodes de réduction de distance lunaire sont proposées, dont trois directes. La première est celle de J. Garnett, la seconde est une variante de la solution de Borda et la troisième résulte d'une transformation de la formule

générale n'utilisant que les rapports trigonométriques verse, versines et suversines, sous une forme semi-logarithmique.

Commentaires :

Il convient tout d'abord de faire remarquer que nous n'avons explicité ci-dessus que quelques-unes des solutions directes mises au point à la fin du XVIIIe siècle ; J. de Mendoza y Rios avait dénombré quarante écritures possibles de la formule de base[38] !

À nombre de décimales égal dans les calculs, les méthodes directes donnent toutes la distance vraie avec le même niveau de précision (sauf peut-être dans quelques cas limites où certaines solutions peuvent être plus précises que d'autres) ; d'une manière générale, il faudra travailler avec 6 décimales, pour les logarithmes comme pour les valeurs naturelles. Les solutions analysées ici sont d'exécution plus ou moins longue ; deux d'entre elles nous ont paru particulièrement intéressantes : celle de R. Dunthorne et celle de J. Garnett. Toutes deux sont précises, malgré une légère approximation sur les facteurs K ou F, et relativement expéditives si l'on dispose d'une table donnant accès à l'un ou l'autre de ces facteurs. Ces formules ne sont pas logarithmiques, ce qui a pu leur être reproché, mais ne sont finalement guère plus difficiles à « descendre » que la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique. La recherche d'une formule logarithmique conduit à une solution du type Borda qui est, il faut bien le reconnaître, relativement compliquée ; en revanche, un bon entraînement permet d'acquérir des automatismes de calcul et de limiter le feuilletage de la table de logarithmes. Ajoutons que l'exécution de la formule de Borda ne fait appel à aucune table auxiliaire, qu'elle est exempte de toute règle de signe et que le mode opératoire est exposé par son auteur avec un rare sens pédagogique dans son ouvrage relatif au cercle de réflexion. L'utilisation exclusive des valeurs naturelles et de sommes arithmétiques conduit à des solutions du type Mendoza et Krafft, après détermination nécessaire du facteur K.

[38] « Recherches sur les principaux problèmes de l'astronomie nautique », Philosophical Transactions n° 87, 1797.

ANNEXES AU CHAPITRE 8

ANNEXE 8-1

FORMULE DE R. DUNTHORNE

Dans le texte, on a donné la formule générale qui donne la distance vraie D en fonction de la distance apparente d et des hauteurs apparentes réfractées et vraies des deux astres :

$$\cos D = \sin H_{vL} . \sin H_{vA} + (\cos d - \sin H_{arL} . \sin H_{arA}).\frac{\cos H_{vL} . \cos H_{vA}}{\cos H_{arL} . \cos H_{arA}}$$

On écrit ensuite que :

$$\sin H_{vL} . \sin H_{vA} = \cos(H_{vL} - H_{vA}) - \cos H_{vL} . \cos H_{vA} \quad \text{et} \quad \sin H_{arL} . \sin H_{arA} = \cos(H_{arL} - H_{arA}) - \cos H_{arL} . \cos H_{arA}$$

Remplaçant les produits de sinus par leurs équivalents, on obtient, tous calculs faits :

$$\cos D = \cos(H_{vL} - H_{vA}) - [\cos(H_{arL} - H_{arA}) - \cos d].\frac{\cos H_{vL} . \cos H_{vA}}{\cos H_{arL} . \cos H_{arA}}$$

On pose enfin :

$$K = \frac{\cos H_{vL} . \cos H_{vA}}{\cos H_{arL} . \cos H_{arA}}$$

Et on a l'écriture finale :

$$\cos D = \cos(H_{vL} - H_{vA}) - [\cos(H_{arL} - H_{arA}) - \cos d].K$$

K est un nombre voisin de l'unité puisque les hauteurs vraies et apparentes réfractées sont voisines. K peut se décomposer en une somme de deux termes :

$$K_1 = \frac{\cos H_{vL}}{\cos H_{arL}} \quad \text{et} \quad K_2 = \frac{\cos H_{vA}}{\cos H_{arA}}$$

K_1, ou plutôt son logarithme, peut facilement se mettre en table en fonction de la hauteur apparente réfractée de la Lune et de la parallaxe horizontale.

K_2 est très voisin de l'unité et peut être admis comme étant constant dès lors que la parallaxe de l'astre est nulle et sa hauteur supérieure à une vingtaine de degrés. En effet, si on note y la différence, en radians, entre hauteurs vraie et apparente réfractée, on vérifie que ce rapport est égal à :

$$K_2 = 1 + y.\tan H_{arA} - \frac{y^2}{2}$$

L'expression couramment admise au XVIIIe siècle de la réfraction astronomique est y = 0,95'.cot H_{arA}. Le terme du second degré étant négligeable pour une hauteur supérieure à 25°, on obtient, pour l'observation d'une étoile, la constante K_2 = 1,000276 dont le logarithme est égal à 0,000120.

Si l'astre considéré est le Soleil dont la parallaxe horizontale est d'environ 9'' et/ou si la hauteur est inférieure à 25°, une courte table donne la correction à apporter au logarithme de K_2 pris égal à 0,000120.

ANNEXE 8-2

FORMULES DE J.-Ch. DE BORDA, Ch. ROMME, J.-B. DELAMBRE

Une première transformation de l'égalité de départ amène à :

$$\cos D + \cos(H_{vL} + H_{vA}) = [\cos d + \cos(H_{arL} + H_{arA})].K$$

avec

$$K = \frac{\cos H_{vL}}{\cos H_{arL}} . \frac{\cos H_{vA}}{\cos H_{arA}}$$

En utilisant les transformations de somme en produit, on obtient :

$$\cos D + \cos(H_{vL} + H_{vA}) = 2K.\cos\left(\frac{H_{arL} + H_{arA} + d}{2}\right).\cos\left(\frac{H_{arL} + H_{arA} - d}{2}\right)$$

En utilisant les formules du type : $\cos x = 1 - 2.(\sin x/2)^2 = 2.(\cos x/2)^2 - 1$, on arrive à :

$$2 - 2.\left(\sin\frac{D}{2}\right)^2 - 2.\left(\sin\frac{H_{vL} + H_{vA}}{2}\right)^2 = 2K.\cos\left(\frac{H_{arL} + H_{arA} + d}{2}\right).\cos\left(\frac{H_{arL} + H_{arA} - d}{2}\right)$$

$$\left(\sin\frac{D}{2}\right)^2 = \left(\cos\frac{H_{vL} + H_{vA}}{2}\right)^2 - K.\cos\left(\frac{H_{arL} + H_{arA} + d}{2}\right).\cos\left(\frac{H_{arL} + H_{arA} - d}{2}\right)$$

On pose alors[39] :

$$(\sin\alpha)^2 = \frac{K}{\left[\cos\left(\frac{H_{vL} + H_{vA}}{2}\right)\right]^2}.\cos\left(\frac{H_{arL} + H_{arA} + d}{2}\right).\cos\left(\frac{H_{arL} + H_{arA} - d}{2}\right)$$

L'expression devient :

$$\left(\sin\frac{D}{2}\right)^2 = \left(\cos\frac{H_{vL} + H_{vA}}{2}\right)^2 - (\sin\alpha)^2.\left(\cos\frac{H_{vL} + H_{vA}}{2}\right)^2$$

Soit en définitive :

$$\sin\frac{D}{2} = \cos\alpha.\cos\frac{H_{vL} + H_{vA}}{2}$$

La formulation est ainsi entièrement logarithmique puisque composée uniquement de produits et de quotients de lignes trigonométriques.

En examinant le type de calcul reproduit en figure 8-2, on remarquera que le facteur K n'apparaît pas ; la formule est ainsi entièrement déclinée. Ci-dessus, la notation K constitue une simplification dans les écritures.

Il existe plusieurs variantes de la formulation mise au point par Borda ; en France, et à la fin du XVIIIe siècle, on peut retenir celle de Charles Romme (1745-1805), professeur de mathématiques et de navigation à Rochefort, qui utilise les distances zénithales à la place des hauteurs et définit un arc auxiliaire Q tel que :

$$\cos Q = 2K.\sin\left(\frac{d + N_{arL} + N_{arA}}{2} - N_{arL}\right).\sin\left(\frac{d + N_{arL} + N_{arA}}{2} - N_{arA}\right)$$

Il calcule ensuite la distance vraie par :

$$\cos D = \cos(N_{vL} - N_{vA}) - \cos Q$$

[39] Dans le type de calcul reproduit en figure 8-2, l'arc α est noté A.

Un équivalent, avec les hauteurs, est la formule de Jean-Baptiste Delambre qui s'écrit :

$$\cos D = 2.K.\cos\left(\frac{H_{arL} + H_{arA} + d}{2}\right).\cos\left(\frac{H_{arL} + H_{arA} - d}{2}\right) - \cos(H_{vL} + H_{arA})$$

ANNEXE 8-3

EMPLOI DES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES VERSES

FORMULES DE W.-L. KRAFFT, J. DE MENDOZA Y RIOS, J. GARNETT

Rappelons l'égalité de départ sur laquelle sont fondées toutes les méthodes directes :

$$\frac{\cos D - \sin H_{vL}.\sin H_{vA}}{\cos H_{vL}.\cos H_{vA}} = \frac{\cos d - \sin H_{arL}.\sin H_{arA}}{\cos H_{arL}.\cos H_{arA}}$$

Ajoutant 1 dans chacun des deux membres de l'égalité et réduisant au même dénominateur, on obtient après réduction :

$$\frac{\cos D + \cos(H_{vL} + H_{vA})}{\cos H_{vL}.\cos H_{vA}} = \frac{\cos d + \cos(H_{arL} + H_{arA})}{\cos H_{arL}.\cos H_{arA}}$$

$$\cos D + \cos(H_{vL} + H_{vA}) = [\cos d + \cos(H_{arL} + H_{arA})].\frac{\cos H_{vL}.\cos H_{vA}}{\cos H_{arL}.\cos H_{arA}}$$

W.-L. Krafft et J. Mendoza y Rios posent ensuite :

$$2.\cos\theta = K = \frac{\cos H_{vL}.\cos H_{vA}}{\cos H_{arL}.\cos H_{arA}}$$

D'où :

$$\cos D + \cos(H_{vL} + H_{vA}) = 2.\cos d.\cos\theta + 2.\cos(H_{arL} + H_{arA}).\cos\theta$$

Les produits de cosinus du membre de droite sont ensuite réduits en somme. Il apparait alors que l'expression n'est constituée que de cosinus que l'on remplace par les lignes trigonométriques verses dont on rappelle les expressions :

$$\mathrm{vers}(x) = 1 - \cos x \quad ; \quad \mathrm{suvers}(x) = \mathrm{vers}(180° - x) = 1 + \cos x$$

Il vient alors :

$$\mathrm{vers}(D) = \mathrm{vers}(d + \theta) + \mathrm{vers}(d - \theta) + \mathrm{vers}(H_{arL} + H_{arA} + \theta) + \mathrm{vers}(H_{arL} + H_{arA} - \theta) + \mathrm{suvers}(H_{vL} + H_{vA}) - 4$$

qui est la formule établie par J. de Mendoza y Rios.

N désignant les distances zénithales, Krafft établit de son côté :

$$\mathrm{vers}(D) = \mathrm{vers}(d + \theta) + \mathrm{vers}(d - \theta) + \mathrm{vers}(H_{arL} + H_{arA} + \theta) + \mathrm{vers}(H_{arL} + H_{arA} - \theta) + \mathrm{vers}(N_{vL} + N_{vA}) - 4$$

L'arc auxiliaire θ est prévu être calculé à l'aide de tables spécifiques. La distance vraie est ensuite calculée grâce à une simple table des lignes trigonométriques naturelles verses.

La formulation mise au point par l'astronome John Garnett est voisine de celle qui vient d'être établie ; il utilise les distances zénithales en lieu et place des hauteurs. À partir de l'égalité de départ il arrive à :

$$\frac{\text{vers}(D) - \text{vers}(N_{vL} - N_{vA})}{\sin N_{vL}.\sin N_{vA}} = \frac{\text{vers}(d) - \text{vers}(N_{arL} - N_{arA})}{\sin N_{arL}.\sin N_{arA}}$$

$$\text{vers}(D) = \text{vers}(N_{vL} - N_{vA}) + [\text{vers}(d) - \text{vers}(N_{arL} - N_{arA})].\frac{\sin N_{vL}.\sin N_{vA}}{\sin N_{arL}.\sin N_{arA}}$$

il pose alors :

$$\frac{\sin N_{vL}.\sin N_{vA}}{\sin N_{arL}.\sin N_{arA}} = K = 1 - F$$

L'équation s'écrit enfin :

$$\text{vers}(D) = \text{vers}(N_{vL} - N_{vA}) + M - F.M \quad \text{avec} \quad M = \text{vers}(d) - \text{vers}(N_{arL} - N_{arA})$$

Le facteur F se détermine, comme l'arc auxiliaire θ, à l'aide de deux tables, le produit F.M étant effectué par multiplication abrégée.

ANNEXE 8-4

EXEMPLE DE CALCUL

Les données sont celles de l'exemple figurant au chapitre 4. Les éléments utiles sont résumés dans le tableau ci-dessous :

Lune	Aldébaran
Hauteur apparente réfractée : H_{arL} = 26° 55' 30'' Hauteur vraie : H_{vL} = 27° 42' 06''	Hauteur apparente réfractée : H_{arA} = 47° 56' 18'' Hauteur vraie : H_{vA} = 47° 55' 25''
Distance apparente réfractée $L_{ar}A_{ar}$ = d = 25° 11' 12''	

Formule de Dunthorne :

A	$\cos(H_{vL} - H_{vA}) =$	0,938361
B	$\cos(H_{arL} - H_{arA}) - \cos d =$	0,028571
K	$\frac{\cos H_{vL}.\cos H_{vA}}{\cos H_{arL}.\cos H_{arA}} =$	0,993307
A – KB	$\cos D =$	0,909981
	$D =$	24° 29' 50"

Formule de Borda :

A	$\cos\frac{H_{arL}+H_{arA}+d}{2}=$	0,642453
B	$\cos\frac{H_{arL}+H_{arA}-d}{2}=$	0,907497
C	$\cos\frac{H_{vL}+H_{vA}}{2}=$	0,790020
K	$\frac{\cos H_{vL}\,.\cos H_{vA}}{\cos H_{arL}.\cos H_{arA}}=$	0,993307
E	$\frac{A.B.K}{C^2}=$	0,927884
$\sqrt{E}$	$\sin\alpha=$	0,963268
	$\alpha=$	74,422389°
	$\sin\frac{D}{2}=C.\cos\alpha=$	0,212155
	$D=$	24° 29' 50''

Formule de Mendoza :

K	$\frac{\cos H_{vL}\,.\cos H_{vA}}{\cos H_{arL}.\cos H_{arA}}=$	0,993307
θ	$\cos^{-1}\frac{K}{2}$	60,221157°
U	$\mathrm{vers}(d+\theta)=$	0,919937
V	$\mathrm{vers}(d-\theta)=$	0,181193
W	$\mathrm{vers}(H_{arL}+H_{arA}+\theta)=$	1,708149
X	$\mathrm{vers}(H_{arL}+H_{arA}-\theta)=$	0,032477
Y	$\mathrm{suvers}(H_{vL}+H_{vA})=$	1,248263
Z	$\mathrm{vers}(D)=U+V+W+X+Y-4$	0,090019
	$D=$	24° 29' 50''

Formule de Garnett :

K	$\frac{\cos H_{vL}\,.\cos H_{vA}}{\cos H_{arL}.\cos H_{arA}}=$	0,993307
F	$1-K=$	0,006693
T	$\mathrm{vers}(N_{vL}-N_{vA})=$	0,061639
M	$\mathrm{vers}(d)-\mathrm{vers}(N_{arL}-N_{arA})$	0,028571
Z	$\mathrm{vers}(D)=T+M-F.M=$	0,090019
	$D=$	24° 29' 50''

CHAPITRE 9

LES APPORTS DU XIXe SIÈCLE

Concernant la détermination de la longitude en mer par la mesure de distances lunaires, l'essentiel a été mis au point au cours de la seconde moitié du XVIIIe siècle, qu'il s'agisse de l'instrumentation, de la publication de distances lunaires pré-calculées ainsi que des formulations pour réduire les distances issues des mesures. Mis à part les évolutions dans la théorie des mouvements de la Lune, il n'y aura donc pas, dans le domaine de la détermination de la longitude en mer à l'aide de la Lune, d'avancée fondamentale au cours de XIXe siècle et les recherches viseront essentiellement à tenter de simplifier les calculs, par manipulation des formules et conception de tables spécifiques. Ce chapitre est dévolu à l'exposé d'une douzaine de méthodes, essentiellement indirectes, choisies parmi les plus courantes ou originales.

Solutions de J. H. Moore (1799), J. Elford (1810), J.-W. Norie (1815), D. Thomson (1824) et J. Taylor (vers 1833) :

Ces différents auteurs mirent chacun au point une expression de la correction δ à apporter à la distance apparente réfractée d pour obtenir la distance vraie D sous la forme d'une somme algébrique de trois à quatre termes.

John Hamilton Moore (1738-1807) est un professeur de navigation écossais, également hydrographe, cartographe et éditeur de cartes. Dans la version américaine de son traité publiée en 1799 aux États-Unis, « The Practical Navigator being an Epitome of Navigation », il indique une méthode indirecte de réduction dans laquelle les termes du premier degré de la réduction sont calculés par logarithmes, le terme prépondérant du second degré étant donné par deux entrées successives dans une courte table. Comme on le verra au chapitre suivant, Nathaniel Bowditch poursuivra dans son propre traité l'œuvre de J. H. Moore et reprendra in-extenso sa méthode de réduction. Dans la suite de cette étude, on qualifiera la formule et ses variantes de « formule ou méthode générique » car on la retrouve chez de nombreux auteurs sans pouvoir lui attribuer précisément une paternité. La formule et ses variantes sont explicitées en annexe 9-1 ci-après, accompagnée d'un exemple en annexe 9-7.

James Elford, capitaine de la marine marchande américain, publia en 1810 un opuscule contenant une courte table et une méthode de calcul pour réduire les distances : « Longitude Tables for correcting the Distances of the Sun and Moon … ». La table permet d'évaluer la correction du premier ordre consécutive aux effets de la réfraction astronomique sur les deux astres. C'est une courte table à triple argument – hauteurs apparentes réfractées de la Lune et de l'astre et distance – de conception assez grossière accompagnée d'une table d'interpolation. Les deux autres termes correctifs sont fonction de la parallaxe horizontale de la Lune, de la distance et des hauteurs apparentes réfractées ; ils se calculent par logarithmes, sans le recours à une table spécifique. En définitive, James Elford ne tient compte que des termes du premier ordre (ou du premier degré) constitutifs de l'expression de la correction δ.

John William Norie (1772-1843), auteur du célèbre « New and Complete Epitome of Navigation » publia en 1815 un opuscule consacré à la réduction des distances lunaires « A Set of Linear Tables for correcting the apparent Distance ». Dans cet ouvrage, il propose :

- d'évaluer la correction de distance due à la réfraction astronomique à l'aide d'un jeu d'abaques construits pour des valeurs de distance apparente réfractée fixées et dans lesquels les arguments d'entrée sont les hauteurs apparentes réfractées des deux astres ;
- de calculer par logarithmes les termes principaux du premier ordre,
- de trouver le terme prépondérant du second ordre, fonction de la parallaxe de la Lune, à l'aide d'une table figurant dans son « Epitome ».

Par rapport à la solution conçue par J. Elford, J. W. Norie remplace la première table par un jeu d'abaques autorisant une évaluation précise de la correction de réfraction astronomique. Il permet enfin le calcul du terme prépondérant du second ordre selon une formulation identique à celle élaborée par I. Lyons ; on peut regretter que la table nécessaire à ce dernier calcul, qui n'occupe que deux pages, ne figure pas dans l'opuscule. Le « Set of Linear Tables » comporte par contre deux courtes tables supplémentaires, l'une pour le calcul de la parallaxe en hauteur de la Lune, l'autre pour corriger la distance des effets de la parallaxe du Soleil. L'ouvrage ne sera ni réédité ni intégré au célèbre « Epitome » de J. W. Norie. La méthode, utilisant les « Linear Tables », sera par contre explicitée dans l'ouvrage.

Le capitaine David Thomson publia en 1824 des tables pour faciliter divers calculs de navigation dont la réduction des distances lunaires : « Lunar and Horary Tables for new and concise Methods of performing the Calculations necessary for ascertaining the Longitude by Lunar Observations or Chronometer ». Ces tables permettent :

- le calcul par logarithmes des termes du premier ordre fonction de la seule parallaxe de la Lune sous le nom de 1re et 2e correction,
- de trouver une 3e correction en fonction de la distance et des hauteurs apparentes réfractées.

Cette 3e correction est donnée par une table à triple argument ; elle est calculée en prenant une valeur moyenne de la parallaxe horizontale de la Lune (57,5') ainsi que des corrections moyennes de réfraction R_A er R_L, fonction simple des hauteurs apparentes réfractées. Selon l'analyse faite par Jan Kalivoda[40], l'erreur de cette 3e correction est de l'ordre de 2 secondes d'arc en moyenne, pouvant atteindre dans certains cas défavorables 5 à 6 secondes. Pour calculer sa table, D. Thomson aurait procédé par différences entre distance apparente réfractée corrigée des deux premières corrections et distance vraie calculée à partir des hauteurs vraies. Cette 3e correction, calculée pour une étoile dans des circonstances moyennes, représente la somme algébrique des termes du développement où les réfractions apparaissent au premier (et au second degré ?) et où la parallaxe de la Lune apparaît au second degré ; dans le cas où l'astre serait le Soleil, une table annexe donne la correction supplémentaire due à sa parallaxe. La construction de cette table aurait demandé le calcul et l'interpolation d'une impressionnante quantité de distances[41]. Les « Lunar and Horary Tables » de D. Thomson constituent un ouvrage d'environ 200 pages contenant des explications détaillées et de nombreuses tables permettant de résoudre les problèmes courants de navigation. La table donnant la 3e correction occupe une cinquantaine de pages. Ces tables eurent un succès immédiat, tout particulièrement dans la marine marchande, et durent être rééditées dès l'année suivante. Elles firent ensuite l'objet de très nombreuses réimpressions et rééditions (la 67e édition parait en 1880). Elles furent également copiées, notamment dans le Bowditch (voir au chapitre suivant). Un exemple de la formulation de D. Thomson est traité en annexe 9-7.

Janet Taylor (1804-1870), astronome, directrice d'une école de navigation et manufacturière d'instruments de navigation, est l'auteur d'ouvrages d'astronomie nautique et de tables de navigation. Au début des années 1830, elle publia « Lunar Tables by which the true Distance is obtained from the apparent Altitudes ». L'ouvrage comporte 5 tables permettant de réduire la distance apparente réfractée, les trois premières étant des tables de logarithmes permettant de calculer les termes du premier ordre. La 4e table donne, globalement, l'effet de la réfraction astronomique et le résidu d'ordre supérieur qui est évalué à l'aide des « Cambridge Tables » ; avec des intervalles d'argumentation un peu différents, cette dernière table est équivalente à celle donnant le 3e terme de la correction présentée par D. Thomson. La dernière table donne une correction supplémentaire consécutive à la parallaxe du Soleil.

[40] "Classification of the methods for clearing the lunar distances", série d'échanges sur le blog "NavList" en avril 2003.
[41] Selon le professeur Richard de Grijs, ce fait ne serait pas avéré.

Solution de Bremicker (vers 1850) :

Cette solution est exposée dans le « Traité d'astronomie sphérique et d'astronomie pratique » de Franz Brünnow (1821-1891) dont la première édition est parue en Allemagne en 1851 ; elle est due à l'astronome allemand Bremicker. La traduction anglaise de l'ouvrage fut publiée en 1864 et la traduction française en 1869.

La démarche suivie est nouvelle et s'apparente plutôt à une méthode directe dans laquelle on pratique une approximation du fait de la petitesse de certains termes. L'astronome part de la formule exacte établie par R. Dunthorne et utilise des transformations élémentaires de la formule pour arriver à une expression exacte dans laquelle ne figurent que les sinus de combinaisons des différents arcs. Il procède ensuite aux approximations usuelles en substituant aux sinus des petits arcs leurs expressions respectives en radians. On arrive ainsi à une formule relativement simple qu'il faudra calculer par approximations successives.

La formule de Bremicker est explicitée en annexe 9-2, suivie d'un exemple en annexe 9-7.

Solution de W. Chauvenet (1855) :

William Chauvenet (1820-1870), astronome américain d'origine française, part des deux équations donnant l'angle en Z (figure 8-1) en fonction des trois côtés des triangles sphériques ZAL et $ZA_{ar}L_{ar}$. Après un long développement, il obtient une première expression, exacte, dans laquelle δ, correction à apporter à la distance apparente d pour obtenir la distance vraie D, est la seule inconnue. Dans cette expression, quatre coefficients sont des fonctions des hauteurs apparentes réfractées, de la réfraction astronomique et des parallaxes. Des approximations sont alors posées du fait de la petitesse (en radians) de δ et des différents termes correctifs permettant de transformer à nouveau la formule : la correction δ apparaît alors comme étant la somme de 5 termes dont les 4 premiers se calculent par logarithmes à quatre décimales ainsi qu'à l'aide de tables particulières en fonction des différents paramètres dont ils dépendent ; le dernier terme est obtenu par approximations à l'aide d'une cinquième table.

D'autres tables, mises au point par W. Chauvenet, permettent aussi de tenir compte de la forme ellipsoïdale de la Terre, des effets de la température et de la pression dans l'évaluation des corrections de réfraction astronomique et de l'ellipticité apparente des disques lunaire et solaire.

De toute évidence, W. Chauvenet est conscient de la complexité de la solution qu'il propose ; dans l'introduction du chapitre consacré aux distances lunaires, dans son ouvrage d'astronomie[42], il laisse le choix, notamment aux marins, d'un recours à une méthode plus brève tout en attirant l'attention sur la notion de précision.

La formulation élaborée par W. Chauvenet est explicitée en annexe 9-2, suivie d'un exemple en annexe 9-7.

Solution de H. Raper et de Ch. Shadwell (1858-1860) :

Il semblerait que la présente solution ait été trouvée par Henry Raper (1799-1859), officier de la Royal Navy et auteur, en 1840, d'un célèbre traité de navigation « The Practice of Navigation and Nautical Astronomy ». Elle fait l'objet d'un mémoire figurant dans le n° 9 du 18e volume[43] (1858) des Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. Charles Shadwell (1814-1886), également officier de la Royal Navy, reprit ensuite l'idée, en lui apportant quelques perfectionnements sous forme de tables de calcul complémentaires. Les résultats de ces travaux furent publiés par Ch. Shadwell en 1860 sous le titre de « Tables for facilitating the Reduction of Lunar Observations ».

[42] "Spherical and Practical Astronomy" 1863.
[43] Nous n'avons pas pu consulter le mémoire.

Pour établir sa formulation, H. Raper définit un trièdre trirectangle direct dont le centre O est celui de la Terre. L'axe Oz (figure 9-1) est confondu avec la verticale du lieu d'observations Z et le plan défini par les axes Ox et Oy est celui de l'horizon vrai du lieu. Sur la figure, on porte les images des positions vraies de la Lune L et de l'astre A. On peut ainsi marquer sur la figure (qui n'est pas à l'échelle) la distance vraie D, l'angle entre la Lune et l'astre vu du centre de la Terre et la distance parallactique d', angle entre les positions vraies de ces deux astres vu par l'observateur en Z. On note les parallaxes en hauteur ϖ_A et ϖ_L de l'astre et de la Lune.

La première étape, dans la solution Raper-Shadwell, consiste à corriger la distance apparente réfractée d des effets de la réfraction astronomique pour obtenir la distance parallactique d', ce qui impose de déterminer les angles à l'astre et à la Lune α et β. L'étape suivante consiste à exprimer, à partir d'un raisonnement analytique, la distance vraie D en fonction de la distance parallactique d', des parallaxes et des hauteurs vraies.

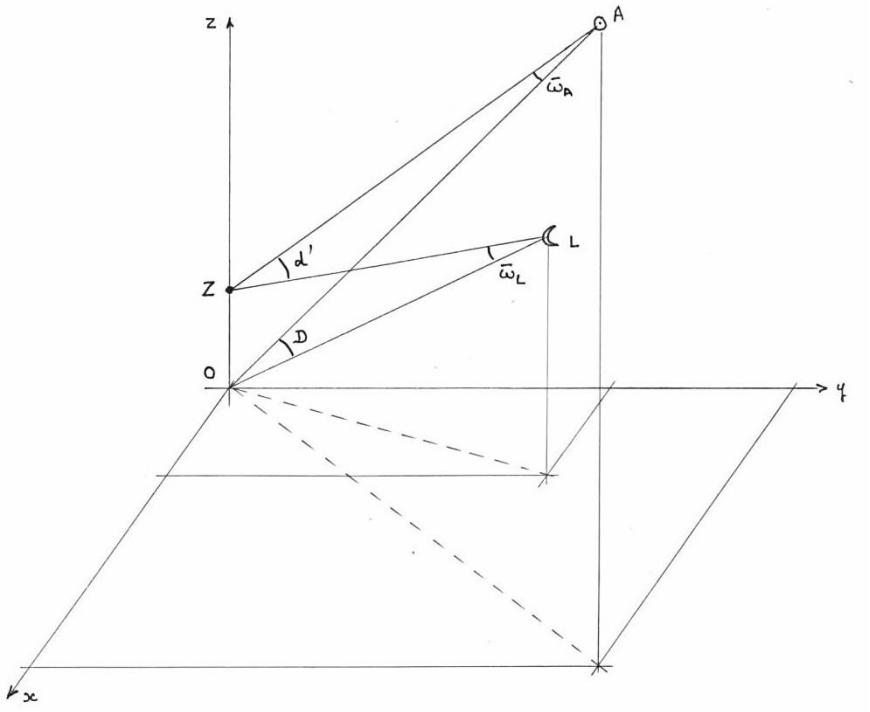


Fig : 9-1

Pour effectuer plus commodément ce dernier calcul, Ch. Shadwell propose d'employer des tables spécifiques qu'il a calculées.

Les formules employées sont explicitées en annexe 9-3 et un exemple figure en annexe 9-7.

Solution graphique d'A. Hue (1865) :

Le professeur d'hydrographie Armand Hue (1814- ?) a opté pour une méthode indirecte de réduction ; il mit au point un plateau de calcul (planisphère) constitué d'un cadre rectangulaire au centre duquel peut tourner un disque dont la circonférence est graduée en degrés et demi-degrés dont l'unique but est de déterminer graphiquement le cosinus d'un angle sphérique. Dans le cas de la réduction d'une distance lunaire, l'objectif est de déterminer les angles à la Lune α et à l'astre β.

La formule utilisée par A. Hue donnant la réduction δ est déduite du développement limité (voir annexe 7-1). Elle tient compte des termes correctifs du premier degré et d'une partie des termes du second degré de façon à

n'utiliser, pour ce dernier calcul, qu'une table dans laquelle on effectue deux entrées successives. Le calcul de la réduction par la solution d'A. Hue nécessite cependant l'emploi de 4 tables annexées au planisphère.

Le principe d'utilisation du planisphère et la formule utilisée sont explicitées en annexe 9-4.

Solution de F.-C. Beuf et É. Perrin (vers 1875) :

Il s'agit ici à nouveau d'une méthode indirecte. Cette solution, mise au point par deux officiers de marine français François-César Beuf (1834-1899) et Édouard Perrin[44] (1852-1926), est basée sur une transformation du développement limité au second ordre de la différence δ (voir annexe 7-1). Cette transformation conduit à l'écriture de quatre termes correctifs dont la somme algébrique donne la correction globale δ à appliquer à la distance apparente réfractée pour obtenir la distance vraie. Les deux termes du premier ordre se calculent simplement à l'aide d'une table de navigation usuelle et les deux termes du second ordre se calculent à l'aide d'une courte table spéciale.

Ces officiers sont allés plus loin dans leur démarche visant à remettre au goût du jour la méthode de détermination de la longitude par la mesure d'une distance lunaire. Constatant que les distances pré-calculées figurant dans la Connaissance des temps sont fréquemment de grandes valeurs (supérieures à 70°, voire de 90° à 110°), dont l'observation au sextant est délicate, ils ont développé une formulation visant à utiliser les petites distances, beaucoup plus faciles à mesurer avec précision. Leurs travaux sont publiés dans un compte rendu hebdomadaire de l'Académie des sciences en 1878. On y retrouve la solution indiquée ci-dessus, applicable pour une distance supérieure à 7° et une autre formule utilisable lorsque la distance est inférieure ; les auteurs indiquent que la réduction de la distance est alors exacte à une seconde d'arc près. Les petites distances n'étant en général pas pré-calculées dans la Connaissance des temps, les auteurs proposent également des formules de calcul de la distance calculée et de sa variation à partir des données de cette éphéméride.

Les formules sont explicitées en annexe 9-5 et un exemple est traité en annexe 9-7.

Solution de G. B. Airy (1882) :

George Biddell Airy (1801-1892), Astronome royal de 1835 à 1882, imagina une solution originale fondée sur une démarche équivalente à celle suivie par Bremicker et W. Chauvenet partant des expressions de l'angle en Z des triangles sphériques ZAL et $ZA_{ar}L_{ar}$ (figure 8-1) suivi d'un changement de variables conduisant à une formule exacte mais complexe que G. Airy va simplifier compte tenu des petites valeurs (en radians) de certains arcs. La formule ainsi établie est semi-logarithmique et le calcul est prévu s'effectuer avec une seule et simple table de logarithmes à cinq décimales.

La formulation élaborée par G. Airy est explicitée en annexe 9-2, suivie d'un exemple en annexe 9-7.

Solution de J. Merrifield (1884) et de W. Hall (1903) :

La solution indirecte de John Merrifield, professeur et directeur de l'école de navigation de Plymouth, ne prend en compte que les termes du premier ordre du développement donnant la réduction de la distance δ dont les expressions en fonction des angles à la Lune et à l'astre, α et β, sont simples mais imposent leur calcul préalable. Cherchant à éviter ces calculs préliminaires, J. Merrifield met au point une formule donnant δ en fonction des éléments mesurés, hauteurs et distance apparentes réfractées, et des éléments de correction, réfractions astronomiques et parallaxes.

[44] É. Perrin est l'auteur des célèbres « Nouvelles tables destinées à abréger les calculs nautiques ». F.-C. Beuf et É. Perrin ont effectué des recherches sur le traitement pratique des petites distances lunaires ; le résultat de leurs travaux figure dans un compte rendu de l'Académie des sciences (1878, T86, pages 758 à 761). Voir chapitre 11 ci-après.

La solution de William Hall (1868-1916), aumônier et Naval Instructor, est conçue sur le même principe que celle de J. Merrifield ; la formulation en est différente.

Les formulations élaborées par J. Merrifield et W. Hall sont explicitées en annexe 9-6, suivie d'un exemple en annexe 9-7.

La solution de W. Hall est l'une des dernières à avoir été conçue avant la disparition des éléments de calcul figurant dans la Connaissance des temps en 1905 et le Nautical Almanac en 1906.

Commentaires :

En premier lieu, il convient de faire remarquer que nous n'avons indiqué ci-dessus que quelques-unes des solutions mises au point au XIXe siècle, période où les distances lunaires pouvaient être d'utilisation courante pour déterminer la longitude à la mer.

À nombre de décimales égal dans les calculs, les méthodes directes donnent toutes la distance vraie avec le même niveau de précision (sauf peut-être dans quelques cas limite où certaines solutions peuvent être plus précises que d'autres) ; la distance vraie devant être évaluée à la seconde d'arc près, il faudra, dans l'application de ces méthodes directes, travailler avec au moins 6 décimales, pour les logarithmes comme pour les valeurs naturelles.

Dans les méthodes indirectes, on a d'abord cherché à calculer la partie principale (termes du premier ordre) et tout ou partie des termes du second ordre dont la somme constitue une valeur approchée de la réduction, différence entre distance apparente connue et distance vraie cherchée. D'une manière générale, les termes principaux sont calculés par logarithmes à quatre décimales – ce qui est suffisant pour évaluer des termes correctifs de petite valeur – et ceux du second ordre sont donnés par une table spécifique. Dans ce genre de démarche, la solution la plus commode et la plus rapide tout en gardant une précision suffisante, semble-t-il, est celle de D. Thomson, une table spécifique donnant le résidu entre la distance apparente réfractée corrigée de termes du premier ordre faciles à calculer et la distance vraie. J. Taylor reprend la même idée peu de temps après, sans faire référence à Thomson dans son texte de présentation. Une simplification notable est apportée par les officiers de marine F.-C. Beuf et É. Perrin qui, sans négliger aucun terme du développement donnant la réduction, mirent son expression sous une forme relativement simple à calculer.

On trouve ensuite des solutions originales, qui marquent une rupture avec les procédés classiques, et qui apparaissent dans le courant de la seconde moitié du XIXe siècle. Celle de Bremicker est relativement facile à mettre en œuvre et ne nécessite pas de table particulière autre que celle des logarithmes ; celle de W. Chauvenet est plus complexe, elle utilise 16 logarithmes au total et impose un recours obligatoire à 6 tables spéciales ; de prime abord, elle parait destinée aux observations terrestres mais on verra au chapitre suivant qu'elle a finalement été consacrée, pour une utilisation à la mer, par les rédacteurs du Bowditch. La solution inhabituelle de H. Raper et Ch. Shadwell est élégante mais délicate au départ pour calculer la distance parallactique. L'Astronome Royal G. Airy propose une autre solution, originale et astucieuse, mais relativement longue à mettre en œuvre, surtout si une seconde itération s'avère nécessaire.

Enfin, la solution, partiellement graphique, d'A. Hue souffre des imperfections inévitables de lecture et de centrage d'un diagramme. Celles-ci viennent s'ajouter à ce qui a été, à l'époque, considéré comme étant un défaut d'approximation de la formule ; nous y reviendrons.

ANNEXES AU CHAPITRE 9

ANNEXE 9-1

SOLUTION DE J. H. MOORE ET VARIANTES

Termes correctifs du 1er degré ou du 1er ordre :

L'auteur utilise les distances zénithales N, compléments des hauteurs H. À partir de l'expression du développement limité (voir annexe 7-1), la correction est de la forme :

$$-x.\cos\alpha + y.\cos\beta \quad \text{avec} \quad x = \pi_L.\sin N_{arL} - R_L \quad \text{et} \quad y = R_A - \pi_A.\sin N_{arA}$$

Sachant que :

$$\cos\alpha = \frac{\cos N_{arA} - \cos N_{arL}.\cos d}{\sin N_{arL}.\sin d} = 2.\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 1 \quad \text{et} \quad \cos\beta = \frac{\cos N_{arL} - \cos N_{arA}.\cos d}{\sin N_{arA}.\sin d} = 2.\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^2 - 1$$

On arrive, après les transformations trigonométriques usuelles à :

$$\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \sin\frac{N_{arL} + N_{arA} + d}{2}.\sin\frac{N_{arL} - N_{arA} + d}{2}.\csc N_{arL}.\csc d$$

$$\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^2 = \sin\frac{N_{arL} + N_{arA} + d}{2}.\sin\frac{N_{arA} - N_{arL} + d}{2}.\csc N_{arA}.\csc d$$

x et y ayant été calculés, ainsi que les deux expressions ci-dessus, la correction du premier ordre s'écrit :

$$-\left[2.x.\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 + y\right] + \left[x + 2.y.\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^2\right]$$

Terme correctif du second ordre :

L'auteur ne considère que le terme du développement en x^2, soit :

$$\frac{x^2}{2}.(\sin\alpha)^2.\cot d = \frac{x^2}{2}.\cot d - \frac{1}{2}.\left[2.x.\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 - x\right]^2.\cot d$$

Ce terme se calcule suite à l'aide de deux entrées successives dans une table à double arguments, distance et x puis quantité ci-dessus entre crochets, dont on formera la différence.

Variante utilisant les hauteurs :

On pose alors :

$$\cos\alpha = \frac{\sin H_{arA} - \sin H_{arL}.\cos d}{\cos H_{arL}.\sin d} = 1 - 2.\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 \quad \text{et} \quad \cos\beta = \frac{\sin H_{arL} - \sin H_{arA}.\cos d}{\cos H_{arA}.\sin d} = 1 - 2.\left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^2$$

On obtient, après les mêmes transformations que ci-dessus :

$$\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \cos\frac{H_{arL} + H_{arA} + d}{2}.\sin\frac{H_{arL} - H_{arA} + d}{2}.\sec H_{arL}.\csc d$$

$$\left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^2 = \cos\frac{H_{arL} + H_{arA} + d}{2}.\sin\frac{H_{arA} - H_{arL} + d}{2}.\sec H_{arA}.\csc d$$

La correction du premier ordre s'écrit alors :

$$-\left[x + 2.y.\left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^2\right] + \left[y + 2.x.\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2\right]$$

On aura alors au second ordre :

$$\frac{x^2}{2}.\cot d - \frac{1}{2}.\left[x - 2.x.\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2\right]^2.\cot d$$

ANNEXE 9-2

SOLUTIONS DE BREMICKER, W. CHAUVENET, G. B. AIRY

Bremicker :

Dans le texte, on a donné la formule générale qui donne la distance vraie D en fonction de la distance apparente :

$$\cos D = \cos(H_{vL} - H_{vA}) + [\cos d - \cos(H_{arL} - H_{arA})].K \quad \text{avec} \quad K = \frac{\cos H_{vL}.\cos H_{vA}}{\cos H_{arL}.\cos H_{arA}}$$

On pose ensuite :

$$\delta_v = H_{vL} - H_{vA} \;\; ; \;\; \delta_a = H_{arL} - H_{arA} \; ; \;\; \cos\delta_a = \frac{\cos\delta'_a}{K} \; ; \;\; \cos d = \frac{\cos d'}{K}$$

L'équation s'écrit alors :

$$\cos D - \cos d' = \cos\delta_v - \cos\delta'_a$$

Après transformation des différences en produit et assimilation des sinus des petits angles aux arcs correspondants, on obtient :

$$x = D - d' = (\delta_v - \delta'_a).\frac{\sin\frac{\delta_v + \delta'_a}{2}}{\sin\frac{D + d'}{2}}$$

On remarque que l'inconnue D figure dans le membre de droite de l'équation ; on procèdera donc par approximations successives pour la résoudre en posant, pour la première approximation D ≈ d. On fera ensuite une seconde approximation avec la valeur actualisée de D = d + x ; en général, deux itérations suffisent.

En résumé, la procédure de calcul consiste à :

- évaluer les hauteurs vraies,
- calculer K,
- calculer δ'_a et d',
- calculer x en une ou deux itérations,
- calculer la distance vraie : D = d' + x.

W. Chauvenet :

Partant de l'égalité fondamentale, W. Chauvenet arrive, après transformations trigonométriques et approximations usuelles[45] du fait de la petitesse (en radians) des éléments de correction à une expression de la forme :

$$\delta = A' + B' + C' + E' + x$$

Avec :

$$A' = (\pi_L - R'_L).A.\sin H_{arL}.\cot d \quad , \quad B' = -(\pi_L - R'_L).B.\sin H_{arA}.\csc d$$

$$C' = -(R'_A - \pi_A).C.\sin H_{arA}.\cot d \quad , \quad E' = (R'_A - \pi_A).E.\sin H_{arL}.\csc d \quad , \quad x = -\frac{\delta^2}{2}.\cot d$$

et :

$$A = 1{,}00058.\frac{\sin(H_{arL} - \Delta H_A)}{\sin H_{arL}} \quad , \quad B = 1{,}00029.\frac{\sin(2.H_{arA} - \Delta H_A)}{\sin 2.H_{arA}}$$

$$C = \frac{\sin(H_{arA} - \Delta H_A/2)}{\sin H_{arA}} \quad , \quad E = \frac{\sin(2.H_{arL} + \Delta H_L)}{\sin 2.H_{arL}}$$

Dans ces expressions, on a noté :

$$\Delta H_L = H_{vL} - H_{arL} \quad , \quad \Delta H_A = H_{arA} - H_{vA} \quad , \quad R'_L = \frac{R_L}{\cos H_{arL}} \quad , \quad R'_A = \frac{R_A}{\cos H_{arA}}$$

Les logarithmes, à quatre décimales, des quatre coefficients A, B, C et E sont donnés par quatre tables en fonction de la parallaxe diminuée de la réfraction et de la hauteur apparente réfractée de la Lune ou de l'astre suivant le cas. Les quantités A', B', C' et E' sont ensuite calculées par logarithmes. Leur somme donne une première approximation de la correction de la distance lunaire δ qui sera l'un des arguments d'entrée dans une table donnant directement la quantité x.

Nota : les facteurs 1,00058 et 1,00029 qui apparaissent dans les expressions de A et B résultent du fait que la correction de parallaxe en hauteur de la Lune est fonction de sa hauteur apparente H_{aL} et non de sa hauteur apparente réfractée H_{arL} : $H_{aL} = H_{arL} - R_L$.

G. B. Airy :

G. B. Airy pose, pour commencer :

$H_{vL} + H_{arL} =$	2A	$H_{arL} =$	A – a
$H_{vL} - H_{arL} =$	2a	$H_{vL} =$	A + a
$H_{arA} + H_{vA} =$	2B	$H_{arA} =$	B + b
$H_{aA} - H_{vA} =$	2b	$H_{vA} =$	B – b
D + d =	2C	d =	C – c
δ = D – d =	2c	D =	C + c

[45] La démonstration complète conduisant à la formule de Chauvenet n'est pas reproduite ici. Le lecteur intéressé peut la consulter dans son ouvrage « A Manual of Spherical Astronomy », tome 1, page 402 et suivantes.

L'égalité de départ, expression de cos ΔZ dans chacun des triangles ZAL et $ZA_{ar}L_{ar}$ (figure 8-1), s'écrit donc :

$$\frac{\cos(C-c)-\sin(A-a).\sin(B+b)}{\cos(A-a).\cos(B+b)}=\frac{\cos(C+c)-\sin(A+a).\sin(B-b)}{\cos(A+a).\cos(B-b)}$$

Après réduction au même dénominateur et développement, on obtient la somme algébrique des six termes suivants :

$$\begin{aligned}2.\cos A.\cos B.\sin C.\cos a.\cos b.\cos c-2.\sin A.\cos B.\cos C.\sin a.\cos b.\cos c\\+2.\cos A.\sin B.\cos C.\cos a.\sin b.\cos c-2.\sin A.\sin B.\sin C.\sin a.\sin b.\sin c\\-2.\sin A.\cos A.\sin b.\cos b+2.\sin B.\cos B.\sin a.\cos a=0\end{aligned}$$

La formule obtenue est exacte. Compte tenu des petites valeurs (en radians) des arcs a, b et c, elle peut être simplifiée en utilisant les approximations usuelles pour un petit arc x : sin x ≈ x et cos x ≈ 1 et en admettant que sin a.sin b.sin c ≈ 0.

Dans ces conditions, la correction de distance lunaire, 2c, s'écrit, tous calculs faits :

$$\delta=2c=[\tan A.\cot C-\sec A.\sin B.\csc C].2a+[-\tan B.\cot C+\sin A.\sec B.\csc C].2b$$

C étant inconnu, la formule se calcule par itération en prenant en première approximation C ≈ d.

ANNEXE 9-3

SOLUTIONS DE H. RAPER ET CH. SHADWELL

À partir d'un raisonnement fondé sur la relation donnant l'expression d'un angle A d'un triangle ABC quelconque plan en fonction de ses trois côtés a, b, c :

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2.b.c}$$

et de la définition des coordonnées cartésiennes de la Lune et de l'astre dans un trièdre trirectangle (voir figure 9-1), on peut établir une relation donnant la distance vraie D en fonction de la distance parallactique d', des hauteurs vraies et des parallaxes horizontales. On obtient, tous calculs faits :

$$\cos D=A.B.\cos d'+\sin\pi_L.\sin H_{vA}+C$$

Avec :

$$A=\sqrt{1-2.\sin\pi_A.\sin H_{vA}+(\sin\pi_A)^2}\ ,\ B=\sqrt{1-2.\sin\pi_L.\sin H_{vL}+(\sin\pi_L)^2}\ ,\ C=\sin\pi_A.\sin H_{vL}$$

Si l'astre A est une étoile dont la parallaxe est nulle, l'équation se simplifie puisque A = 1 et C = 0 et il reste :

$$\cos D=B.\cos d'+\sin\pi_L.\sin H_{vA}$$

Des tables, calculées par Ch. Shadwell, donnent les logarithmes de A et de B ainsi que le terme C.

ANNEXE 9-4

SOLUTION GRAPHIQUE D'A. HUE

Formule utilisée :

Partant du développement limité établi en annexe 7-1, donnant la réduction δ de la distance lunaire, A. Hue écrit :

$$\delta = x_1 + x_2$$

avec :

$$x_1 = -x.\cos\alpha + y.\cos\beta \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{x^2}{2}.\text{arc}1''.\cot d - \frac{x_1^2}{2}.\text{arc}1''.\cot d$$

Pour arriver à cette expression du terme du second degré, x_2, A. Hue a estimé négligeable le terme en y^2 ainsi qu'un terme de la forme :

$$x.y.\text{arc}1''.(\sin\alpha.\sin\beta - \cos\alpha.\cos\beta.\cos d).\csc d$$

Détermination graphique des cosinus des angles α et β et principe du calcul de la réduction :

Considérons une sphère et deux de ses diamètres perpendiculaires PP' et BB' ainsi qu'un point A de sa surface à l'intersection d'un demi grand cercle passant par P et P' et d'un petit cercle de pôles P et P'. On projette cette sphère dans un plan parallèle à PP'BB' selon une perspective vue de l'infini ; dans ses conditions, les cercles de la sphère de pôles P et P' ont pour image des segments, tel FF', et les demi grands cercles passant par P et P' ont pour image des ellipses de demi grand axe PP'. Cette projection est appelée orthographique méridienne (figure A9-1). C'est celle adoptée par A. Hue pour construire son planisphère.

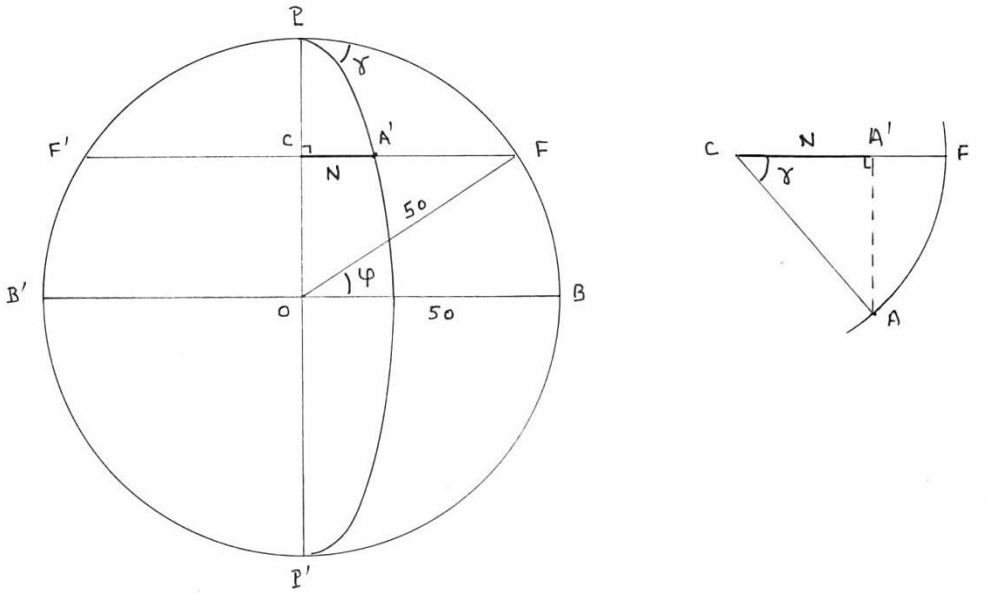


Fig : A9-1

On peut y déterminer simplement l'angle dièdre γ entre deux grands cercles, l'un étant dans un plan parallèle au plan de projection, l'autre passant par un point A. On retrouve cet angle dans le plan du petit cercle de pôle P et P' passant par A. Son cosinus est évidemment :

$$\cos\gamma = \frac{CA'}{CA} \quad \text{et} \quad CA = CF = OF.\cos\varphi$$

Ainsi, pour obtenir la valeur de cos γ, il suffit de mesurer sur le canevas la longueur N du segment CA' et d'en former le rapport avec la longueur du rayon du cercle qui est fixé par son auteur à 50 unités. N est mesuré directement sur le carroyage du planisphère qui partage le diamètre BB' en 100 unités. On a donc en définitive :

$$\cos\gamma = \frac{N}{50}.\sec\varphi$$

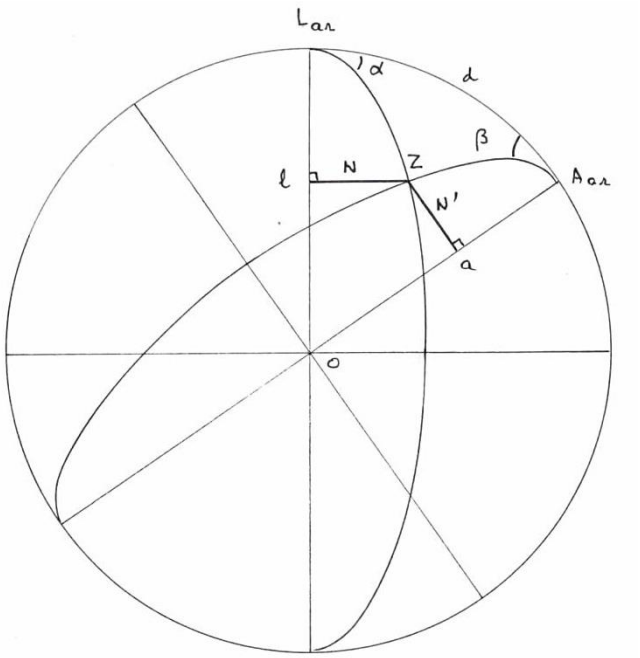


Fig : A9-2

On peut maintenant représenter sur le planisphère une image du triangle sphérique apparent réfracté correspondant aux observations ce qui se fait en deux temps : en prenant le point A_{ar} comme pôle et considérant la hauteur apparente réfractée de l'astre, ce qui fixe le point a puis, en faisant tourner le disque et prenant le point L_{ar} comme nouveau pôle (figure A9-2) et considérant la hauteur apparente réfractée de la Lune, ce qui fixe le point b. L'image du point Z est à l'intersection des perpendiculaires aux diamètres en a et l, ce qui fixe les longueurs N et N' pour évaluer les cosinus cherchés :

$$\cos\alpha = \frac{N}{50}.\sec H_{arL} \quad \text{et} \quad \cos\beta = \frac{N'}{50}.\sec H_{arA}$$

On déduit ensuite facilement les quantités correctives :

$$x.\cos\alpha = (\pi_L - R_L.\sec H_{arL}).\frac{N}{50} \quad \text{et} \quad y.\cos\beta = (R_A.\sec H_{arA} - \pi_A).\frac{N'}{50}$$

Le canevas du planisphère d'Armand Hue ne comporte que les segments images des « parallèles » et, en perpendiculaires des segments également répartis sur le diamètre du cercle image de la sphère. Les ellipses représentatives de « méridiens », inutiles en pratique, ne sont pas représentées. On ne reporte donc sur le planisphère que les trois sommets du triangle apparent. Une réglette, perpendiculaire au diamètre « vertical » simplifie les reports et mesures.

Au planisphère sont jointes 4 tables. La Table I permet le calcul des « réfractions corrigées », c'est-à-dire multipliées par la sécante de la hauteur ; la Table II donne la quantité (π – R).sec H_{ar} pour chacune des deux

observations ; la Table III permet le calcul de $x = \varpi_L - R_L$; la Table IV permet en deux entrées successives, avec d et x puis x_1, le calcul de la correction du second ordre.

ANNEXE 9-5

SOLUTIONS DE F.-C. BEUF & É. PERRIN

Solution générale :

On considère le développement limité (voir annexe 7-1) donnant la réduction δ de la distance lunaire :

$$\delta = y.\cos\beta - x.\cos\alpha + \frac{1}{2}.[y^2.(\sin\beta)^2 + x^2.(\sin\alpha)^2].\cot d + x.y.\sin\beta.\sin\alpha.\csc d$$

Connaissant les transformations :

$$\cot d = \frac{1}{2}.\cot\frac{d}{2} - \frac{1}{2}.\tan\frac{d}{2} \quad \text{et} \quad \csc d = \frac{1}{2}.\cot\frac{d}{2} + \frac{1}{2}.\tan\frac{d}{2}$$

x, y et δ étant exprimés en secondes d'arc, le développement peut être mis sous la forme :

$$\delta = -x.\cos\alpha + y.\cos\beta + \frac{arc1''}{4}.\cot\frac{d}{2}.(x.\sin\alpha + y.\sin\beta)^2 - \frac{arc1''}{4}.\tan\frac{d}{2}.(x.\sin\alpha - y.\sin\beta)^2 = C^{ion}1 + C^{ion}2 + C^{ion}3$$

Les opérations à effectuer sont alors les suivantes :

- évaluer les quantités x et y, corrections pour passer des hauteurs apparentes aux hauteurs vraies, respectivement de la Lune et de l'astre,
- calculer α et β, angle à la Lune et angle à l'astre (valeurs apparentes) à l'aide de formules dérivées de la formule fondamentale,
- calculer les deux termes du premier ordre à l'aide d'une table de point ainsi que les termes x.sin α et y.sin β,
- utiliser une table spécialement conçue pour calculer les deux termes du second ordre,
- faire la somme algébrique des quatre termes donnant la réduction δ.

Application aux petites distances :

Le facteur en cotangente des termes du second ordre prenant des valeurs importantes lorsque la distance est petite, il convient de chercher à préciser au mieux sa valeur ; on prend comme argument une distance aussi voisine que possible de celle de la distance vraie, donc $d + C^{ion}1$.

Lorsque la distance est inférieure à 7°, il convient d'adopter une autre formulation qui est la suivante, I désignant l'angle entre les arcs de distances vraie et apparente réfractée :

$$\delta = C^{ion}1 + (x.\sin\alpha + y.\sin\beta).\tan\frac{I}{2} \quad \text{avec} \quad \tan I = \frac{x.\sin\alpha + y.\sin\beta}{d + C^{ion}1}$$

On arrive ainsi, directement, à la distance vraie cherchée D :

$$D = \frac{d + C^{ion}1}{\cos I}$$

On notera que cette formulation n'est applicable que pour les petites distances.

Expression des angles à la Lune et à l'astre (triangle $ZL_{ar}A_{ar}$) :

Après avoir posé $2.S = d + H_{arL} + H_{arA}$, les formules employées sont les suivantes :

$$\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\cos S\,.\sin(S - H_{arA})}{\cos(S-d).\sin(S - H_{arL})} \quad \text{et} \quad \tan\frac{\beta}{2} = \frac{\cos S}{\cos(S-d)}.\cot\frac{\alpha}{2}$$

Évaluation de la distance calculée D_c avec les éléments d'un almanach (triangle PLA) :

On pose, pour l'instant considéré, ARL et ARa puis D_L et D_A les ascensions droites et les déclinaisons de la Lune et de l'astre et on obtient, N étant un angle auxiliaire :

$$\tan N = \frac{\sin\frac{ARL - ARa}{2}}{\sin\frac{D_L - D_A}{2}}.\sqrt{\cos D_L.\cos D_A} \quad \text{et} \quad \sin\frac{D_c}{2} = \frac{\sin\frac{D_L - D_A}{2}}{\cos N}$$

Plutôt que de calculer une seconde distance et d'effectuer une interpolation entre les deux pour évaluer l'heure correspondant à la mesure de la distance vraie, Beuf et Perrin préconisent d'utiliser la variation de distance ΔD_c par unité de temps dont l'expression est :

$$\Delta D_c = \cos D_L\,.\sin L\,.\Delta ARL - \cos L\,.\Delta D_L + \cos D_A\,.\sin A\,.\Delta ARa - \cos A\,.\Delta D_A$$

ΔARL et ΔD_L, ΔARa et ΔD_A désignent les variations des coordonnées équatoriales de la Lune et de l'astre par unité de temps, L et A étant les angles à la Lune et à l'astre du triangle sphérique PLA formé par le pôle, la Lune et l'astre. Ces angles peuvent être évalués par les formules suivantes :

$$\sin L = \cos D_A\,.\frac{\sin(ARL - ARa)}{\sin D_c} \quad , \quad \sin A = \cos D_L\,.\frac{\sin(ARL - ARa)}{\sin D_c}$$

Si l'astre est une étoile, les deux derniers termes de l'expression donnant la variation de distance sont nuls.

ANNEXE 9-6

SOLUTIONS DE J. MERRIFIELD ET W. HALL

J. Merrifield :

Le développement étant limité au premier ordre, on a :

$$\delta = -x.\cos\alpha + y.\cos\beta \quad \text{avec} \quad x = \pi_L.\cos H_{arL} - R_L \quad \text{et} \quad y = R_A - \pi_A.\cos H_{arA}$$

les angles α et β étant les angles à la Lune et à l'astre, δ peut aussi s'écrire :

$$\delta = -x.\left[1 - 2.\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2\right] + y.\left[1 - 2.\left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^2\right]$$

J. Merrifield exprime ensuite les angles α et β en fonctions des éléments connus à l'aide de la formule fondamentale puis utilise les formules de transformation mises en évidence à l'annexe 9-1, soit :

$$\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\cos\frac{H_{arL}+H_{arA}+d}{2}.\sin\frac{H_{arL}-H_{arA}+d}{2}}{\sin d\,.\cos H_{arL}} \;;\; \left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^2 = \frac{\cos\frac{H_{arL}+H_{arA}+d}{2}.\sin\frac{H_{arA}-H_{arL}+d}{2}}{\sin d\,.\cos H_{arA}}$$

δ se met enfin sous la forme :

$$\delta = -x + y + 2.(X+Y).\csc d\,.\cos\frac{H_{arL}+H_{arA}+d}{2}$$

Avec :

$$X = x.\sec H_{arL}\,.\sin\frac{H_{arL}-H_{arA}+d}{2} \quad \text{et} \quad Y = -y.\sec H_{arA}\,.\sin\frac{H_{arA}-H_{arL}+d}{2}$$

W. Hall :

Le développement étant limité au premier ordre, on a, en écrivant les expressions donnant cos α et cos β :

$$\delta = -x.\frac{\sin H_{arA} - \sin H_{arL}\,.\cos d}{\cos H_{arL}\,.\sin d} + y.\frac{\sin H_{arL} - \sin H_{arA}\,.\cos d}{\cos H_{arA}\,.\sin d}$$

Avec :

$$x = \pi_L.\cos H_{aL} - R_L = \cos H_{arL}.(\pi_L - R_L.\sec H_{arL}) \quad \text{et} \quad y = R_A - \pi_A.\cos H_{arA} = \cos H_{arA}.(R_A.\sec H_{arA} - \pi_A)$$

On pose $u = (\pi_L - R_L.\sec H_{arL})$ et $v = (R_A.\sec H_{arA} - \pi_A)$ et δ s'écrit maintenant :

$$\delta = -u.(\sin H_{arA}\,.\csc d - \sin H_{arL}\,.\cot d) + v.(\sin H_{arL}\,.\csc d - \sin H_{arA}\,.\cot d)$$

La formule est semi-logarithmique. Les produits R.sec H ont été appelés « horizontal refraction » par W. Hall par analogie avec la parallaxe horizontale.

ANNEXE 9-7

EXEMPLES DE CALCUL

Les données sont celles de l'exemple figurant au chapitre 4. Les éléments utiles sont résumés dans le tableau ci-dessous :

Lune	Aldébaran
Hauteur apparente réfractée : H_{arL} = 26° 55' 30'' Hauteur vraie : H_{vL} = 27° 42' 06'' Réfraction astronomique : R_L = 1' 55'' Parallaxe horizontale : π_L = 54' 24''	Hauteur apparente réfractée : H_{arA} = 47° 56' 18'' Hauteur vraie : H_{vA} = 47° 55' 25'' Réfraction astronomique : R_A = 0' 53''
Distance apparente réfractée $L_{ar}A_{ar}$ = d = 25° 11' 12''	

Solution de J. H. Moore :

Les distances zénithales apparentes réfractées ont pour valeur : N_{arL} = 63,0750° et N_{arA} = 42,0617°.

x	$\pi_L . \cos H_{arL} - R_L$	46’ 35’’
y	$R_A - \pi_A . \cos H_{arA}$	0’ 53’’
demi-somme	$\frac{N_{arA} + N_{arL} + d}{2}$	65,1617°
1er reste	$\frac{N_{arA} - N_{arL} + d}{2}$	2,0867°
2e reste	$\frac{N_{arL} - N_{arA} + d}{2}$	23,1000°
	$2.\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^2$	0,174171
	$2.\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2$	1,876697
1re Cion	$2.y.\left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^2$	0,154’
2e Cion	$2.x.\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2$	87,423’
T	$+\left(x + 1^{re}C^{ion}\right)$	+ 46’ 44’’
U	$-\left(2^{e}C^{ion} + y\right)$	- 88’ 18’’
V	$arc1''.\frac{x^2}{2}.\cot d$	+ 40’’
W	$\frac{1}{2}.arc1''.\left[2.x.\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 - x\right]^2.\cot d$	- 31’’
δ	$T + U + V + W$	- 41’ 25’’
D	$D = d + \delta$	24° 29’ 47’’

Solution de D. Thomson :

1re Cion	$-\pi_L . \sin H_{arA} . \csc d$	- 1° 34’ 54’’
2e Cion	$\pi_L . \sin H_{arL} . \cot d$	52’ 23’’
3e Cion	extrait de tables ci-dessous	1’ 09’’
δ	1re Cion + 2e Cion + 3e Cion	- 0° 41’ 22’’
D	$d + \delta$	24° 29’ 50’’

Extraits de la table donnant la 3e correction:

H_{arL} ↓	d = 24° H_{arA}		d = 28° H_{arA}	
	46°	50°	46°	50°
26°	1’ 11’’	1’ 08’’	1’ 14’’	1’ 15’’
27°	1’ 09’’	1’ 06’’	1’ 11’’	1’ 12’’

Solution de Bremicker :

K	$\frac{\cos H_{vL} \,.\, \cos H_{vA}}{\cos H_{arL} . \cos H_{arA}} =$	0,993307
δ_v	$H_{vL} - H_{vA} =$	20,2219
δ_a	$H_{arL} - H_{arA} =$	21,0133
δ'_a	$\cos^{-1}(K.\cos\delta_a) =$	21,9900
d’	$\cos^{-1} K.\cos d =$	25,9902
x 1re it.	$(\delta_v - \delta'_a).\frac{\sin\frac{\delta_v + \delta'_a}{2}}{\sin\frac{D + d'}{2}} =$	- 1,4741
D	$d' + x =$	24,5161
x 2e it.		- 1,4924
D	$d' + x =$	24° 29’ 52’’

Solution de Chauvenet :

R'_L	$R_L/\cos H_{arL}$		2’ 09’’
	$\pi_L - R'_L$		52’ 15’’
R'_A	$R_A/\cos H_{arA}$		1’ 19’’
A	1,013910	A’	51’ 00’’
B	1,000316	B’	- 91’ 11’’
C	0,999884	C’	- 2’ 05’’
E	1,009811	E’	1’ 25’’
	A’ + B’ + C’ + E’		- 40’ 51’’
x	$-\frac{\delta^2}{2}.\mathrm{arc}1''.\cot d$		- 32’’
D	d + A’ + B’ + C’ + E’ + x		24° 29’ 49’’

Solution de Raper & Shadwell:

α	$\cos\alpha = \dfrac{\sin H_{arA} - \sin H_{arL}.\cos d}{\cos H_{arL}.\sin d}$	28,7535°
β	$\cos\beta = \dfrac{\sin H_{arL} - \sin H_{arA}.\cos d}{\cos H_{arA}.\sin d}$	140,1924°
d’	$d + R_L.\cos\alpha + R_A.\cos\beta$	25° 12’ 13”
A	$\sqrt{1 - 2.\sin\pi_A.\sin H_{vA} + (\sin\pi_A)^2}$	1,000000
B	$\sqrt{1 - 2.\sin\pi_L.\sin H_{vL} + (\sin\pi_L)^2}$	0,992743
C	$C = \sin\pi_A.\sin H_{vL}$	0
D	$\cos^{-1}[B.\cos d' + \sin\pi_L.\sin H_{vA}]$	24° 29’ 51”

Solution de Airy :

A	27,31335°	a	0,38835°
B	47,93095°	b	0,00735°
C	25,1867°	c	
δ1re itération	- 40’ 58”	D_1	24° 30’ 14”
δ2e itération	- 41’ 22”	D	24° 29’ 51”

C étant inconnu, la 1re itération se calcule en prenant C ≈ d, la seconde en prenant 2.C ≈ 2.d + δ1re itération.

Solution de Beuf & Perrin :

x	$\pi_L.\cos H_{arL} - R_L$	46’ 35”
y	$R_A - \pi_A.\cos H_{arA}$	0’ 53”
α	$\cos\alpha = \dfrac{\sin H_{arA} - \sin H_{arL}.\cos d}{\cos H_{arL}.\sin d}$	28,7535°
β	$\cos\beta = \dfrac{\sin H_{arL} - \sin H_{arA}.\cos d}{\cos H_{arA}.\sin d}$	140,1924°
Cion 1	$y.\cos\beta - x.\cos\alpha$	- 41’ 31”
Cion 2	$\frac{1}{4}.\cot\frac{d}{2}.(x.\sin\alpha + y.\sin\beta)^2.\mathrm{arc}1''$	+ 10”
Cion 3	$-\frac{1}{4}.\tan\frac{d}{2}.(x.\sin\alpha - y.\sin\beta)^2.\mathrm{arc}1''$	0
δ	somme des trois termes correctifs	- 41’ 21”
D	$d + \delta$	24° 29’ 51”

Solution de Merrifield :

x et y ont les valeurs calculées ci-dessus.

- x + y		- 45’ 42’’
X	$x.\sec H_{arL}.\sin\frac{H_{arL}-H_{arA}+d}{2}$	1’ 54’’
Y	$-y.\sec H_{arA}.\sin\frac{H_{arA}-H_{arL}+d}{2}$	- 0’ 31’’
δ	$-x+y+2.(X+Y).\csc d.\cos\frac{H_{arL}+H_{arA}+d}{2}$	- 41’ 31’’
D	$d+\delta$	24° 29’ 41’’

Solution de Hall :

x et y ont les valeurs calculées ci-dessus.

u	$\pi_L - R_L.\sec H_{arL}$	52’ 15’’
v	$R_A.\sec H_{arA} - \pi_A$	1’ 19’’
	$-u.(\sin H_{arA}.\csc d - \sin H_{arL}.\cot d)$	- 40’ 50’’
	$v.(\sin H_{arL}.\csc d - \sin H_{arA}.\cot d)$	- 41’’
δ	somme des deux termes correctifs	- 41’ 31’’
D	$d+\delta$	24° 29’ 41’’

CHAPITRE 10

LE CALCUL DES DISTANCES LUNAIRES

SELON LES MANUELS & TRAITÉS DE NAVIGATION DU XIXe SIÈCLE

Les principales solutions mises au point pour réduire une distance lunaire ayant été passées en revue dans les chapitres 7, 8 et 9 précédents, il s'agit maintenant de rechercher ce qu'il en a été retenu et explicité dans les ouvrages de navigation et d'astronomie nautique, conçus tant pour l'enseignement que pour l'usage courant, mis à la disposition des pilotes et officiers chargés de la navigation.

Devant la richesse de la bibliographie, l'analyse est limitée aux ouvrages les plus courants, publiés au XIXe siècle et écrits en langues anglaise et française. Sur l'étendue de ce siècle, les distances lunaires pré-calculées figurent dans les principaux almanachs utilisés en navigation ; on ne traitera donc que de la question de la réduction de la distance apparente réfractée issue de la mesure.

Le « Bowditch » :

La première édition de l'ouvrage paraît en 1802, sous la signature de Nathaniel Bowditch, mathématicien[46] américain, et sous le titre de « The New American Practical Navigator and Epitome of Navigation » ; cette première publication est conçue sur la base de l'édition américaine de l'ouvrage de J. Hamilton Moore (voir au chapitre précédent), mise à jour par N. Bowditch et parue trois ans auparavant.

Dans cette première édition de 1802, N. Bowditch mentionne les solutions de réduction de Dunthorne, Lyons et Witchell. Concernant Dunthorne et les solutions similaires, il relève comme principal avantage celui de ne pas avoir à distinguer différents cas de figure ; l'inconvénient en étant, à son avis, les interpolations dans les tables de logarithmes pour travailler à la seconde d'arc près. Il indique ensuite que les solutions de Lyons et Witchell ne présentent pas cet inconvénient mais sont handicapées par la multiplicité des cas de figure dans lesquels les quantités correctives peuvent avoir un signe ou l'autre ce qui est une cause d'erreur, notamment pour les néophytes. Il explicite donc une solution, qui est celle indiquée par J. H. Moore, qui, indique-t-il, est aussi simple que celle de Witchell et se traite toujours de la même façon, quel que soit le cas de figure. À la suite de ce premier exposé, suivi de plusieurs exemples, N. Bowditch explicite la méthode de Witchell accompagnée d'exemples.

L'ouvrage est réédité très régulièrement sans modifications importantes jusqu'en 1837, année de publication de la 10e édition qui a été l'objet d'une profonde mise à jour, la dernière du vivant de son auteur. N. Bowditch y détaille 4 solutions de réduction de la distance lunaire. La première méthode est dérivée de celle qu'il exposa en 1802 en prenant les hauteurs à la place des distances zénithales et en admettant une expression simplifiée de la réfraction astronomique, ce qui allège le calcul des corrections qui sont mises en tables (4 tables sont nécessaires). On remarque que les deux termes correctifs négatifs sont donnés augmentés de 1° ; ainsi, pour éviter les soustractions et les éventuelles règles de signe, la distance vraie est obtenue par addition à partir de la distance apparente réfractée que l'on aura diminuée de 2°. La deuxième méthode est intégralement celle de D. Thomson avec deux tables spécifiques, notamment celle donnant la 3e correction. Pour ce qui est de la 1re correction, qui est toujours négative, et de la 2e, qui est négative si la distance est supérieure à 90°, on relève le même genre d'artifice que dans la première méthode : les corrections données par la table sont augmentées de 5° et seront ensuite ajoutées à la distance apparente réfractée minorée de 10°. La troisième méthode est celle de J. H. Moore figurant dans l'édition de 1802. Enfin, la quatrième méthode est celle de G. Witchell.

[46] N. Bowditch navigua de 1795 à 1799, d'abord en qualité d'écrivain (secrétaire) puis, à son dernier voyage, comme capitaine-armateur. Outre ses activités savantes, il fut aussi assureur et actuaire.

La 37e édition de « The New American Navigator » est publiée en 1867, sans modification de fond par rapport à celle de 1837. En 1868, les droits de la famille Bowditch sont rachetés par le gouvernement américain et, à partir de cette année, l'ouvrage parait sous le titre de « The American Practical Navigator[47] ». Une révision profonde de l'ouvrage est effectuée pour l'édition de 1882 avec pour conséquence la disparition des 4 solutions de réduction qui sont remplacées par la seule solution de W. Chauvenet avec l'ensemble de ses tables spécifiques. Les instructions d'emploi insistent sur la nécessité de précision dans les méthodes de calcul afin de pouvoir contrôler sérieusement le chronomètre, laissant les incertitudes aux seules observations. Il y est indiqué, en conclusion de ces instructions :

> *« This is accomplished by means of these tables, with an amount of labor very little greater than that which is required by the inaccurate methods in common use ».*

Avec l'édition de 1903, les instructions et tables de la solution de Chauvenet passent en appendices de l'ouvrage et y figurent jusqu'à l'édition de 1912 inclusivement. Elles disparaissent avec l'édition de 1914.

Les manuels de navigation britanniques :

Les manuels de navigation, comme le « Bowditch » dont il vient d'être question, présentent l'ensemble des notions exigées pour une bonne pratique de la navigation et exposent tous les problèmes auxquels peut être confronté le navigateur ; ils donnent, sans aucune démonstration, et souvent sous la seule forme d'une simple liste d'opérations à exécuter, les différentes procédures de résolution. L'ensemble des tables nécessaires à la résolution des différents problèmes figure en annexe ou dans un second volume. Ces manuels, à la fois formulaire, aide-mémoire et vade-mecum font partie du bagage d'un officier chargé de la navigation, au même titre que son sextant et sa paire de jumelles. Parmi ceux-ci, trois sont particulièrement populaires en Grande-Bretagne, leurs auteurs étant John William Norie (1772-1843), Henry Raper (1799-1859) et William Henry Rosser[48].

La première édition de « A New and Complete Epitome of Practical Navigation » de J. W. Norie est publiée en 1805. Y sont décrites 4 méthodes de réduction de la distance lunaire. La première est celle de R. Dunthorne et la seconde celle de J.-Ch. de Borda, un peu simplifiée par la mise en table du facteur K (logarithmic difference). Norie indique que ces deux premières méthodes nécessitent l'emploi de logarithmes à 6 décimales. La troisième méthode est celle de G. Witchell dans laquelle il suffit d'utiliser des logarithmes à 4 décimales. Enfin, la quatrième méthode est celle dite solution générique[49]. J. W. Norie indique, concernant cette dernière méthode :

> *« (…) and has the peculiar advantage of not requiring any distinction of cases, an inconvenience which prevails in the third, and, indeed, in every other approximate method except this last. »*

Dans l'édition de 1839, qui porte maintenant le titre de « A Complete Epitome of Practical Navigation », le problème de détermination de la longitude par les distances lunaires est placé à la suite de celui de l'emploi du chronomètre. Par contre, le chapitre comporte maintenant l'explicitation de 5 méthodes, à savoir : en première méthode, celle de W.-L. Krafft et J. de Mendoza y Rios par les versines naturelles, en deuxième, celle de J.-Ch. de Borda ; on retrouve ensuite, comme dans l'édition initiale, la méthode de G. Witchell et la solution générique et la cinquième méthode est celle d'I. Lyons couplée à l'emploi des « Linear Tables » dont J. W. Norie fut l'auteur en 1815. Il indique notamment :

> *« (…) These Tables, for correcting the apparent distance for the effect of refraction without calculation, render this method one of the easiest and shortest that have been proposed. »*

[47] L'ouvrage est toujours régulièrement mis à jour. La dernière édition disponible est celle de 2019 mise à jour en 2021.
[48] Les tables de Norie sont toujours publiées, sous une forme évidemment actualisée, la dernière édition de l'ouvrage de Raper a été publiée en 1920, l'ouvrage de Rosser n'a pas dépassé la fin du XIXe siècle.
[49] Voir J. H. Moore, chapitre 9.

Enfin, dans l'édition de 1896, mise à jour par W. H. Rosser, on retrouve les méthodes de W. L. Krafft et de J.-Ch. de Borda auxquelles vient s'ajouter celle de G. B. Airy dont la présentation est accompagnée du commentaire suivant :

> *« It is direct and simple in application. Using five-figure logarithms, and with the most ordinary care in the assumption of one element, it gives the result with an accuracy which is sensibly perfect. If the comparison of the result with the assumed element shows that the latter was erroneous, a repetition of the operation, with very few changes of figures, will make the result accurate ... »*

En 1840, l'officier de la Royal Navy H. Raper publie « The Practice of Navigation and Nautical Astronomy ». Dans cet ouvrage figurent deux méthodes de réduction de la distance, l'une dite « approchée », l'autre étant dite « logarithmique ». La méthode approchée consiste à calculer les deux termes du 1er ordre du développement à l'aide de la « Spherical Traverse Table » et d'une table de point ou « Traverse Table ». La première table donne accès aux cosinus des angles à la Lune et à l'astre, la seconde donne le résultat des produits d'un nombre par un sinus ou un cosinus (voir annexe 10-1). Une table auxiliaire permet le calcul de la correction prépondérante du second ordre. La méthode logarithmique correspond à la 4e méthode proposée par J. W. Norie (solution générique). La 18e édition de 1887 présente les mêmes méthodes.

W. H. Rosser publie « A Self Instructor in Navigation and Nautical Astronomy » en 1863. L'ouvrage est spécialement écrit et conçu pour les candidats aux certifications de la marine marchande britannique (Mates, Master et Extra-Master). Cette première édition ne présente que la méthode de réduction de D. Thomson :

> *« (...) and the method proposed to be introduced here is that in which the true distance is determined by "Thomson's Lunars Tables" – the work best known to seamen – for it would be impossible on this occasion to draw attention to all the different formulae and tables – probably more than forty – that have been devised for this purpose. »*

Une édition ultérieure de l'ouvrage de W. H. Rosser, celle de 1891, présente 4 méthodes de réduction : celle de J.-Ch. de Borda légèrement modifiée, la solution générique déjà rencontrée chez Norie et Raper, une solution utilisant les « Turner's Lunar Tables[50] » et enfin, la solution de G. B. Airy.

Les traités de navigation britanniques :

Évidemment plus détaillés que les manuels indiqués ci-dessus, ces traités présentent différentes solutions, accompagnées de leur démonstration et d'exemples.

Le traité de James Inman (1776-1859), professeur au Royal Naval College de Portsmouth parait en 1821 sous le titre de « A Treatise on Navigation and Nautical Astronomy designed for the Use of British Seamen » ; le traité est suivi d'un ensemble de tables de navigation qui seront, à partir de 1830, publiées séparément sous le titre de « Inman's Navigation Tables » ; elles seront régulièrement mises à jour et rééditées jusqu'à la fin des années 1940. Dans cette première édition du traité, deux solutions directes sont proposées : l'une dérivée de la formule établie par W.-L. Krafft et J. de Mendoza y Rios, utilisant exclusivement des valeurs naturelles des lignes trigonométriques verses ainsi qu'une mise en table de l'arc auxiliaire utilisé, l'autre étant déduite de la mise en équation générale (voir chapitre 8) et transformée sous forme semi-logarithmique. Dans la 7e édition du traité, en 1849, seule subsiste la première solution.

L'ouvrage d'Edward Riddle (1788-1854), professeur et Master of the Mathematic School du Royal Naval Hospital de Greenwich de 1821 à 1851, dont la première édition parait en 1824 sous le titre de « A Treatise of Navigation and Nautical Astronomy Adapted to Practice » présente une solution directe et sa variante qui dérivent, comme chez J. Inman, de la formule de Krafft-Mendoza. La 5e édition de l'ouvrage, parue en 1849, reprend les mêmes méthodes exactement.

Dans sa 3e édition de 1899, l'ouvrage réglementaire dans la Royal Navy de W. R. Martin, professeur au Royal Naval College de Greenwich, « A Treatise on Navigation and nautical Astronomy » ne présente plus que la

[50] Document introuvable en février 2023.

formule de Krafft-Mendoza, avec démonstration et exemples. De même, le petit traité de William Hall (1867-1916), Naval Instructor de la Royal Navy, paru en 1904 sous le titre de « Modern Navigation », ne donne plus que cette dernière solution.

Les ouvrages français :

On suivra ici un ordre grossièrement chronologique. On commencera donc par le « Traité de Navigation » de l'officier de marine puis professeur de mathématiques Jean Baptiste Étienne Dubourguet (1760-1820) publié en 1808. Concernant l'opération de réduction d'une distance lunaire, on peut lire dans le « discours préliminaire » figurant en introduction du traité :

> *« (...) Enfin, s'il veut beaucoup abréger tous ces calculs, il se servira pour la réduction des distances, de la méthode démontrée aux articles 275 et suivants (...) Par le moyen de ce procédé, les logarithmes ne se prennent qu'avec 5 décimales et se répètent en partie. Enfin, la simplicité de cette méthode est telle que le temps qu'elle emploie, n'est guère qu'un tiers de celui employé par la méthode ordinaire de Borda. Il est vrai qu'elle seroit susceptible de quelques inexactitudes si les données de calcul n'étoient pas comprises dans certaines limites que nous indiquons, et qui heureusement s'étendent fort loin. »*

L'exposé est en général très touffu mais on retrouve dans ce traité les méthodes du chevalier de Borda et de Krafft- Mendoza y Rios[51], dont les formules sont démontrées assorties de nombreux commentaires. La méthode approchée, indirecte, dont il est question dans le « discours préliminaire » consiste à n'utiliser que les deux termes du premier degré du développement limité donnant la correction. L'auteur indique que l'erreur résultante est négligeable dès lors que la distance est comprise entre 70° et 120° et que les hauteurs, notamment celle de la Lune, sont « suffisamment grandes ».

Vient ensuite le « Traité de Navigation » d'Étienne Bézout (1730-1783), revu et augmenté par Élisabeth Paul Édouard de Rossel (1765-1829) publié en 1814. Dans sa version originale, É. Bézout indique la méthode indirecte limitée aux deux termes du premier degré. De Rossel remarque en préface qu'il serait souhaitable de compléter la solution par une troisième correction ou, mieux, d'utiliser la solution de Borda. En conséquence, dans la « section supplémentaire » du traité, de Rossel détaille tout d'abord la méthode de Borda puis la solution générique telle que notamment rencontrée dans le manuel de J. W. Norie.

En 1816 parait la première édition des « Problèmes d'astronomie nautique et de navigation » de Charles Guépratte (1777-1857), professeur de mathématiques et directeur de l'observatoire de Brest de 1810 à 1852. Dans cette édition, seule y figure la solution de Borda accompagnée d'exemples. La troisième édition de 1839 fait, elle, état de 10 méthodes. La première est une méthode indirecte dans laquelle sont calculés les termes du premier ordre, sans faire intervenir de logarithmes, grâce à une décomposition en termes élémentaires calculables à l'aide d'une simple « table de point » étendue donnant les résultats des produits d'un nombre avec les lignes trigonométriques ; le terme prépondérant du second ordre est donné par une table. Les 9 méthodes qui suivent, directes, résultent de différentes écritures de l'équation de base donnant la distance vraie. On y relève notamment les formulations de R. Dunthorne et de J.-Ch. de Borda.

L'ouvrage de Pierre Caillet (1769-1839), professeur à l'école de navigation de Paimboeuf, parait en 1818, sous le titre de « Manuel du navigateur ». L'auteur propose la solution directe de J.-Ch. de Borda ainsi que deux variantes de la formule mais relève l'inconvénient des logarithmes à 6 ou 7 décimales avec les interpolations qui leurs sont liées :

> *« (...) Aussi, plusieurs Capitaines, quoique convaincus de son importance [du calcul de longitude], ou effrayés de sa longueur, ou manquant de temps pour le faire, vont se mettre en latitude, et n'ont plus que l'estime pour guide. »*

[51] En note, J. B. E. Dubourguet fait état des Tables de Mendoza qui lui avait été montrées par J. Lalande mais que ce dernier n'avait pas accepté de lui prêter …

Il propose donc également une solution indirecte qui donne les termes correctifs du premier ordre ainsi qu'une correction supplémentaire ; le calcul se fait par logarithmes à 4 ou 5 décimales, une courte table donnant la correction supplémentaire.

La première édition du « Cours complet d'observations nautiques » de Joseph Ducom parait à Bordeaux en 1820. Deux solutions y sont proposées : celle de J.-Ch. de Borda en premier lieu, sous sa forme initiale et sous une forme simplifiée par utilisation de la « différence logarithmique » initiée par R. Dunthorne ; en second lieu, J. Ducom propose une solution indirecte qu'il attribue à I. Lyons et qu'il qualifie d'abrégée puisqu'il ne tient compte que des termes du premier ordre qui sont évalués à l'aide d'une table concernant les réfractions et par logarithmes, en deux termes, concernant les effets de la parallaxe de la Lune. Dans l'édition suivante, publiée en 1835, cette solution indirecte est reconduite, en la complétant d'une table permettant d'évaluer le terme prépondérant du second ordre ; le calcul des effets de la réfraction est également affiné.

Charles Félix Fournier, examinateur de la marine, publie en 1826 un « Traité de navigation ». L'ouvrage est réédité en 1829 puis en 1839. Dans cette dernière édition, C. F. Fournier présente tout d'abord la solution naturelle et élémentaire qui consiste à calculer l'angle en Z du triangle « apparent réfracté » $ZL_{ar}A_{ar}$ (voir la figure 8-1), puis, après avoir déterminé les hauteurs vraies des deux astres, à calculer la distance vraie dans le triangle « vrai » ZLA. À la suite de l'exposé de cette première solution, il indique :

> *« On emploie ordinairement pour calculer la distance vraie, deux formules qui sont dues à M. de Borda, formules qui ne sont sujettes à aucune exception, comme nous le ferons voir, et qui sont très commodes dans la pratique, parce qu'elles ne renferment que des cosinus. Ces formules sont … »*

suivent la formule donnant l'arc auxiliaire utilisé et celle donnant la demi-distance cherchée, leur démonstration et de nombreux exemples.

En 1844, François-Jacques Dubus (1791-1868), professeur d'hydrographie à Saint-Brieuc, publie un recueil de types de calculs de navigation et d'astronomie nautique à l'usage des marins du commerce[52]. Une seule méthode de réduction y est développée : celle de J.-Ch. de Borda. L'ouvrage fait l'objet d'une réédition, revue et complétée, en 1853.

Vincent-Marie Caillet (1811-1887), fils de Pierre Caillet, examinateur de la marine, professeur à l'École navale ainsi que dans des écoles d'hydrographie, publie en 1849 (ou 1848 ?) un « Traité élémentaire de navigation », version imprimée des cours qu'il a dispensés dans les établissements de formation maritime. L'ouvrage est réédité en 1857 et on y trouve démontrée et expliquée la solution de J.-Ch. de Borda, éventuellement allégée par la simplification de R. Dunthorne, ainsi que celle de Krafft-Mendoza avec mention des tables de Mendoza importées en France par le commandant Richard en 1844 ; la solution de W. Chauvenet y est mentionnée. L'idée d'une méthode indirecte est émise, la formulation restant limitée au premier ordre. Une 3e édition parait en 1861, sous le simple titre de « Traité de navigation », dans laquelle la solution de J.-Ch. de Borda est longuement présentée, avec ses différentes procédures d'observations et de calcul. Les solutions de Krafft-Mendoza et Chauvenet sont très brièvement évoquées en fin de chapitre. La 4e édition, publiée en 1868, ne présente, concernant les distances lunaires, que très peu de modifications par rapport à la précédente ; la solution de J. Garnett y est évoquée, au même titre que celle de Krafft-Mendoza.

En 1859 parait le « Cours de navigation et d'hydrographie » du professeur d'hydrographie Edmond Dubois (1822-1891). L'ouvrage est réédité en 1869 et, dans cette seconde édition, les deux méthodes directes de J.-Ch. de Borda et de Krafft-Mendoza, sont longuement démontrées et commentées sous tous leurs aspects. Il est intéressant de noter l'impression comparative de l'auteur sur les deux méthodes :

> *« En comparant l'ensemble de ce calcul à celui effectué par la méthode de Borda, il est difficile de dire si Mendoza a réellement abrégé le calcul des distances lunaires. En tous cas la méthode de Borda est plus courante et demande moins d'attention de la part du calculateur. »*

Aucune méthode indirecte ne figure dans l'ouvrage d'E. Dubois.

[52] F.-J. Dubus est également l'instigateur de la publication d'éphémérides simplifiées, à l'usage des marins, sous le titre de « Éphémérides maritimes » dont les éléments sont extraits de la Connaissance des temps, sans l'accord du Bureau des longitudes.

Vient ensuite l'ouvrage d'Alfred Ledieu (1830-1891), examinateur de la marine, paru en 1877 sous le titre « Les nouvelles méthodes de navigation, étude critique ». Concernant les méthodes directes, A. Ledieu retient en premier lieu la solution de J.-Ch. de Borda dont il écrit :

> *« Tout le monde connait la méthode de Borda, qui, en somme, est redevenue, pour le moment, la plus en usage, après des péripéties diverses*[53]*. »*

Toujours à propos de cette solution, A. Ledieu fait un aparté sur le « Recueil de problèmes d'astronomie nautique et de navigation » de Ch. Guépratte et les méthodes présentées. Il donne une intéressante analyse sur la génération des nombreuses solutions directes qui y figure et note pour terminer :

> *« Guépratte augmente encore le nombre des transformations précédentes (…). Mais aucun de ces procédés ne présente de supériorité réelle sur la méthode de Borda. – Au surplus, cette méthode elle-même est complètement en dehors des types de calculs journaliers de la navigation ; et nous ne craignons pas d'affirmer que sa longueur est la principale cause à laquelle il faut attribuer le discrédit qui a frappé dans ces dernières années l'emploi des distances lunaires à la mer, particulièrement parmi les jeunes officiers de marine. »*

A. Ledieu présente ensuite les méthodes directes de Krafft-Mendoza et de J. Garnett, cette dernière étant jugée plus brève que la précédente. Concernant les solutions indirectes, A. Ledieu présente les solutions de Bremicker et de W. Chauvenet, avec leurs démonstrations. Cette dernière solution lui inspire le commentaire suivant :

> *« La méthode de M. Chauvenet est très ingénieuse ; mais elle a le grave défaut d'exiger six tables* spéciales*, c'est-à-dire inhérentes à la méthode elle-même. En outre, bien que les logarithmes ne soient pris partout qu'avec quatre décimales, comme il faut en employer* seize*, le calcul finit pas être un peu long (…) »*

Il présente ensuite la solution de F.-C. Beuf et É. Perrin qui présente à ses yeux toutes les qualités de précision et de rapidité d'exécution. Il indique pour terminer la solution graphique d'A. Hue.

En 1891, le professeur d'hydrographie Joseph-Barthélémy Guilhaumon (1854- ?) publie, en deux volumes, les « Éléments de navigation et de calculs nautiques » dans lesquels la solution de J.-Ch. de Borda est seule développée. L'ouvrage est réédité en 1897 sous le titre de « Éléments de cosmographie et de navigation », en un seul volume. Les distances lunaires, qui ne figurent plus dans les programmes d'enseignement des formations des officiers de la marine marchande[54], ont été retirées de l'ouvrage. Le dernier ouvrage consacrant un chapitre aux distances lunaires est probablement celui d'Eugène Perret « Navigation, instruments, observations, calculs » publié en 1908[55]. Cet ouvrage n'expose que la solution de J.-Ch. de Borda.

Commentaires :

Deux écoles s'opposent entre les partisans d'une solution indirecte et ceux d'une solution directe. Les premiers pensent, à juste titre, disposer d'une méthode d'exécution plus simple et plus rapide puisque les logarithmes utilisés peuvent n'être qu'à 4 décimales et que, dans une certaine mesure, les hauteurs apparentes réfractées utilisées peuvent n'être qu'approchées ; la méthode étant d'exécution plus aisée, on peut penser qu'elle peut être d'application répétée à cours intervalle tant que les circonstances le permettent. Les seconds préfèrent utiliser une formulation exacte dans laquelle il est aussi proposé d'effectuer toutes les corrections dues aux conditions dans lesquelles se sont effectuées les observations que l'on conseille par ailleurs de multiplier afin, en utilisant des moyennes, de limiter les effets des erreurs accidentelles ; les opérations, lourdes en calcul puisqu'il faudra travailler à la seconde d'arc près, nécessitent l'emploi de logarithmes – ou de valeurs naturelles – à 6 ou 7 décimales ; leur exécution est donc longue et ces méthodes sont évidemment moins sujettes à être répétées à court intervalle. On peut aussi penser que les solutions indirectes, relativement faciles à mettre en œuvre comme celle de D. Thomson, ont trouvé leurs pratiquants les plus fervents à bord des navires de commerce, tandis que les solutions directes avaient plutôt les faveurs des officiers des marines militaires dont, au XIXe siècle, le niveau d'instruction scientifique est nettement supérieur à celui d'un capitaine au long cours. Cette assertion peut

[53] On ne sait lesquelles …
[54] Les programmes d'enseignement sont alors fixés par le décret présidentiel et l'arrêté du ministre de la Marine du 18 septembre 1893.
[55] Une simple mention du principe est encore faite dans le Cours de navigation de l'École navale de F. Marguet, 2e édition 1921.

évidemment être contredite puisque la méthode de Borda avait aussi ses adeptes au commerce, la formule étant générale, quel que soit le cas de figure, sans que l'application de règles de signe ne soit nécessaire.

De l'état incomplet qui vient d'être dressé, des noms reviennent fréquemment : Dunthorne, Borda, Krafft-Mendoza pour les solutions directes, Witchell et méthode générique pour les solutions indirectes, preuve que ces solutions furent les plus régulièrement utilisées. Les solutions originales de Chauvenet et Airy ont été retenues par certains auteurs mais apparaissent à la marge, de même que celle de Beuf et Perrin qui, de par sa simplicité – toute relative – aurait pu avoir un certain succès si du temps lui avait été laissé.

ANNEXE AU CHAPITRE 10

USAGE DES SPHERICAL TRAVERSE TABLES (H. RAPER)

Considérons un triangle sphérique ABC de côté (90° - a), (90° - b), (90° - c) :

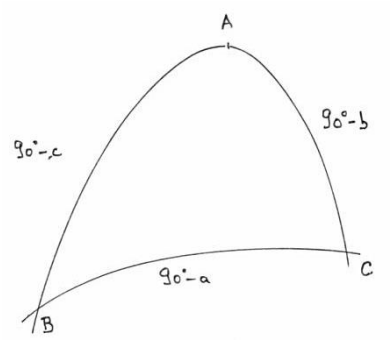


Fig : A10-1

La formule fondamentale de la trigonométrie sphérique relative à l'angle A et au côté a donne :

$$\cos A = \frac{\sin a - \sin b \,.\, \sin c}{\cos b \,.\, \cos c} = \sin a \,.\, \sec b \,.\, \sec c - \tan b \,.\, \tan c$$

On pose :

$$M = 100.\sec b \,.\, \sec c \quad \text{et} \quad N = 100.\tan b \,.\, \tan c$$

On obtient donc,

$$100.\cos A = M.\sin a - N \quad \text{ou} \quad M.\sin a = 100.\cos A + N$$

Les « spherical traverse tables » sont à double argument, b et c, et donnent en résultat les facteurs M et N, l'argument le plus petit étant en horizontal (en haut) et le plus grand en vertical (sur le côté gauche). On a ainsi, par exemple, dans le cas où c serait inférieur à b :

c →	42°		43°	
b ↓	M	N	M	N
...	...	...	...	...
62°	286,6	169,3	291,2	175,4
63°	296,4	176,7	301,2	183,0
64°	307,0	184,6	311,9	191,2
...	...	...	...	...

Donc, si on souhaite calculer l'angle A d'un triangle dont on connait les trois côtés, on évalue d'abord, grâce à cette table les facteurs M et N en fonction de b et de c, puis, à l'aide d'une table de point (traverse table) qui donne, en fonction d'une longueur h et d'un angle θ les quantités h.cos θ et h.sin θ, on détermine la quantité M.sin a en prenant M = h et θ = a. On effectue ensuite la soustraction M.sin a – N qui donne 100.cos A. On a donc ainsi accès directement au cosinus de l'angle A.

C'est la méthode utilisée par H. Raper pour évaluer les cosinus des angles à l'astre et à la Lune.

CHAPITRE 11

VERS UNE DISPARITION DE L'EMPLOI DE LA MÉTHODE ?

Le cours de l'histoire :

Dans son ouvrage « Les nouvelles méthodes de navigation, étude critique », publié en 1877, Alfred Ledieu écrit à l'article 67 :

> *« La détermination des longitudes à la mer par le moyen des* chronomètres*, est incontestablement la plus courte et la plus facile des méthodes susceptibles d'être employées. Mais il est certain aussi que le degré de précision de cette détermination, dépend uniquement de la perfection plus ou moins complète des montres que l'on a entre les mains. Comme nous le faisons voir dans la seconde partie de notre travail, les chronomètres actuels sont assez perfectionnés pour qu'il y ait possibilité de tenir compte par des formules, ou, plus pratiquement, par des procédés graphiques, des variations* normales *des marches. Mais les variations anormales, soit les perturbations de celles-ci, ne sont pas de nature, en général, à être fixées avec une certitude absolue.*
>
> *D'abord, si l'on a qu'un ou même deux chronomètres, de pareils effets laissent le navigateur complètement désarmé ; et le recours aux distances lunaires devient une* nécessité absolue.
>
> *Quand on a trois chronomètres, ce qui est le cas général pour les longues navigations, si l'un des trois accuse une brusque variation dans ses comparaisons journalières avec les autres, on le laisse d'ordinaire de côté ; et on suit exclusivement les deux autres. Cependant il n'est pas mathématiquement certain que ce ne soit pas celui-là qui demeure le bon ; car les deux derniers ont pu varier tous deux dans le même sens. La probabilité, il est vrai, est que les choses se passent telles qu'on les suppose. Mais ce n'est jamais qu'une probabilité (…)*
>
> *La solution de ce problème comporte toujours avec elle un certain* aléa*, et demande d'ailleurs beaucoup de tact et d'instinct. Il y a donc encore ici* nécessité *ou au moins extrême utilité pour un navigateur consciencieux, de contrôler le point déduit des montres par les distances lunaires.*
>
> *En résumé, à tous égards, l'emploi des distances est une méthode à conserver, surtout en apportant aux observations et aux opérations les soins méticuleux indiqués aux n° 76 et 77*[56]*. »*

Vingt-cinq ans plus tard, le capitaine de frégate Émile Guyou, membre de l'Académie des sciences et du Bureau des longitudes, fait, dans un article paru dans la Revue maritime de juin 1902, un constat et annonce la disparition prochaine des distances calculées dans la Connaissance des temps :

> *« La méthode des distances lunaires qui, pendant près d'un siècle, a rendu tant de services aux navigateurs et aux explorateurs des continents, est tombée aujourd'hui complètement en désuétude.*
>
> *Les voyageurs terrestres l'ont laissé de côté parce que la précision dont elle est susceptible n'est plus en rapport avec les besoins actuels de la géographie.*
>
> *Pour la navigation, cette précision serait encore assez grande pour rendre service dans bien des cas. Un observateur exercé, en effet, muni d'un bon instrument, pourrait en déduire la longitude du navire avec une approximation de 30 secondes d'heure, c'est-à-dire telle que la région d'incertitude reste comprise dans le cercle que peut embrasser la vue d'un marin élevé d'une quinzaine de mètres au-dessus de l'eau. Mais la grande extension de l'usage des chronomètres, le degré de perfection auquel sont parvenus ces instruments, la diminution de durée des traversées, ont rendu si rares les occasions de recourir à cette méthode qu'il n'y a plus aujourd'hui d'observateurs réellement exercés. De plus, l'instrument qui était autrefois exclusivement consacré aux distances, le cercle de Borda, a été définitivement abandonné par les marins ; quant au sextant, à part des circonstances spéciales dont nous parlerons plus loin, il ne peut donner des résultats utilisables qu'à la condition de faire subir à ses indications diverses corrections qui exigent une étude préalable très minutieuse de l'instrument, et de telles précautions ne sont pas à la portée de tous. Aussi, les résultats qu'obtiennent les officiers qui se risquent de temps à autre à observer et à calculer une distance lunaire sont si peu encourageants qu'aucun d'eux n'est tenté de renouveler l'épreuve.*

[56] Ces articles sont relatifs à l'exactitude à apporter dans les calculs et aux précautions à prendre pour l'observation.

Il résulte de là que les nombreuses distances que publient chaque année les recueils d'éphémérides astronomiques restent pratiquement sans emploi.

Bien que cet état de choses fût connu depuis longtemps, ces éléments étaient conservés en prévision des cas, toujours possibles, où des navires auraient besoin, pour leur sécurité, de recourir à la méthode des distances. Mais cette raison ne serait admissible que si la prédiction de ces éphémérides était indispensable à l'application de la méthode. Or, on sait qu'il n'en est rien ; les distances de la Connaissance des temps et du Nautical Almanac servent simplement à abréger le calcul (...)

Il est évident, dès lors, que le travail et les frais qu'exigent chaque année le calcul et la publication des distances lunaires sont devenus hors de proportion avec le bénéfice très aléatoire qu'en pourraient tirer les marins. Aussi, le Bureau des longitudes, après s'être assuré de l'assentiment du Ministère de la marine, a-t-il décidé de supprimer cette éphéméride de la Connaissance des temps. Le volume actuellement en préparation, celui de 1905, ne la contiendra plus. »

L'article retrace ensuite les grandes lignes de l'histoire de la méthode des distances lunaires utilisée pour déterminer la longitude et se termine sur des prescriptions sur un avenir possible de la méthode en utilisant des petites distances. L'auteur note en particulier :

« Lorsqu'en effet, aujourd'hui, un marin veut observer une distance, il choisit naturellement une de celles qui sont données dans les éphémérides, et, par conséquent, le plus souvent une distance assez grande. Or, le fait même que la distance est grande est une condition très défavorable à la précision de l'observation. La difficulté de l'observation en effet, et par suite l'erreur de pointé, croît avec la distance (...). Quand les distances sont petites, au contraire, les deux astres restent collés l'un à l'autre malgré les tremblements de la main, et l'observateur peut à loisir perfectionner son pointé. »

Émile Guyou conclut ainsi son article :

« En résumé, dans l'état actuel des choses, et malgré tous les arguments excellents que l'on peut faire valoir en faveur de la méthode des distances lunaires, c'est un fait certain que cette méthode est complètement abandonnée par les marins.

La cause de ce discrédit consiste moins dans la longueur et dans la difficulté des calculs que dans l'insuffisance excessive des résultats que donne actuellement cette méthode en service courant.

L'emploi exclusif des petites distances parait être le seul moyen pratique et efficace d'obtenir une plus grande précision (...) »

En ancien marin prudent, Émile Guyou va dans le même sens qu'Alfred Ledieu : la méthode des distances lunaires reste une nécessité pour faire face à une défaillance des chronomètres, ou tout simplement pour exercer leur contrôle. Il convient donc de savoir la mettre en œuvre sans, pour autant, que la Connaissance des temps ne donne des éléments facilitant le calcul : les distances lunaires doivent donc toujours figurer dans les programmes d'enseignement[57].

La fiabilité des chronomètres usuels puis l'apparition[58] de la télégraphie sans fil (TSF), qui se généralisera à bord des navires pendant la guerre de 1914-1918, permettant de déterminer, chaque jour si nécessaire, leur état absolu conduiront à l'abandon de la méthode des distances lunaires.

L'abandon n'est cependant pas tout à fait définitif comme on va le voir.

L'aventure du lieutenant de vaisseau Pierre Guillaume[59] :

À la fin de son affectation en Indochine, le lieutenant de vaisseau Pierre Guillaume décide de rentrer en France à bord d'un petit ketch de 8 m de long. Le 20 avril 1956, il appareille de la rade de Cam Ranh avec un équipier qui débarquera à Singapour. P. Guillaume continue seul vers le détroit de la Sonde qu'il franchit le 12 juin puis vers l'archipel des Chagos. Début juillet, du fait du mauvais temps, il reste sans observations plusieurs jours puis,

[57] On a mentionné précédemment le cours de navigation de F. Marguet ; ajoutons que des instructions sur le mode opératoire des distances lunaires figureront dans le Nautical Almanac jusqu'en 1924.
[58] Les radio-signaux horaires ont été mis en place en 1905 aux États-Unis et 1910 en France.
[59] Les éléments de ce paragraphe sont extraits du livre de souvenirs de Pierre Guillaume : « Mon âme à Dieu, mon corps à la patrie, mon honneur à moi » publié en 2006. Le personnage, hors normes, a inspiré au romancier Pierre Schoendoerffer celui du « Crabe-Tambour » dans l'ouvrage éponyme publié en 1976.

dans des conditions de navigation épouvantables, son chronomètre s'arrête et son récepteur radio tombe en panne définitive. Il arrive à remettre en marche le chronomètre mais hésite sur la date du jour et, évidemment, ignore l'heure du méridien de Greenwich. Le premier quartier de la Lune lui permet de retrouver la date avec certitude (le 14 juillet) et, un peu plus tard, la Lune et la planète Mars vont lui permettre de retrouver l'heure avec une précision suffisante.

Il constate une nuit que la Lune et Mars vont passer au voisinage du zénith à peu de temps d'intervalle. Dans ces conditions, il est possible de déterminer précisément l'heure qu'indique le chronomètre lors de la culmination de chacun des deux astres à l'aide de la méthode dites des circumzénithales correspondantes. Ces heures sont ici très peu différentes de celles des passages au méridien des deux astres. Une simple soustraction donne l'intervalle de temps moyen entre les deux passages au méridien que l'on convertit en intervalle de temps sidéral qui est tout simplement, et à peu de choses près, la différence entre les ascensions droites des deux astres. Reste à retrouver, par interpolation dans les Éphémérides nautiques, l'instant correspondant, en temps civil de Greenwich (la méthode utilisée est détaillée en annexe 11-1). Pierre Guillaume retrouva ainsi son heure à 30 secondes près écrit-il, ce qui lui assurera un atterrissage sans problème sur Diego-Garcia le 27 juillet 1956 au matin.

On ne peut ici que reconnaître la qualité de la formation dispensée à l'École navale qui, à cette époque[60], savait inculquer à ses élèves une connaissance profonde de la science nautique et des savoir-faire associés.

Remarques : on s'interroge cependant sur les nécessaires mesures de hauteurs correspondantes des deux astres : comment P. Guillaume a-t-il pu les mesurer précisément de nuit ? On peut situer la date des observations au 25 juillet où, dans la zone où se trouvait P. Guillaume, la Lune passait au méridien vers 1 h 45 locales à une hauteur d'environ 89° et Mars 2 heures plus tard à une hauteur de 88°.

Méthode des droites de hauteur :

En 1966, le Journal of Navigation du Royal Institute of Navigation publie un court article de l'aviateur et navigateur britannique Francis Chichester[61] (1901-1972) intitulé « Longitude without Time ». À la suite de la Transat anglaise de 1960 où l'un des concurrents, à l'instar de Pierre Guillaume, s'est retrouvé en perte totale de l'heure, sans récepteur radio, F. Chichester a cherché à mettre au point une méthode simple de détermination de l'heure qui ne présente pas de difficultés de calcul ; il note au début de son article :

> *« The amount of computation to work out a lunar distance was astounding and the idea of undertaking this calculation at sea in a small yacht, especially single handed, horrified me. Pondering the problem I thought of a simple solution. »*

Suite à ces considérations, il expose, en peu de lignes, une méthode permettant de retrouver l'heure du méridien origine, et par là même la longitude, à l'aide de deux droites de hauteur réduites au même instant, l'une de la Lune, l'autre du Soleil ou d'une étoile ou encore d'une planète. À la suite de l'article de F. Chichester, la méthode est analysée et formalisée par Donald Harry Sadler[62].

On suppose ici la latitude φ connue avec précision ; l'heure du méridien origine est connue approximativement (à 30 minutes près par exemple) et on mesure, simultanément et avec précision, les hauteurs du Soleil et de la Lune. Le problème consiste à trouver l'avance (ou le retard) du chronomètre ainsi que la longitude du lieu d'observation.

L'heure, approximative, permet d'effectuer un calcul d'angle horaire local pour chacun des deux astres : la latitude et la hauteur de chaque astre sont en effet connues, de même que, grâce à un almanach nautique, les déclinaisons à l'instant supposé des observations. On détermine ensuite dans l'almanach l'angle horaire au

[60] Pierre Guillaume est entré à l'École navale en 1945.
[61] Rendu célèbre par ses vols en solitaire dans la zone du Pacifique, sa victoire dans la Transat anglaise en solitaire de 1960 et son tour du monde, toujours en solitaire, avec une escale unique à Sydney en 1966 ; il a été anobli en 1967 par la reine Elisabeth II.
[62] 1908-1987, mathématicien et astronome, superintendant of her Majesty's Nautical Almanac Office de 1937 à 1971. La méthode fait aussi l'objet d'une autre analyse par J. J. Evans parue dans ce même Journal of Navigation.

méridien origine de chaque astre puis, par différence avec l'angle horaire local correspondant on calcule deux valeurs de longitude : G_S pour l'observation du Soleil et G_L pour celle de la Lune. On peut ensuite évaluer les azimuts des deux astres et reporter sur un graphique (figure 11-1) :

- les points X_S et X_L qui sont les points déterminatifs Lalande des deux droites de hauteur correspondant aux observations,
- les deux droites de hauteur qui se coupent en un point X situé dans le Nord ou dans le Sud du parallèle de latitude φ.

Si l'heure donnée par le chronomètre est exacte, on devrait obtenir $G_S = G_L$ et un point X confondu avec X_S et X_L sur le parallèle de latitude φ. Il n'en est rien dans le cas général et la méthode consiste maintenant à évaluer à quelle heure se produira la conjonction des trois points.

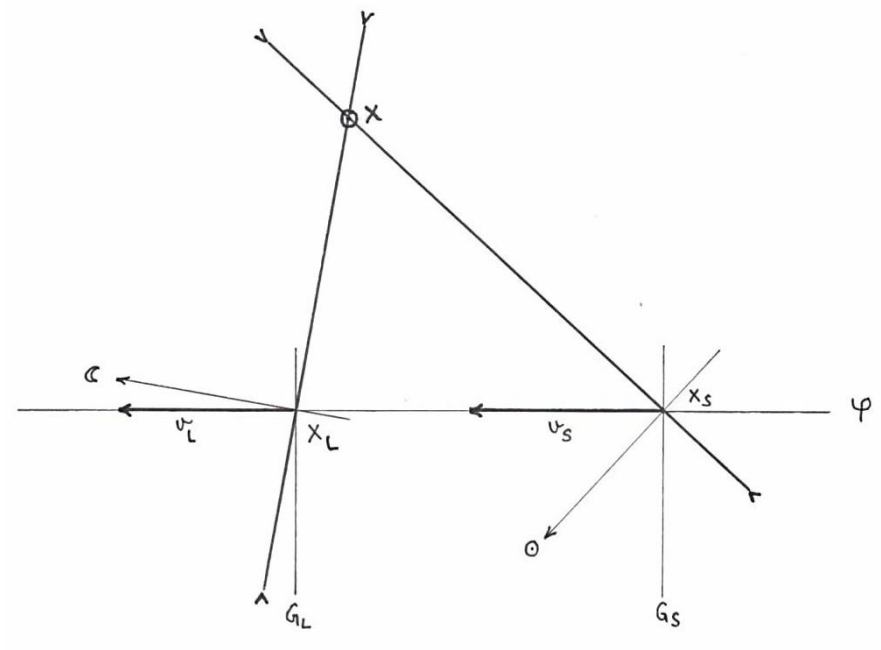


Fig : 11-1

Sur la sphère terrestre, la projection du Soleil et le cercle de hauteur associé dans la mesure, se déplace en longitude à la vitesse angulaire v_S, de l'ordre de 15°/h ; il en est de même pour la Lune, mais à une vitesse moindre v_L d'environ 14,5°/h. Dans le cas de figure représenté, le Soleil « rattrape » la Lune et l'on peut déjà avancer que le chronomètre retarde : il faudra ajouter à l'heure considérée l'intervalle Δt de temps nécessaire au point X_S pour rejoindre le point X_L ; l'intervalle de temps cherché est évidemment :

$$\Delta t = \frac{G_L - G_S}{v_S - v_L}$$

Les longitudes ayant été déterminées il reste à calculer précisément les vitesses angulaires pour lesquelles il est nécessaire de tenir compte de l'effet de la variation de la déclinaison sur l'angle horaire puisque l'on considère ici les déplacements des points déterminatifs X_L et X_S. Les vitesses cherchées ont pour expression :

$$v_S = [\mathrm{AHvp}]_0^1 \pm [D_S]_0^1 . \sec D_S . \cot S \quad ; \quad v_L = [\mathrm{AHap}]_0^1 \pm [D_L]_0^1 . \sec D_L . \cot L$$

Dans ces expressions, les quantités entre crochets sont les variations horaires des angles horaires au premier méridien et des déclinaisons relevées dans l'almanach ; ces dernières sont algébriques et viendront s'additionner à la variation d'angle horaire si l'astre est dans l'Est de l'observateur, se retrancher si l'astre est dans l'Ouest. Les angles notés S et L sont les angles à l'astre du Soleil et de la Lune de leur triangle de position respectif. Ces vitesses angulaires sont exprimées en minutes et décimales par heure. Si on exprime de même la différence de longitude $G_L – G_S$ en minutes, le résultat Δt se trouvera exprimé en heures et décimales.

Dans le cas où le chronomètre avance, le point X_L est situé dans l'Est du point X_S – le Soleil a dépassé la Lune – et le Δt cherché est négatif.

Sans utiliser les variations horaires, on peut aussi raisonner, comme l'a fait F. Chichester, à l'aide de deux « fausses positions » entre lesquelles on interpolera (figure 11-2) :

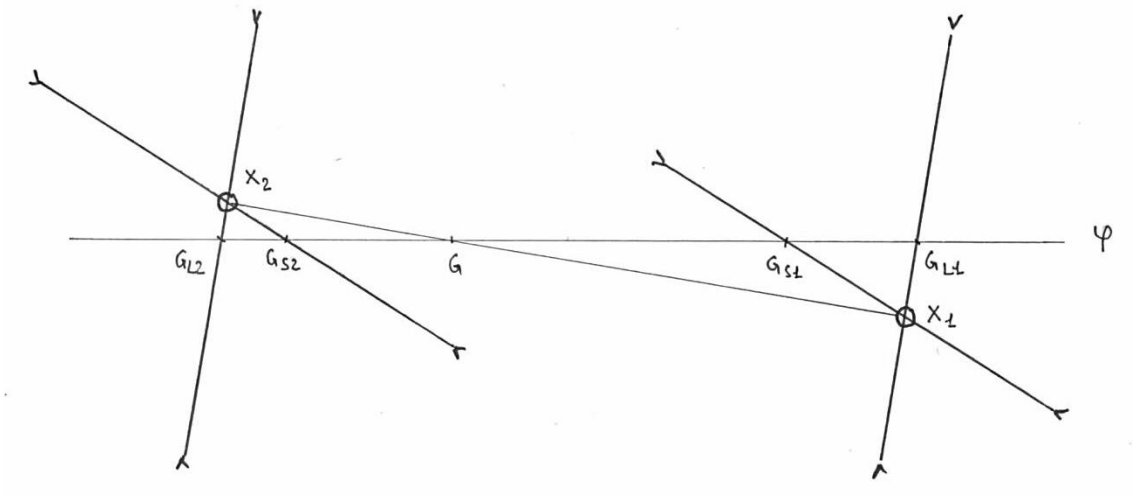


Fig : 11-2

La latitude φ étant connue, on effectue deux calculs pour deux valeurs de l'heure au méridien origine encadrant l'heure approximative donnée par le chronomètre. Les deux instants sont choisis arbitrairement, par exemple deux heures rondes successives. Les droites de hauteurs correspondantes vont définir deux points X_1 et X_2 dont les latitudes encadrent la latitude φ. L'heure cherchée, et la longitude correspondante, s'évaluent directement par interpolations linéaires entre les deux points :

X_1, G_1	φ_1	T_1
X, G ?	φ	T ?
X_2, G_2	φ_2	T_2

Un exemple complet figure en annexe 11-2.

Les méthodes que l'on vient de décrire restent imprécises. En effet, la latitude utilisée dépend d'une observation antérieure (ou postérieure) – la méridienne – décalée de peut-être plusieurs heures par rapport à celle des observations ; les éléments d'estime, connus avec plus ou moins de précision, interviennent donc dans sa détermination. Les hauteurs, soumises notamment à la dépression apparente de l'horizon, sont également entachées d'incertitudes plus ou moins grandes. Seules, les déclinaisons peuvent être extraites de l'almanach avec une incertitude négligeable. Sur la base de l'exemple traité en annexe 11-2, si on retient une incertitude de 4' sur la latitude et de 2' sur les hauteurs, l'incertitude sur l'angle horaire de la Lune serait de 4,2' et sur celui du Soleil de 11,3', donc de 15,5' sur la différence des angles horaires, ce qui conduit à 30 minutes d'incertitude sur l'avance ou le retard du chronomètre donc d'environ 7,5° sur la détermination de la longitude … La faible incidence du segment X_1X_2 sur la carte par rapport à l'image du parallèle de latitude φ rend compte de l'imprécision du résultat.

Sur le plan de la généralité, et de la commodité d'application, de la méthode, on préfèrera l'utilisation des vitesses angulaires qui permettent de traiter des observations simultanées de la Lune et d'un autre astre dont les droites de hauteur correspondantes sont parallèles (les azimuts sont égaux ou diffèrent de 180°), la circonstance la plus favorable étant d'observer ces astres au voisinage de leur passage au premier vertical.

Les travaux de J. S. Letcher (1977) :

Dans son livre publié en 1977 « Self-Contained Celestial Navigation with HO208[63] », John Seymour Letcher (1941-2018), scientifique et navigateur américain, expose des notions de navigation astronomique devenues inhabituelles dans cette seconde moitié du XXe siècle[64].

Partant de son expérience de navigateur solitaire à bord d'un petit voilier, il revient sur le risque de perte de la date et de l'heure du méridien origine, risque réel lorsque l'on est sans radio et seulement équipé d'un simple chronomètre mécanique. Il explique donc comment retrouver la date avec la Lune puis comment déterminer l'heure et la longitude par application de la méthode des distances lunaires. La réduction de la distance observée s'effectue en deux temps :

- la correction de réfraction astronomique est donnée par un abaque et une courte table,
- la correction de parallaxe de la Lune s'effectue par application d'une unique formule prenant en compte les termes du premier ordre du développement ainsi que le terme prépondérant du second ordre.

La décomposition est identique à celle imaginée par N. Maskelyne dans le British Mariner's Guide, la formulation de la correction de parallaxe étant relativement plus simple … tout au moins si l'on dispose d'une calculatrice. Les formules et un exemple sont donnés en annexe 11-3.

Les almanachs actuels ne donnent plus les distances entre le centre de la Lune et celui du Soleil ainsi que de quelques étoiles zodiacales toutes les trois heures. J. S. Letcher indique donc comment les calculer à partir des données couramment fournies par ces ouvrages.

Il expose ensuite une méthode pour retrouver l'heure du méridien de référence avec les droites de hauteurs. Celle-ci est prévue s'appliquer au moment des crépuscules où on observera les hauteurs d'au moins trois étoiles et celle de la Lune. Si les observations sont nettes et précises, la connaissance de l'heure étant approximative, on devrait constater que les droites correspondant aux hauteurs d'étoiles se coupent en un point de latitude φ et de longitude G*, la droite de Lune étant décalée par rapport à ce point (figure 11-3). La recherche de l'avance ou du retard (cas de figure) du chronomètre, Δt, est identique à celle effectuée avec le Soleil : on forme la différence de longitude, sur le parallèle de latitude φ, G_L – G* que l'on divise par la différence des vitesses en longitude v* – v_L, en prenant ici v* = 15° 02' 28''/h.

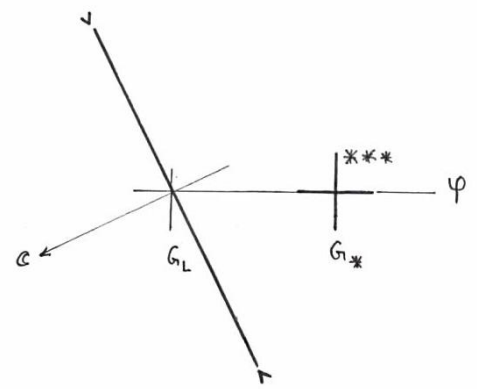


Fig : 11-3

[63] Les tables américaines HO208 servent à calculer les éléments d'une droite de hauteur ; elles ont été conçues par J. Y. Dreisonstok, officier de l'US Navy en 1928.
[64] Ces notions et formules seront reprises, sous la même forme, dans l'ouvrage de H. Shufeldt et K. Newcomer, « The Calculator Afloat » publié en 1984.

Toujours dans le cas de la recherche de l'heure du méridien origine, J. S. Letcher indique enfin comment traiter le cas de l'observation simultanée de la Lune et d'un autre astre dans un même azimut (ou à des azimuts opposés), voisin de 90° ou 270° (premier vertical) : recherche d'une plage horaire d'observation et procédure opératoire.

Tables de B. Stark :

Bruce Stark (1926-2021) est un expert américain en navigation. Après 20 ans de travail, il publie en 1995 les « Stark Tables for Clearing the Lunar Distance » ; l'ouvrage sera réédité en 1997 et 2010.

Pour calculer la distance vraie résultant de l'observation, Bruce Stark utilise une méthode directe basée sur la formule de Richard Dunthorne qui est transformée pour n'utiliser que la ligne trigonométrique verse haversine. Le calcul, manuel, est entièrement logarithmique et le document qui comporte 315 pages se décompose essentiellement en :

- tables de correction des hauteurs en fonction de la hauteur apparente réfractée et de la parallaxe horizontale, pour la Lune et pour le Soleil, les planètes et les étoiles ;
- tables donnant accès au facteur logarithmique K, en deux parties, l'une pour les hauteurs de Lune, l'autre pour celles de l'astre ;
- table donnant les logarithmes[65] des haversines d'un angle ;
- table donnant les logarithmes gaussiens (ou logarithmes d'addition) ;
- table donnant les logarithmes des cosinus d'un angle ;
- tables des logarithmes proportionnels (ou logistiques) ;
- diverses tables de conversion.

Le document donne des instructions d'emploi détaillées, accompagnées d'exemples et de grilles de calculs. Il n'y a par contre aucune indication sur les formules utilisées. L'ensemble de ces tables permet de réduire une distance lunaire en utilisant une formulation exacte, de calculer une distance à partir des données d'un almanach nautique et de calculer les hauteurs si celles-ci n'ont pas été observées. La formulation employée et quelques notions sur les logarithmes gaussiens sont données en annexe 11-4.

Frank Reed et le forum NavList :

L'Américain Frank Reed est un historien de la navigation, professeur de science nautique et animateur du forum Internet NavList dédié à la préservation et la pratique de la navigation astronomique et autres méthodes de navigation traditionnelle. Le site Internet qui abrite le forum « navlist.net » met à la disposition des utilisateurs de nombreux documents ainsi qu'un almanach nautique fournissant notamment les distances lunaires pré-calculées. Frank Reed dispense ses enseignements, dont l'un est consacré aux distances lunaires, sous forme de stages au Mystic Seaport Museum ou en ligne.

Observer une distance lunaire et calculer la longitude au XXIe siècle :

La séquence d'observations reste, dans le principe, la même qu'au XVIIIe siècle : mesure des hauteurs de la Lune et de l'astre et mesure de la distance. D'une manière générale, l'observateur sera seul : les observations ne seront donc pas simultanées et il conviendra de les réduire à une même heure. Si une position approchée est connue, on pourra n'observer que la seule distance, les hauteurs vraies et apparentes réfractées étant calculées.

[65] Il s'agit en fait des cologarithmes afin de ne travailler qu'avec des valeurs positives ; il en est de même pour la table des cosinus.

Pour le calcul de la distance vraie observée, ou la réduction de la distance, l'observateur a évidemment l'embarras du choix des méthodes. On préfèrera une méthode directe, naturelle, qui consiste à calculer l'angle ΔZ entre les verticaux des deux astres dans le triangle apparent réfracté $ZL_{ar}A_{ar}$ (figure 8-1), puis, cet angle étant connu, à calculer la distance vraie D dans le triangle vrai ZAL. On applique ainsi deux fois la formule fondamentale à l'aide d'une calculatrice scientifique, sans avoir à appliquer de règles de signe particulières. On pourra aussi utiliser la formule de R. Dunthorne (chapitre 8 et annexe 8-1) qui donne rapidement le résultat.

Il faut ensuite évaluer, à partir des données d'un almanach, deux distances vraies calculées encadrant la distance vraie issue de l'observation. Là de même, les distances seront facilement obtenues par application de la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique à partir des déclinaisons des deux astres et de leur différence d'angles horaires (ou d'ascensions droites).

L'ensemble des formules est rappelé en annexe 11-5.

Commentaires :

On remarquera pour commencer qu'à la fin du XIXe siècle la désaffection de la méthode des distances lunaires due à la généralisation de l'emploi des chronomètres, devenus fiables et relativement bon marché, est à rapprocher d'une même désaffection de la navigation astronomique, à la fin du XXe siècle, résultant de la mise à disposition du public de systèmes de navigation satellitaire dont le niveau de précision n'était pas imaginable il y a encore une cinquantaine d'années[66]. D'un cas comme d'un autre, on passe d'une méthode demandant une certaine expérience de l'observation et gourmande en calculs à quelque chose de plus accessible, de plus permanent et, simultanément, de plus précis. On remarque donc que les marins professionnels, civils comme militaires, vont abandonner successivement, avec environ un siècle d'écart, les distances lunaires puis la navigation astronomique classique[67].

Dans un premier temps, les méthodes de navigation anciennes ont été « récupérées » par des marins qui ont été, ou risquaient d'être, exposés à des avaries majeures comme la perte de la date et de l'heure. Ensuite, les progrès technologiques ont fait que, depuis déjà au moins un quart de siècle, la probabilité de ce genre d'évènement soit devenue extrêmement faible : une simple montre à quartz étanche coûtant quelques dizaines d'euros a une marche diurne très faible – qu'il est cependant nécessaire de contrôler – et peut ainsi donner accès à l'heure UT pendant une très longue durée. Ces techniques anciennes ont sans doute perdu une partie de leur caractère sécuritaire mais sont devenues des éléments de culture scientifique qui font l'objet d'une pratique par des marins – ou des amateurs d'astronomie nautique – curieux et passionnés, en remarquant au passage que les outils de calcul informatique simplifient considérablement les opérations permettant ainsi aux observateurs de se consacrer sur les visées qu'ils pourront répéter à loisir.

Il a été question dans ce chapitre de la méthode des droites de hauteur telle que présentée par F. Chichester et J. S. Letcher. Ce procédé, basé sur la connaissance précise de la latitude et des calculs d'angle horaire, est naturellement affecté de la même imprécision que celle qui a été mise en évidence par l'abbé de La Caille concernant la méthode conçue par P.-C. Lemonnier et A.-G. Pingré.

Enfin, on a remarqué que les tables de B. Stark permettent d'avoir accès à un résultat précis après, malheureusement, une suite d'opérations un peu obscure pour le profane ; il est donc dommage que le document n'ait pas été complété par les formulations employées permettant de comprendre le déroulé du calcul et, par là même, d'effectuer les opérations avec une calculatrice scientifique programmable ou non.

[66] Il ne faut pas oublier que plusieurs de ces systèmes satellitaires (dont le GPS) ont été conçus tout d'abord à des fins militaires et que le gestionnaire peut dégrader la précision comme il le souhaite. De même, les émissions peuvent être, intentionnellement ou non, brouillées dans certaines zones.

[67] La convention internationale sur les normes de formation des gens de mer impose toujours l'enseignement de la navigation astronomique. On ne peut malheureusement que constater que sa pratique réelle est devenue très occasionnelle, voire inexistante.

ANNEXES AU CHAPITRE 11

ANNEXE 11-1

CULMINATIONS DE PIERRE GUILLAUME

Le passage d'un astre à proximité du zénith (circumzénithal) permet d'observer des hauteurs correspondantes, de part et d'autre du méridien sur un bref intervalle de temps. Pour trouver l'heure de la culmination, on applique la procédure d'observation préconisée par l'amiral Perrin[68] qui indique de commencer les observations une dizaine de minutes avant le passage au méridien, de les cesser environ 5 minutes avant, d'observer la culmination, puis de procéder aux observations symétriques après le passage au méridien. On prend ainsi une série de hauteurs « montantes », une autre de hauteurs égales « descendantes » en notant à chaque fois l'heure indiquée par le chronomètre. L'heure de la culmination est ainsi la moyenne des heures relevées.

Soit, dans le cas de figure, A_1 l'heure indiquée par le chronomètre à l'instant de la culmination de la Lune et A_2, postérieure, celle relative à la culmination de la planète. On admettra ici que P. Guillaume s'est mis à la cape pour faire ses mesures, le déplacement de son bateau sur la durée des opérations pouvant alors être considéré comme négligeable ; d'autre part, latitude du bateau et déclinaison de la Lune sont très voisines. L'angle au pôle de culmination est donc très faible ce qui permet de dire que les heures relevées au chronomètre sont celles des passages au méridien des deux astres.

La relation générale des temps simultanés écrites pour les heures A_1 et A_2 donne :

$$\text{Lune, heure } A_1\text{: } AHsp_1 = AHLg_1 + G + ARL_1$$

$$\text{Planète, heure } A_2\text{: } AHsp_2 = AHag_2 + G + ARa_2$$

Les deux astres passent au méridien, les angles horaires locaux sont donc nuls et on a, par différence membre à membre :

$$AHsp_2 - AHsp_1 = ARa_2 - ARL_1$$

Le membre de gauche est la différence de temps sidéral[69] entre les deux instants relevés, soit :

$$AHsp_2 - AHsp_1 = (A_2 - A_1).1.002738 = ARa_2 - ARL_1$$

Cette relation donne accès à la différence des ascensions droites qu'il faut ramener à la même heure. Dans le cas de figure, on corrigera, à l'aide des données des Éphémérides, l'ascension droite de la planète pour la ramener à l'heure d'observation de la Lune[70] ; on la notera ARa_1. On dispose donc maintenant de la différence des ascensions droites des deux astres au même instant : $ARa_1 - ARL_1$.

Il reste à chercher, par interpolation dans les Éphémérides, l'heure Tcp_1 correspondante au méridien de Greenwich. L'état absolu du chronomètre est alors $(Tcp_1 - A_1)$.

[68] Le mode opératoire est indiqué dans les « Nouvelles tables destinées à abréger les calculs nautiques », par l'amiral Perrin.
[69] La conversion de temps moyen en temps sidéral et réciproquement était effectuée, à l'époque, par une table figurant dans les documents usuels de navigation (tables de Friocourt par exemple).
[70] Si l'intervalle de temps entre les deux observations est inférieur à 1 heure, la variation correspondante d'ascension droite de la planète pourra être négligée.

ANNEXE 11-2

EXEMPLE D'APPLICATION DE LA MÉTHODE DES DROITES DE HAUTEUR

Le 13 septembre 2020, la latitude étant φ = 50° N et la longitude estimée G_e = 28° 30' W, on observe simultanément à 16 h 00 m 00 s lues au chronomètre le Soleil et la Lune. Les hauteurs vraies des centres des deux astres sont respectivement H_S = 35° 31' 12'' et H_L = 22° 10' 48''. Le chronomètre indique l'heure UT à un quart d'heure près. Calculer l'avance ou le retard du chronomètre et la longitude du lieu d'observation.

Extrait de l'almanach nautique :

UT	Soleil		Lune	
	AHvp	D	AHap	D
16 h 17 h	61° 04' 48'' 76° 05' 00''	N 3° 26' 36'' N 3° 25' 42''	109° 58' 36'' 124° 24' 30''	N 22° 55' 30'' N 22° 50' 30''

Les angles horaires locaux du Soleil et de la Lune se calculent par l'une des formules indiquées en annexe 3-1.

Compte tenu des données, on obtient pour UT = 16 h rondes :

Soleil		Lune	
AHvp = AHvg =	61° 04' 48'' 33° 30' 38''	AHap = AHag =	109° 58' 36'' 82° 19' 10''
G_S =	W 27° 34' 10''	G_L =	W 27° 39' 26''

La différence des longitudes trouvées est $G_L - G_S$ = 5' 16'' (le chronomètre retarde).

A l'aide des éléments des triangles de position, on évalue les angles à l'astre : S = 25,850° et L = 43,466°. L'évaluation des vitesses en longitudes s'effectue en relevant les variations horaires des angles horaires et des déclinaisons dans l'extrait de l'almanach. On utilise ensuite les formules[71] :

$$v_S = [\mathrm{AHvp}]_0^1 - [\mathrm{D_S}]_0^1 . \sec \mathrm{D_S} . \cot \mathrm{S} \,;\, v_L = [\mathrm{AHap}]_0^1 - [\mathrm{D_L}]_0^1 . \sec \mathrm{D_L} . \cot \mathrm{L}$$

Avec : $[\mathrm{AHvp}]_0^1 = 15°\ 00'12'', [\mathrm{D_S}]_0^1 = -0'\ 54'', [\mathrm{AHap}]_0^1 = 14°\ 25'54'', [\mathrm{D_L}]_0^1 = -5'00''$.

Le calcul donne ensuite : v_S = 15° 00' 12'' + 1' 52'' = 15° 02' 04'', v_L = 14° 25' 54'' + 5' 44'' = 14° 31' 38'', soit une différence $v_S - v_L$ = 30' 26''. Le retard du chronomètre est ainsi δt = 0 h 10 m 23 s.

Le calcul de longitude effectué pour UT = 16 h 10 m 23 s, φ = 50° N, avec le Soleil comme avec la Lune, donne G = 30° 10' W.

Si on applique la méthode décrite par F. Chichester, un premier calcul fait pour UT = 16 h donne une latitude du point d'intersection des deux droites de hauteur de 50° 02,7' N. Le calcul, fait pour UT = 16 h 30 donne une latitude de 49° 54,9' N. L'interpolation linéaire donne directement une heure UT = 16 h 10 m 23 s.

[71] Signe moins entre les deux termes puisque les deux astres sont dans l'Ouest de l'observateur et variations horaires des déclinaisons négatives puisqu'elles décroissent.

ANNEXE 11-3

FORMULES EMPLOYÉES PAR J. S. LETCHER

Correction de réfraction astronomique :

On utilise ici une expression simplifiée donnant, en minutes, la réfraction astronomique, pour la Lune, R_L et l'astre R_A :

$$R_L = 0{,}95.\cot H_{arL} \quad \text{et} \quad R_A = 0{,}95.\cot H_{arA}$$

La correction correspondante, C_1, de la distance se déduit du développement limité (annexe 7-1) au premier ordre :

$$C_1 = 0{,}95.\cot H_{arL}\,.\cos\alpha + 0{,}95.\cot H_{arA}\,.\cos\beta$$

Remplaçant ensuite cos α et cos β par leurs expressions en fonction de la distance d et des hauteurs apparentes réfractées, on obtient, après simplification :

$$C_1 = \frac{1{,}90}{\sin d}.\left[\frac{1}{2}.\left(\frac{\sin H_{arA}}{\sin H_{arL}} + \frac{\sin H_{arL}}{\sin H_{arA}}\right) - \cos d\right] = \frac{1{,}90}{\sin d}.[r - \cos d]$$

Dans l'ouvrage de J. S. Letcher, un abaque donne r en fonction des hauteurs apparentes réfractées et une table à double argument, r et d, donne ensuite la correction C_1.

Correction de parallaxe et réduction :

L'expression de la correction de parallaxe, C2, se déduit du développement limité en considérant le terme du premier ordre et le terme prépondérant du second ordre (annexe 7-1). On obtient ainsi, en minutes d'arc :

$$C_2 = -\pi_L.\cos H_{arL}\,.\cos\alpha + \frac{arc1'}{2}.\pi_L^2.(\cos H_{arL}\,.\sin\alpha)^2.\cot d$$

On pose ensuite :

$$M = -\cos H_{arL}\,.\cos\alpha = \frac{\sin H_{arL}\,.\cos d - \sin H_{arA}}{\sin d}$$

Et on obtient, tous calculs faits :

$$C_2 = \pi_L.\left\{M + \frac{arc1'}{2}.\pi_L.\cot d\,.[(\cos H_{arL})^2 - M^2]\right\} \quad \text{avec} \quad arc1' = \frac{\pi}{10800}$$

La réduction de la distance est alors :

$$\delta = C_1 + C_2$$

Exemple :

Les données sont celles de l'exemple figurant au chapitre 4. On vérifiera avec une calculette que l'on obtient :

r = 1,1247, C_1 = 0,98', M = – 0,7817, C_2 = – 42,36', δ = – 41' 23''.

ANNEXE 11-4

FORMULES EMPLOYÉES PAR B. STARK

Formule de Dunthorne transformée :

La formule de Dunthorne a été établie à l'annexe 8-1 ; il a été obtenu :

$$\cos D = \cos(H_{vL} - H_{vA}) - [\cos(H_{arL} - H_{arA}) - \cos d].K \quad \text{avec} \quad K = \frac{\cos H_{vL}.\cos H_{vA}}{\cos H_{arL}.\cos H_{arA}}$$

On transforme la différence de cosinus entre les crochets en produit ; posant :

$$A = H_{arA} - H_{arL} + d \quad \text{et} \quad B = H_{arL} - H_{arA} + d$$

On obtient :

$$\cos(H_{arL} - H_{arA}) - \cos d = 2.\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2} = 2.\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}.\sqrt{\frac{1-\cos B}{2}} = 2.\sqrt{\text{hav}(A).\text{hav}(B)}$$

En utilisant le rapport haversine, la formule de Dunthorne s'écrit finalement :

$$\text{hav}(D) = \text{hav}(H_{vL} - H_{vA}) + K.\sqrt{\text{hav}(A).\text{hav}(B)}$$

Les deux termes du membre de droite sont calculés par logarithmes et on obtient ainsi :

$$\log X = \log \text{hav}(H_{vL} - H_{vA}) \quad \text{et} \quad \log Y = \log K + \log\sqrt{\text{hav}(A).\text{hav}(B)}$$

La table des logarithmes gaussiens va permettre d'obtenir le logarithme de X + Y pour obtenir celui du haversine de la distance cherchée. Pour ce faire, on forme :

$$Z = \frac{Y}{X} \quad \text{d'où} \quad X + Y = X.(1+Z) \quad \text{et} \quad \log(X+Y) = \log X + \log(1+Z) \quad \text{avec} \quad \log Z = \log Y - \log X$$

On calcule log Z qui sert d'argument d'entrée dans la table des logarithmes gaussiens qui donne log (1 + Z), d'où ensuite le logarithme cherché.

Formule de calcul de la distance vraie avec les données d'un almanach :

D_L et D_A sont respectivement les déclinaisons de la Lune et de l'astre et ΔAHap la différence d'angles horaires au premier méridien au même instant (ou différence des ascensions droites qui lui est égale). On obtient, à partir de la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique :

$$\text{hav}(D) = \text{hav}(D_L - D_A) + \cos D_L.\cos D_A.\text{hav}(\Delta AHap)$$

Formule de calcul de la hauteur H d'un astre A :

On obtient de même :

$$\text{hav}(90° - H) = \text{hav}(\varphi - D_A) + \cos\varphi.\cos D_A.\text{hav}(AHag)$$

Dans cette formule, φ est la latitude et AHag l'angle horaire local de l'astre.

ANNEXE 11-5

QUELQUES FORMULES COURANTES ET EXEMPLE FINAL

À partir de la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique :

Calcul de ΔZ, angle entre les verticaux de la Lune et de l'astre :

$$\cos \Delta Z = (\cos d - \sin H_{arL} . \sin H_{arA}) . \sec H_{arL} . \sec H_{arA}$$

Calcul de la distance vraie observée D :

$$\cos D = \sin H_{vL} . \sin H_{vA} + \cos H_{vL} . \cos H_{vA} . \cos \Delta Z$$

Calcul de la distance vraie à partir des données de l'almanach D_c :

$$\cos D_c = \sin D_L . \sin D_A + \cos D_L . \cos D_A . \cos(ARL - ARa)$$

Pour ce dernier calcul, on peut aussi utiliser les formules établies par F.-C. Beuf et É. Perrin (voir annexe 9-5).

Formules en cosinus-versines :

Pour un calcul manuel, à partir d'une table donnant les versines naturels, leurs logarithmes ainsi que ceux des cosinus ou des sécantes.

Calcul de ΔZ, angle entre les verticaux de la Lune et de l'astre :

$$\text{vers}(\Delta Z) = [\text{vers}(d) - \text{vers}(H_{arL} - H_{arA})] . \sec H_{arL} . \sec H_{arA}$$

Calcul de la distance vraie observée :

$$\text{vers}(D) = \text{vers}(H_{vL} - H_{vA}) + \cos H_{vL} . \cos H_{vA} . \text{vers}(\Delta Z)$$

Calcul de la distance vraie à partir des données de l'almanach :

$$\text{vers}(D) = \text{vers}(D_L - D_A) + \cos D_L . \cos D_A . \text{vers}(ARL - ARa)$$

Exemple :

Les données sont celles de l'exemple figurant au chapitre 4. Les éléments utiles sont résumés dans le tableau ci-dessous :

Lune	Aldébaran
Hauteur apparente réfractée : H_{arL} = 26° 55' 30'' Hauteur vraie : H_{vL} = 27° 42' 06'' Réfraction astronomique : R_L = 1' 55'' Parallaxe horizontale : π_L = 54' 24''	Hauteur apparente réfractée : H_{arA} = 47° 56' 18'' Hauteur vraie : H_{vA} = 47° 55' 25'' Réfraction astronomique : R_A = 0' 53''
Distance apparente réfractée $L_{ar}A_{ar}$ = d = 25° 11' 12''	

Le calcul, par l'une ou l'autre des formules indiquées ci-dessus donne :

- angle entre les verticaux des deux astres : $\Delta Z = 17{,}7930$ °,

- distance vraie mesurée : D = 24,4972° = 24° 29’ 50’’.

La longitude estimée G_e = 28° 30’ W et l’heure locale Tcg = 18h 50m 35s montrent que l’heure Tcp cherchée est probablement comprise entre 20 h et 21 h. L’extrait des éphémérides permet de remplir le tableau ci-dessous ; les distances vraies pour chacune des deux heures rondes considérées, D_c, ont été calculées à l’aide de l’une des formules indiquées ci-dessus :

Tcp	ARL – ARa	D_L	D_A	D_c
20 h 21 h	– 25,4983° – 25,0183°	N 12,8117° N 12,9817°	N 16,5467° N 16,5467°	24,9288° 24,4363°

L’interpolation linéaire entre les deux distances calculées donne une heure Tcp = 20h 52m 35s et une longitude correspondante G = 30° 30’ W.

En utilisant les variations d’ascension droite et de déclinaison de la Lune par unité de temps et la formulation de Beuf et Perrin (voir annexe 9-5), on obtient :

L	ΔARL	ΔD_L	ΔD_c
78,5123°	– 28,80’/h	+ 10,20’/h	– 29,53’/h

La différence des distance entre l’instant considéré et 21 h étant de 0,0609° ou 3,65’, on obtient une heure cherchée Tcp = 21 h – 3,65/29,53 = 20 h 52m 35s, ce qui conduit à une longitude G = 30° 30’ W.

EPILOGUE

Dans son livre[72] relatant sa circumnavigation en solitaire, Joshua Slocum (1844-1909) écrit :

> *« Quarante-trois jours après mon départ (une longue période de solitude en mer !), le ciel étant merveilleusement clair, et la Lune, en bonne position par rapport au Soleil, je pris mon sextant. Trois observations et une longue lutte avec mes tables lunaires me montrèrent que ma longitude observée était d'accord, à 5 milles près, avec ma longitude estimée. »*

On était alors le 16 juin 1896 et sa traversée du Pacifique, jusqu'aux îles Samoa durera en tout 72 jours. Dans l'ouvrage ne figure aucun détail technique, ni sur les observations, ni sur la méthode de calcul et les tables utilisées. On sait simplement qu'il possédait un exemplaire du Nautical Almanac pour 1896 et il est permis de penser qu'il disposait d'un exemplaire du Bowditch donnant les éléments de calcul complémentaires selon l'une des quatre méthodes qui y sont décrites. J. Slocum précise que les opérations ont été difficiles, avec des erreurs dans les calculs, erreurs qu'il attribue aux tables[73], et qu'il tire une très juste satisfaction du résultat finalement obtenu qui sera confirmé peu de temps après par son passage en vue de l'île la plus Sud des Marquises … J. Slocum était un marin de commerce, capitaine-armateur, sans doute avait-il un brevet de commandement mais avait-il suivi un cours de navigation ? Rien n'est moins sûr[74]. Quoiqu'il en soit, son expérience de la mer, de matelot à capitaine, était complète et il ne manquait ni de sens marin ni d'une connaissance étendue de la science nautique de l'époque.

Le voyage de Joshua Slocum se déroule à la toute fin du XIXe siècle, peu d'années avant la disparition des distances pré-calculées dans les almanachs nautiques. À cette époque, Émile Guyou l'a rappelé dans son article paru dans la Revue maritime, la pratique des distances lunaires est en voie de disparition, au profit du chronomètre et des techniques de la « nouvelle navigation » fondées sur la notion de lieu de position. Il n'en reste pas moins vrai que ces distances permettent de retrouver une valeur approchée de l'heure du méridien de référence et, par là même, de la longitude.

La méthode des distances lunaires présente plusieurs faiblesses ; on peut citer la masse des calculs à effectuer et l'imprécision intrinsèque – une erreur de mesure sur la distance entraîne une erreur environ 30 fois plus grande sur la longitude – ; il s'y ajoute l'indisponibilité de la méthode aux alentours de la nouvelle lune et les difficultés qui peuvent être liées à l'observation. Bref, pour donner un résultat digne de confiance, la méthode des distances lunaires est exigeante et semble n'être réservée qu'à une certaine élite scientifique et navigante. C'était évidemment le cas avant la publication de distances pré-calculées dans les almanachs nautiques mais, ce pouvait l'être aussi après comme le montre par exemple la complexité des solutions indirectes mises au point en seconde moitié du XVIIIe siècle par les astronomes-calculateurs du Nautical Almanach œuvrant sous la direction de l'Astronome royal. On fera cependant une exception pour la solution de R. Dunthorne, relativement simple à mettre en œuvre, mais qui possède le grave défaut, pour l'époque, de ne pas être logarithmique. Au XIXe siècle, il est clair que les différentes solutions apportées au problème sont toutes à la portée des officiers des marines militaires dont le niveau de culture scientifique est en rapport avec les différentes opérations à effectuer, tant dans la pratique des observations que dans les calculs. Le marin de commerce est plus démuni pour accomplir la tâche.

C'est l'abbé de La Caille qui, le premier, s'est soucié du « commun des navigateurs » en tentant de démystifier le procédé : outre un projet d'almanach et l'exposé d'une procédure précise du déroulement des opérations, il

---

[72] « Seul autour du monde sur un voilier de onze mètres », traduction de Paul Budker. En français, il existe une seconde version de ce livre « Joshua Slocum, navigateur en solitaire », traduction de Florence Herbulot. Joshua Slocum est le premier navigateur ayant effectué un tour du monde en solitaire (1895-1898).

[73] Dans une simulation des observations et calculs de J. Slocum, S. Y. van der Werf avance qu'il pourrait s'agir d'une confusion entre temps moyen et temps civil à Greenwich décalés de 12 heures.

[74] Selon le même auteur J. Slocum serait « *a very keen self-made navigator and literate man, but with no formal education in navigati*on ».

choisit de proposer une méthode indirecte avec une résolution graphique. Malheureusement trop imprécise, et difficile d'application pratique, l'idée n'eut pas le succès recherché et il faut attendre le chevalier de Borda pour voir apparaître une procédure complète de travail, incluant les différents cas de figure (nombre d'observateurs, mesure ou calcul des hauteurs etc), et une formulation, certes compliquée, mais directe et précise, sans application de règles de signe, guidée par une grille de calcul claire et immuable. Au prix d'un apprentissage répétitif et rigoureux, la méthode est à la portée d'un futur capitaine au long cours ; celle-ci est largement reconnue et figure dans presque tous les traités et manuels de navigation publiés au XIXe siècle, souvent simplifiée par l'introduction de la différence logarithmique de R. Dunthorne..

Dans cet épilogue, il n'est pas question de revenir sur tous les procédés qui ont été exposés et on fera simplement quelques mentions particulières. Les Britanniques ont reconnu les travaux de J.-Ch. de Borda ; dans leurs ouvrages de navigation, sa solution est souvent présentée en concurrence avec celle, également directe, proposée par J. de Mendoza y Rios ou celle de W.-L. Krafft qui lui est équivalente. On retient également la solution indirecte de D. Thomson, qui fait intervenir une table particulière mais qui permet de résoudre le problème relativement rapidement et sans difficulté majeure, ce qui explique son succès, notamment auprès des marins de commerce anglo-saxons.

Il convient aussi de signaler les officiers de marine F.-C. Beuf et É. Perrin, auteurs d'une solution indirecte relativement simple, et promoteurs de l'observation et du calcul des petites distances lunaires faciles à mesurer avec précision. Leurs travaux sont arrivés trop tard, le chronomètre ayant alors relégué les distances lunaires à l'arrière-plan, et les navigateurs n'ont pu finalement en retirer tout le bénéfice.

Que dire enfin des solutions conçues par les astronomes, Bremicker, W. Chauvenet et G. B. Airy, peut-être un peu trop éloignés des choses de la mer ? Furent-elles pratiquement utilisées ? Intéressantes sur le plan mathématique, on ne peut que regretter leur complexité qui les mettait peu à la portée du « commun des navigateurs ».

Au milieu du XXe siècle, ce sont des marins qui, par nécessité, réhabilitent la méthode ou ses variantes. Le lieutenant de vaisseau Pierre Guillaume tout d'abord qui retrouve ainsi, à bord de son petit voilier, l'heure perdue dans l'Océan Indien. Bien que les circonstances soient complètement différentes, on ne peut s'empêcher de faire le rapprochement avec son illustre prédécesseur Joshua Slocum. Puis, c'est Sir Francis Chichester qui, suite à la perte de l'heure de l'un de ses concurrents dans une course transatlantique, propose une méthode basée sur l'emploi de deux droites de hauteur, dont une droite de Lune, pour recaler un chronomètre défaillant. La méthode est intéressante et est à rapprocher de celle de l'angle horaire du chanoine A.-G. Pingré ; elle est malheureusement tout aussi imprécise.

Par la suite, l'avènement des moyens de calcul électronique, calculettes et micro-ordinateurs, est à l'origine d'une certaine renaissance de la méthode des distances lunaires dont l'exercice conduit à la redécouverte d'une culture historique et scientifique maritime. Le calcul, l'un des freins au développement de la méthode, peut être maintenant relégué au second plan puisque c'est la machine qui va l'effectuer, le navigateur n'ayant plus qu'à se consacrer à l'observation. Les distances lunaires ne sont donc pas mortes, a contrario de ce qu'affirmait le capitaine S. T. Lecky, de façon péremptoire, dans son ouvrage[75] :

> *« La question du plus ou moins d'utilité de l'étude de ce problème peut encore être discutable dans l'esprit de quelques personnes, mais ce qui est bien certain, c'est que les distances sont tombées en désuétude, qu'elles sont aussi mortes que Jules César ; et, sans le moins du monde se poser en prophète, l'auteur se risquera à dire qu'elles ne ressusciteront jamais, et cela pour la meilleure des raisons, c'est qu'on n'en aura plus besoin désormais. »*

… les distances, devenues source de culture et de curiosité, sont donc toujours bien vivantes.

[75] « Wrinkles in Practical Navigation », 16e édition 1912, page 462. Traduction du Cdt Guyou.

REMERCIEMENTS

J'adresse en premier lieu mes vifs remerciements à Jacques Ducruy, passionné d'histoire maritime en général et d'histoire de la navigation en particulier et, dans notre domaine commun de recherche, correspondant régulier depuis plusieurs années. Son sens critique affuté m'a permis d'éviter écueils et fausses routes notamment sur le plan historique.

En second lieu, je remercie Philippe Posth, gérant de la société « Navastro » et probablement, en France, l'un des derniers promoteurs de la pratique de la navigation astronomique ; Philippe Posth est venu apporter sa pierre à l'édifice après une lecture attentive du projet de texte.

Dernière citée mais non la moindre, Colette Le Lay, historienne des sciences et des techniques, secrétaire de l'association nantaise « Méridienne », a apporté sa touche personnelle en me donnant un avis autorisé sur le sujet et en me suggérant une série de corrections accompagnée d'une discrète invitation à poursuivre, dans un travail ultérieur, la recherche sur la pratique réelle de la méthode des distances lunaires au XIXe siècle et ce jusqu'à l'implantation généralisée du chronomètre.

Je ne peux enfin qu'exprimer ma profonde reconnaissance à François Mignard, Président du Bureau des longitudes, qui a retenu et soutenu ce projet et qui a pris le temps de faire une lecture minutieuse pour me faire part d'ultimes et pertinentes propositions visant à clarifier la présentation du texte et à rectifier quelques imprécisions.

BIBLIOGRAPHIE

Sur la période considérée, la bibliographie relative à la navigation astronomique en général, et aux distances lunaires en particulier, est extrêmement riche. On a simplement fait figurer dans les tableaux ci-après les différentes sources qui ont été utilisées, les dates de publication indiquées étant celles des éditions qui ont été consultées.

Auteurs	Titres	Références éditeurs	Dates
APIAN Pierre	Cosmographie.		1544
BEDEL Paul	Tables de navigation 1840-1980.	Bureau des longitudes	2020
BELLEC François	Histoire universelle de la navigation, tome II, des étoiles aux astres nouveaux.	de Monza	2017
BEUF F.-C. & PERRIN É.	Considérations nouvelles sur l'observation et la réduction des distances lunaires en mer.	Académie des sciences	1878
BÉZOUT Étienne	Traité de navigation (revu par de Rossel)		1814
BOISTEL Guy	L'astronomie nautique au XVIIIe siècle en France : tables de la Lune et longitudes en mer.	Thèse de doctorat, université de Nantes	2001
BOISTEL Guy	De quelle précision a-t-on réellement besoin en mer ?	Histoire et mesure	2006
BOISTEL Guy	L'observatoire de la Marine et du Bureau des longitudes au parc Montsouris, 1875-1914.	IMCCE	2010
BOISTEL Guy	Pour la gloire de M. de La Lande, une histoire matérielle, scientifique, institutionnelle et humaine de la Connaissance des temps, de 1679 à 1920.	IMCCE	2022
BORDA Jean-Charles	Description et usage du cercle de réflexion avec différentes méthodes pour calculer les observations astronomiques		1787
BOUGUER Pierre	Nouveau traité de navigation		1753
BOWDITCH Nathaniel	The (New) American Practical Navigator	Plusieurs éditions consultées (voir texte)	
BRÜNNOW Franz	Traité d'astronomie sphérique et d'astronomie pratique.	Gauthier-Villars	1869
CAILLET Pierre	Manuel du navigateur.		1818
CAILLET Vincent-Marie	Traité de navigation.	Plusieurs éditions consultées (voir texte)	
CHABERT	Voyage fait par ordre du roi en 1750 et 1751 dans l'Amérique septentrionale.		1753
CHAUVENET William	Spherical and Practical Astronomy.	Lippincott	1863
CHICHESTER Francis	Longitude without Time.	Royal Institute of Navigation	1966
COTTER Charles H.	A History of Nautical Astronomy.	Hollis & Carter	1968
COTTER Charles H.	Henry Raper's Spherical Traverse Table.	Royal Institute of Navigation	1973
d'APRÈS de MANEVILLETTE	Relation d'un voyage aux isles de France et de Bourbon.	Académie royale des sciences	1763
de CHARNIÈRES Charles	Théorie et pratique des longitudes en mer.		1772
de GRIJS Richard	A (not so brief) history of lunar distances.	Journal of astronomical history and heritage	2020
DUBOIS Edmond	Cours de navigation et d'hydrographie.	Arthus Bertrand	1869
DUBOURGUET Jean Baptiste	L'art du calcul astronomique des navigateurs.		1801
DUBOURGUET Jean-Baptiste	Traité de navigation.		1808
DUBUS François-Jacques	Types de calculs de navigation et d'astronomie nautique.	L. Prud'homme	1844 et 1853
DUCOM Joseph	Cours complet d'observations nautiques		1820 et 1835
FEUILLÉE Louis	Journal des observations physiques, mathématiques et botaniques, tome 1er.		1714
FOURNIER Charles-Félix	Traité de navigation.	Macé	1839
FRISIUS Gemma	Principe d'astronomie et de cosmographie.		1556
GUÉPRATTE Charles	Problèmes de navigation et d'astronomie nautique.		1816 et 1839
GUILHAUMON J. B.	Éléments de navigation et de calculs nautiques.	Berger-Levrault	1891

GUILLAUME Pierre	Mon âme à Dieu, mon corps à la patrie, mon honneur à moi. Mémoires.	Plon	2006
GUYOU Émile	La méthode des distances lunaires. Le présent, le passé, l'avenir.	Revue maritime	1902
HADLEY John	The description of a new instrument for taking angles	Royal Society	1731
HALLEY Edmond	A proposal of a method for finding the longitude at sea within a degree or 20 leagues.	Royal Society	1731
HALLEY Edmond	Astronomical Tables with precepts.		1752
HUE Armand	Notice sur le planisphère pour les distances lunaires.	J. Salleron	1865
INMAN James	A Treatise on Navigation and Nautical Astronomy.		1821
INMAN James	Navigation and Nautical Astronomy for the Use of British Seamen.		1849
KALIVODA Jan	Classification of the Method for Clearing the Lunar Distance.	Forum NavList	2003
LA CAILLE Nicolas-Louis	Calcul des differences dans la trigonométrie sphérique.	Académie royale des sciences	1741
LA CAILLE Nicolas-Louis	Remarques sur la méthode pour laquelle l'état du ciel de M. Pingré avait été principalement calculé.	Académie royale des sciences	1759
LA CAILLE Nicolas-Louis	Mémoire sur l'observation des longitudes en mer par le moyen de la Lune.	Académie royale des sciences	1759
LECKY S. T. S.	Wrinkles in Practical Navigation	G. Philip	1912
LEDIEU Alfred	Les nouvelles méthodes de navigation, étude critique.	Dunod	1877
LETCHER John S.	Self-Contained Celestial Navigation with HO208.	International Marine Publishing Company	1977
LEVÊQUE Pierre	Le guide du navigateur.		1779
MACKAY Andrew	The Theory and Practice of Finding Longitude.		1793 et 1801
MARGUET Frédéric	Histoire générale de la navigation du XVe au XXe siècle.	SEGMC	1931
MARTIN W. R.	ATreatise on Navigation and Nautical Astronomy	Longman	1899
MASCART Jean	La vie et les travaux du chevalier J.-Ch. de Borda	Presses de l'université Paris-Sorbonne	2000
MASKELYNE Nevil	The British Mariner's Guide		1763
MASKELYNE Nevil	Concises Rules for Computing the Effects of Refraction and Parallax in varying the Apparent Distance of the Moon from the Sun or a Star.	Royal Society	1764
MASKELYNE Nevil	A Correct and Easy Metod of Clearing the Apparent Distance of the Moon from a Star or the Sun of the Effect of Refraction and Parallax by the Help of Three Tables.	Nautical Almanac	1772
MASKELYNE Nevil	Tables Requisite to be Used with the Nautical Ephemeris for finding Latitude and Longitude at Sea.		1781
MAY W. E.	The Double Altitude Problem.	Royal Institute of Navigation	1950
MENDOZA y RIOS Josef	Recherches sur les principaux problèmes de l'astronomie nautique.	Royal Society	1797
MENDOZA y RIOS Josef	Tables for Facilitating the Calculations of Nautical Astronomy.		1801
MONTUCLA J.-F.	Histoire des mathématiques, tome 4.		1802
MOORE John H.	The New Practical Navigator		1799
MORIN Jean-Baptiste	La science des longitudes.		1634 et 1647
NORIE John W.	A Complete Epitome of Navigation.	Plusieurs éditions consultées (voir texte)	
NORIE John W.	A Set of Linear Tables for Correcting the Apparent Distance of the Moon from the Sun or a Fixed Star for the Effect of Refraction.	Norie	1815
PERRET Eugène	Navigation, instruments, observations, calculs.	Octave Doin	1908
PEZENAS Esprit	Astronomie des marins		1766
PINGRÉ Alexandre-Guy	État du ciel pour l'an 1757.		1757
RAPER Henry	The practice of Navigation and Nautical Astronomy.	Plusieurs éditions consultées (voir texte)	
RIDDLE Edward	A Treatise on Navigation and Nautical Astronomy.		1824
ROBERTSON John	Elements of Navigation.		1780
ROCHER P.	Formulation de la parallaxe dans les différents repères astronomiques.	IMCCE	2012

ROSSER W. H.	A Self Instructor in Navigation and Nautical Astronomy.	Plusieurs éditions consultées (voir texte)	
SADLER D. H.	Man is not lost	National Maritime Museum & Royal Greenwich Observatory	1968
SALVADOR Garcia Franco	Historia del arte y ciencia de navegar.	IHM	1947
SÉGÉRIC Jean-José	Histoire du point astronomique en mer.	Marines édition	2013
SHADWELL Charles	Tables for Facilitating the Reduction of Lunar Observations.	J. D. Potter	1860
SHUFELDT H. & NEWCOMER K.	The Calculator Afloat.	Adlard Coles Ltd	1984
SLOCUM Joshua	Seul autour du monde sur un voilier de 11 mètres. Traduction : Paul Budker.	Chiron	1957
SLOCUM Joshua	Navigateur en solitaire. Traduction : Florence Herbulot.	Babel	1990
STARK Bruce	Stark Tables for Clearing the Lunar Distance.	Starpath	2010
TAYLOR E. G. R.	The Haven-Finding Art	Hollis & Carter	1971
TAYLOR Janet	Lunar Tables by which the True Distance is Obtained.		1833 (?)
THOMSON David	Lunar and Horary Tables		1825
TOWSON J. Th.	Tables for the Reduction of Ex-Meridian Altitudes.		1849
van der WERF Siebren Y.	The lunar distance method in the 19th century. A simulation of J. Slocum's observation on june 16 1896.	Journal of the Institute of Navigation	1997
VERDUN de la CRENNE, BORDA, PINGRÉ	Voyage fait par ordre du roi en 1771 et 1772 en diverses parties de l'Europe, de l'Afrique et de l'Amérique pour vérifier l'utilité de plusieurs méthodes & instruments …		1778
ZACH	Correspondance astronomique, géographique, hydrographique et statistique, volume 6 (Elford).		1822
ZACH	Correspondance astronomique, géographique, hydrographique et statistique, volume 10 (Bowditch).		1824

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos	page 4
Chapitre 1er : position du problème & genèse de la méthode Principe général Présentation du problème sur la sphère locale d'un observateur et calculs de base Quelques repères dans la genèse des distances lunaires	page 5 5 6 7
Annexes au chapitre 1er : annexe 1-1 : sphères céleste et locale, coordonnées, formulaire, symbolisation annexe 1-2 : correction des hauteurs, parallaxes	page 10 10 16
Chapitre 2 : détermination de la latitude Introduction L'observation méridienne Observation circumméridienne Latitude par la Polaire Latitude par double observation (double altitude problem) Commentaires	page 19 19 19 20 21 22 24
Annexe au chapitre 2 : latitude par la Polaire	page 25
Chapitre 3 : détermination d'un angle horaire, calculs d'heure Introduction Détermination d'un angle horaire local Circonstances favorables au calcul d'angle horaire Le temps local Détermination du midi local, méthode des hauteurs correspondantes	page 27 27 27 28 29 29
Annexes au chapitre 3 : annexe 3-1 : formules de calcul de l'angle horaire local annexe 3-2 : circonstances favorables au calcul d'heure annexe 3-3 : calcul du temps vrai local par observation d'une étoile ou d'une planète annexe 3-4 : équation des hauteurs correspondantes	page 30 30 31 32 33
Chapitre 4 : premières applications des distances lunaires pour déterminer la longitude Introduction Le Père Feuillée Edmond Halley Jean-Bernard Cogolin, marquis de Chabert Jean-Baptiste d'Après de Mannevillette Esprit Pézenas Charles François Philippe de Charnières Commentaires	page 34 34 34 35 36 36 37 38 39
Annexe au chapitre 4 : exemple de calcul : - données du problème, - calcul de l'heure locale, - méthode de Halley, - méthode de Chabert, - méthode de d'Après de Mannevillette, - méthode de de Charnières, - méthode de Pézenas - récapitulatif.	page 41 41 41 42 44 46 47 50 51

Chapitre 5 : méthode de l'angle horaire	page 52
Principe général	52
L'observation pratique	53
Le réquisitoire de l'abbé de La Caille	54
Commentaires	55
Annexes au chapitre 5 :	page 56
annexe 5-1 : exemple d'application de la méthode de l'angle horaire	56
annexe 5-2 : calcul des incertitudes	59
Chapitre 6 : les propositions de l'abbé de La Caille	page 61
Almanach Nautique et châssis de réduction	61
Commentaire	65
Annexe au chapitre 6 : exemple de calcul	page 66
Chapitre 7 : travaux de l'Astronome royal Nevil Maskelyne et des calculateurs du Nautical Almanac	page 68
Quelques éléments préliminaires	68
Le British Mariner's Guide	69
Le Nautical Almanac	70
Logarithmes proportionnels	71
Solution d'Israël Lyons	71
Cambridge Tables	72
Solution de George Witchell	72
Commentaires	72
Annexes au chapitre 7 :	page 73
annexe 7-1 : définition des termes correctifs à l'aide d'un développement limité	73
annexe 7-2 : réduction des distances selon la méthode explicitée dans le British Mariner's Guide	75
annexe 7-3 : réduction des distances selon la méthode explicitée dans le Nautical Almanac pour l'an 1772	78
annexe 7-4 : solutions d'Israël Lyons et de George Witchell	81
annexe 7-5 : exemple	83
annaxa 7-6 : logarithmes proportionnels	86
Chapitre 8 : les développements de la méthode directe ; solutions de R. Dunthorne, J.-Ch. de Borda, W.-L. Krafft et diverses variantes de la fin du XVIIIe siècle	page 87
Considérations générales sur la méthode directe	87
Solution de R. Dunthorne	88
Solution du chevalier J.-Ch. de Borda	88
Solutions de Ch. Romme et de J.-B. Delambre	92
Solutions de W.-L. Krafft et J. de Mendoza y Rios	92
Solution d'A. Mackay	92
Commentaires	93
Annexes au chapitre 8 :	page 94
annexe 8-1 : formules de R. Dunthorne	94
annexe 8-2 : formules de J.-Ch. de Borda	95
annexe 8-3 : formules de W.-L. Krafft, J. de Mendoza y Rios et de J. Garnett	96
annexe 8-4 : exemple de calcul	97
Chapitre 9 : les apports du XIXe siècle	page 99
Solutions de J. H. Moore, J. Elford, D. Thomson et J. Taylor	99
Solution de Bremicker	101
Solution de W. Chauvenet	101
Solution de H. Raper et Ch. Shadwell	101
Solution graphique d'A. Hue	102
Solution de F.-C. Beuf et É. Perrin	103
Solution de G. B. Airy	103
Solutions de J. Merrifield et de W. Hall	103
Commentaires	104

Annexes au chapitre 9 :	page 105
annexe 9-1 : solution de J. H. Moore et variantes	105
annexe 9-2 : solutions de Bremicker, Chauvenet et Airy	106
annexe 9-3 : solution de Raper et Shadwell	108
annexe 9-4 : solution graphique de Hue	109
annexe 9-5 : solution de Beuf et Perrin	111
annexe 9-6 : solutions de Merrifield et de Hall	112
annexe 9-7 : exemple de calcul	113
Chapitre 10 : le calcul des distances lunaires selon les manuels et traités de navigation du XIXe siècles	page 118
Le Bowditch	118
Les manuels de navigation britanniques	119
Les cours et traités de navigation britanniques	120
Les ouvrages français	121
Commentaires	123
Annexe au chapitre 10 : usage des Spherical Traverse Tables (H. Raper)	page 125
Chapitre 11 : vers une disparition de l'emploi de la méthode ?	page 126
Le cours de l'histoire	126
L'aventure du lieutenant de vaisseau Pierre Guillaume	127
Méthode des droites de hauteur	128
Les travaux de J. S. Letcher	129
Tables de B. Stark	131
Frank Reed et le forum NavList	132
Observer une distance lunaire et calculer la longitude au XXIe siècle	132
Commentaires	133
Annexes au chapitre 11 :	page 134
annexe 11-1 : culminations de Pierre Guillaume	135
annexe 11-2 : exemple d'application de la méthode des droites de hauteur	135
annexe 11-3 : formules employées par J. S. Letcher	136
annexe 11-4 : formules employées par B. Stark	137
annexe 11-5 : quelques formules courantes et exemple final.	138
Épilogue	page 140
Remerciements	page 142
Bibliographie	page 143

ISBN : 978-2-491688-19-6
ISSN : 2724-8372